Ueber die v. Staudt'schen Würfe.

Von RUD. STURM in Darmstadt.

Hierzu eine Tafel.

Die interessante und verdienstliche Arbeit des Herrn Lüröth über das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfeln (Gött. Nachr. 1873 S. 767 und ausführlicher diese Annalen Bd. VIII, S. 145—214) hat mich zu einigen Untersuchungen auf diesem Gebiete veranlasst, die ich mir hier mitzuthemen erlaube.

1. Ich will zunächst andere, mehr geometrische Beweise für die *Associativität der Addition und Multiplication v. Staudt'scher Würfe* geben; da aber die geometrische Construction bei beiden Operationen im Wesentlichen dieselbe ist*), so wird es genügen, die Multiplication zu besprechen.

2. Nehmen wir zuerst an, dass die drei Würfe $ABCD_1 = u_1$, $ABCD_2 = u_2$, $ABCD_3 = u_3$ auf derselben geraden Linie g sich befinden (Fig. 1); so wollen wir also darthun, dass $(u \cdot u_2) \cdot u_3 = (u_1 \cdot u_3) \cdot u_2$ ist.

Wir construiren ein vollständiges Viereck $KLMN$, so dass zwei Gegenseiten KN , LM durch A , C ; zwei weitere, LN , KM , durch D_1 , D_2 und eine der beiden übrigen, LK , durch B geht (was auf unendlich viele Weisen möglich ist); trifft nun die letzte Seite MN

*) Der Bequemlichkeit halber wiederhole ich hier die Definition der Addition und Multiplication. Wenn die Punkte $ABCD_1, D_2S$ derselben Geraden oder demselben Kegelschnitte angehören, so ist $ABCD_1 + ABCD_2 = ABCS$, sobald CC , D_1D_2 , AS in Involution sind (v. Staudt Beitr. zur Geom. der Lage — die allein citirt werden — Nr. 238, Lüröth a. a. O. Nr. 57). Ferner ist nach Staudt Nr. 268 $ABCD_1 \cdot AD_1CP = ABCEP$; wenn nun $AD_1CP = ABCD_2 = CD_2AB$, so sind AC , D_1D_2 , BP in Involution, also kann man das Product zweier Würfe auch so definiren: $ABCD_1 \cdot ABCD_2 = ABCEP$, wenn AC , D_1D_2 , BP in Involution sind (Hans Pfaff, Neuere Geometrie (1867) I Nr. 217, Lüröth a. a. O. 61.); die Beweise der Associativität der Addition und Multiplication finden sich bei Staudt Nr. 259, 269, bei Lüröth Nr. 59, 62, bei Pfaff Nr. 222, 224; obgleich Pfaff die Würfe als Doppelverhältnisse auffasst, so sind diese seine Beweise doch ganz unabhängig von dieser Auffassung und zeichnen sich durch Einfachheit aus.

die g in P_{12} , so sind AC, D_1D_2, BP_{12} in Involution; also $ABCP_{12} = u_1 \cdot u_2$.

Trifft KD_3 die LC in M' , $M'N$ die g in P_{13} ; so ist $ABCP_{13} = u_1 \cdot u_3$. Sind noch Q, Q' die Schnittpunkte von KAN mit L (P_{12}, P_{13}), so benutze man, um $(u_1 \cdot u_2)u_3$ und $(u_1 \cdot u_3)u_2$ zu construiren, die Vierecke $KLM'Q$ und $KLM'Q'$; es kommt darauf an, zu zeigen, dass $M'Q$ und $M'Q'$ die g in demselben Punkte treffen. Fasst man aber L, M, M' und N, Q, Q' als entsprechende Punkte zweier projectiver Reihen auf, so erkennt man, dass die drei Punkte $(LQ, MN) = P_{12}$, $(LQ', NM') = P_{13}$ und $(M'Q, M'Q') = P$ auf derselben Geraden liegen, derjenigen nämlich, welche die Träger der Reihen in den dem Schnittpunkte entsprechenden Punkten trifft oder welche, wenn wie bei der Addition diese Reihen in perspectiver Lage sind, vom Projectionscentrum durch die Träger harmonisch getrennt ist; also liegt P auf g und $ABCP$ ist sowohl $(u_1u_2)u_3$, als auch $(u_1u_3)u_2$.

Das Viereck $KNMM'$ zeigt, dass auch $AC, P_{12}D_3, P_{13}D_2$ in Involution sind, so dass also auch die durch $AC, P_{12}D_3$ bestimmte Involution und die durch $AC, P_{13}D_2$ bestimmte identisch sind, mithin auch die in beiden dem B zugeordneten Punkte; womit von neuem bewiesen, dass $ABCP_{12} \cdot ABCD_3 = ABCP_{13} \cdot ABCD_2$ *).

3. Liegen die 3 Würfe auf demselben Kegelschnitte k (Fig. 2.); so seien E_{12}, E_{13} die Schnittpunkte von D_1D_2, D_1D_3 mit AC, P_{13}, P_{23} deren Projectionen aus B auf k ; dann ist $ABCP_{12} = u_1u_2$, $ABCP_{13} = u_1u_3$. Das Pascal'sche Sechseck $BP_{13}D_2D_1D_3P_{12}$ beweist, dass D_3P_{12} und D_2P_{13} die AC in demselben Punkte F treffen; ist Q dessen Projection aus B auf k , so ist $ABCQ$ sowohl $(u_1u_2)u_3$, als $(u_1u_3)u_2$.

4. Die Distributivität der Addition und Multiplication**) lässt sich auf folgende Weise erkennen. Es soll bewiesen werden, dass

$$u_1(u_2 + u_3) = u_1u_2 + u_1u_3.$$

Stellen wir uns die drei Würfe u_1, u_2, u_3 , welche von D_1, D_2, D_3 mit ABC gebildet werden, wieder auf einem Kegelschnitte k vor (Fig. 2.); P_{12} und P_{13} seien wie in Nr. 3 construirt. T_{23} sei der Schnitt von D_2D_3 mit der Tangente an k in C und S_{23} die Projection von T_{23} aus A auf k , so dass $ABCS_{23} = u_2 + u_3$; $P_{12}P_{13}$ treffe dieselbe Tangente in T und D_1S_{23} die AC in E , so ist zu zeigen, dass AT

*) Pfaff's Beweis ist folgender: Weil AC, D_1D_2, BP_{12} in Involution sind, so ist $ABCD_1 \bar{\cap} CP_{12}AD_2$, und weil AC, D_1D_3, BP_{13} involutorisch gepaart sind, so ist $ABCD_1 \bar{\cap} CP_{13}AD_3$; also $CP_{12}AD_2 \bar{\cap} CP_{13}AD_3 \bar{\cap} AD_3CP_{13}$; d. h. $AC, P_{13}D_2, P_{12}D_3$ in Involution wie oben; ähnlich für die Addition.

**) Bei v. Staudt Nr. 274, bei Lüroth Nr. 63 bewiesen.

und BE den k in demselben Punkte treffen, oder, wenn P die Projection von E aus B auf k ist, dass A, P, T in gerader Linie liegen. Nun sind abersowohl $AP_{12}P_{13}PC$, als $AD_2D_3S_{23}C$ die Projectionen von $AE_{12}E_{13}EC$, bez. aus B, D_1 ; folglich ist $AP_{12}P_{13}PC \cap AD_2D_3S_{23}C$; weil aber CC, D_2D_3, AS_{23} involutorisch gepaart, so sind es auch $CC, P_{12}P_{13}, AP$; d. h. AP geht durch $T = (CC, P_{12}P_{13})$.

5. $ABCD$ sei ein Wurf auf einem geraden Träger g ; wir projectiren ihn aus einem beliebigen Punkte O auf eine durch A gehende Gerade, nach $AB'C'D'$; ist E die Projection von C' aus $O = (BB', CD')$ auf g , so ist Wurf $ABCE = AB'D'C' = ABDC$. Das vollständige Viereck $C'DOO'$ zeigt aber, dass CC, ED, AB in Involution sind; also ist $ABCD + ABDC = ABCD + ABCE = ABCB = 1$.

Oder, wenn $ABCD$ auf einem Kegelschnitte k liegt, so sei T der Schnitt von AB mit der Tangente in C und E die Projection von T aus D auf k ; AB, ED, CC sind dann in Involution, also $ABDC = BAEC = ABCE$, andererseits $ABCD + ABCE = ABCB$.

6. Wenn AA', BB', CC' involutorisch gepaart sind, so ist

$$ABC'B' + BCA'C' + CAB'A' = 1.$$

Es mögen die drei Involutionspaare auf einem Kegelschnitte k liegen und M sei das Centrum dieser krummen Involution. Ist E die Projection des Punktes $Q = (AA', C'B)$ aus C auf k ; so ist $ABC'E = CBC'A' = BCA'C'$, denn $C(ABC'E)$ und $A(CBC'A')$ treffen $C'B$ in denselben Punkten. Das Pascal'sche Sechseck $C'C'CEB'B$, dessen eine Seite $C'C'$ eine Tangente ist, zeigt, dass $M = (BB', CC')$, $Q = (CE, BC')$ und $T = (B'E, C'C')$ in gerader Linie liegen, also T sich auf MQ oder AA' befindet. Also ist $ABC'B' + BCA'C' = ABC'B' + ABC'E = ABC'A'$. Wegen der Involution AA', BB', CC' ist aber $ABC'A' = A'B'CA' = CAA'B'$; demnach

$$ABC'B' + BCA'C' + CAB'A' = CAA'B' + CAB'A' = 1$$

wegen Nr. 5.

7. Unter derselben Voraussetzung, dass AA', BB', CC' involutorisch sind, ist

$$AB'CB \cdot BC'AC \cdot CA'BA = -1.$$

V sei der Pol von BC bezüglich des Kegelschnitts k , auf dem die 3 Paare wieder liegen, AV treffe CC' in R , k in A_1 und F sei die Projection von R aus B auf k ; so ist $ABCF = ACBC' = BC'AC$, denn $B(ABCF)$ und $C(ACBC')$ treffen AV in denselben Punkten. Demnach ist $AB'CB \cdot BC'AC = AB'CB \cdot ABCF = AB'CF$ nach v. Staudt's Definition des Products zweier Würfe. Ferner ist

$AB'CF = BA'CA_1$, denn sie werden aus B und A durch perspective Würfe projectirt. Nun ist aber $BA'CA_1 + BA'CA = BA'CB = 0$, also $BA'CA_1 = -BA'CA = -CABA'$; endlich $CABA' \cdot CA'BA = CABA = 1$; also

$$AB'CA \cdot BC'AC \cdot CA'BA = -CABA' \cdot CA'BA = -1.$$

8. Wenn eine Gerade d den Kegelschnitt k nicht schneidet, so stellt die auf ihr befindliche Involution der in Bezug auf k zugeordneten (conjugirten) Punkte, mit dem einen oder dem andern Sinne behaftet, den einen oder den andern imaginären Schnittpunkt Δ' , Δ'' von d mit k dar (ich bezeichne, wie Herr Lüroth, imaginäre Punkte mit grossen griechischen Buchstaben); da nun, wie Lüroth § 4. beweist, diese gerade Involution auf d aus jedem beliebigen Punkte von k auf diesen Kegelschnitt in dieselbe krumme Involution projectirt wird, nämlich in diejenige, deren Centrum der Pol D von d ist; so kann man auch letztere als die Δ' , Δ'' darstellende ansehen; die Sinne sind natürlich mit denen auf d perspectiv zu nehmen.

9. Wenn Π ein imaginärer Punkt von k ist, p sein gerader Träger, dessen Pol P das Centrum der krummen den Π darstellenden Involution (P) ist, und M ein reeller Punkt; so ist der zweite Schnittpunkt Π' von $M\Pi$ mit k dargestellt durch die krumme Involution (P'), welche die Projection der Π darstellenden krummen Involution aus M auf k ist, wobei der Sinn mit projectirt ist. Der gerade Träger p' von Π' wird von p durch M und seine Polare m bezüglich k harmonisch getrennt*). (Fig. 3)

A, A_1 sei ein Paar der krummen Involution (P); seine Projection aus M auf k sei A', A'_1 ; P', Q, S seien die Schnittpunkte von MP mit $A'A_1$ und mit k , letztere beide, weil P innerhalb k liegt, reell. Nun ist $PQSM \bar{\cap} A(A_1QSA') \bar{\cap} A'_1(A_1QSA') \bar{\cap} MQSP'$; wenn AA_1 mit einem andern Paare von (P) vertauscht wird, so bleibt P und demnach wegen dieser Projectivität auch P' unverändert; letzterer Punkt ist folglich das Centrum der Involution, in welche (P) aus M auf k projectirt wird. Habe die Involution (P) den Sinn ABA_1B_1 , und seien $A'B'A'_1B'_1$ die Projectionen dieser 4 Punkte, so ist der durch $A'B'A'_1B'_1$ dargestellte Punkt Π' der zweite Schnittpunkt von $M\Pi$ mit k . Wenn p' die Polare von P' ist, also der Träger der geraden Π' darstellenden Involution, die mit der krummen (P') für jeden Punkt von k als Projectionscentrum perspectiv ist (auch dem Sinne nach), so haben wir nachzuweisen, dass Π, Π', M in gerader Linie liegen, d. h. dass M der Scheitel der (einzigen) Strahlinvolution ist,

*) Vergl. v. Staudt Beitr. Nr. 165.

die mit den beiden geraden Involutionen auf p und p' gleichzeitig auch dem Sinne nach perspectiv ist.

Wie oben gefunden, ist $MQSP' \bar{\wedge} PQSM \bar{\wedge} MSQP$; also sind MM, SQ, PP' in Involution. Der andere Ordnungspunkt N dieser Involution befindet sich, weil der Wurf $MSNQ$ harmonisch ist, auf der Polare m von M , welche durch den Punkt $U = pp'$ geht; aber auch PP' sind durch M und N oder durch M und seine Polare m harmonisch getrennt. Die Polare n von N ist UM ; ferner ist $pmp'n \bar{\wedge} PMP'N$; also werden auch m und n oder M und N durch p und p' oder durch deren Schnittpunkte R, R' mit $u = PP'$ harmonisch getrennt; folglich sind MM, NN, SQ, PP', RR' 5 Paare derselben Involution auf u .

Da u die Polare von U ist, so sind $RU, R'U$ je ein Paar der geraden Involutionen auf p und p' , welche Π, Π' darstellen; demnach liegt der reelle Punkt von $\Pi\Pi'$ oder der Scheitel der oben genannten mit diesen Involutionen perspectiven und die Gerade $\Pi\Pi'$ darstellenden Strahlinvolution auf RR' oder u .

Es seien nun W, V' die Projectionen von R aus A' und von R' aus A auf k , V die von V' aus M ebenfalls auf k ; so ist $V'SA'A_1 \bar{\wedge} R'SMP$ (Projectionscentrum A) $\bar{\wedge} RQMP'$ (wegen der obigen Involution) $\bar{\wedge} WQA'A_1'$ (Projectionscentrum A'); andererseits aber ist $V'SA'A_1 \bar{\wedge} VQA'A_1'$, also W mit V identisch. Sind nun V_1, V_1' die zugeordneten Punkte von V, V' bez. in den Involutionen $(P), (P')$; so wird, da V aus A' nach R projicirt wird, V_1 aus A' nach U projicirt, dem zugeordneten Punkt von R in der geraden Involution auf p ; ebenso wird V_1' aus A nach U projicirt. Weil V, V' mit M in gerader Linie liegen, so thun es auch ihre zugeordneten V_1, V_1' . Also ist $AV_1A_1V_1 \bar{\wedge} A'V_1'A_1'V_1'$; folglich gilt dies auch für ihre bezüglichen Projectionen aus A' und A auf p, p' , nämlich $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}_1U$ und $\mathfrak{A}'R'\mathfrak{A}_1'U$; dies sind zwei Darstellungen von Π und Π' . Sie sind nun in perspectiver Lage, mithin ist ihr Projectionscentrum, d. i. der Schnittpunkt von RR' mit $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ oder $A'A'$, demnach der Punkt M der Scheitel der mit beiden Involutionen perspectiven Strahlinvolution.

Es ist auf der Stelle ersichtlich, dass, wenn Π mit seinem conjugirten Punkt vertauscht wird, an die Stelle von Π' als zweitem Schnittpunkt ebenfalls der conjugirte tritt.

10. Umgekehrt, wenn Π, Π' auf k gegeben sind, also $p, p', P, P', R, R', S, Q$; so ist der eine der Ordnungspunkte der Involution PP', RR', SQ auf der Polare des Schnittpunkts u der geraden Träger von Π, Π' (welche Ordnungspunkte stets reell sein, da P, P' innerhalb k liegen) der reelle Punkt von $\Pi\Pi', \Pi_1\Pi_1'$, der andere von $\Pi\Pi_1', \Pi'\Pi_1$, wenn Π_1, Π_1' zu Π, Π' conjugirt sind; und zwar, wenn der Sinn der

Π darstellenden Involution von R nach U geht, und der der Involution (Π') von U nach R' , oder beide umgekehrt, so liegt der reelle Punkt von $\Pi\Pi'$ zwischen R und R' ; haben die Involutionen (Π) und (Π') aber die Sinne RU , $R'U$ oder die umgekehrten, so liegt der reelle Punkt von $\Pi\Pi'$ ausserhalb der Strecke RR' . Oder jenachdem die Sinne der krummen Π und Π' darstellenden Involutionen auf k übereinstimmen oder nicht, liegt der reelle Punkt von $\Pi\Pi'$ innerhalb oder ausserhalb k auf RR' .

11. Wenn Π' sich mit Π vereinigt, so wird $\Pi\Pi'$ die Tangente in Π mit Uebertragung der „reellen“ Definition; $\Pi_1\Pi'_1$ wird ebenso die in Π_1 . Es fallen dann auch p, p' ; P, P' ; R, R' zusammen: die Linie $u = PP'$ wird unbestimmt jede Linie durch P . Aber auf jeder dieser Geraden sind die Punkte P und R , die sich mit ihren zugeordneten Punkten vereinigt haben, die Ordnungspunkte der Involution: P ist fest, R kann jeder beliebige Punkt von $p = \Pi\Pi_1$ sein; wir erhalten in der Involution eben nicht anders als die bekannte harmonische Eigenschaft von Pol und Polare; aber andererseits doch das Resultat, dass der reelle Punkt der Tangenten $\Pi\Pi'$, $\Pi_1\Pi'_1$ in den imaginären Schnittpunkten Π , Π_1 einer Geraden p mit k der Pol von p ist. Die beiden andern Geraden $\Pi\Pi'_1$ und $\Pi_1\Pi'$ sind ganz reell geworden: daher die Unbestimmtheit des andern Ordnungspunktes.

Mit andern Worten: die Verbindungslinie eines Punktes innerhalb eines Kegelschnitts mit einem der Schnittpunkte seiner Polare schneidet den Kegelschnitt in zwei vereinigten imaginären Punkten; so dass die Ausziehung der Quadratwurzel aus negativen Würfeln durch dasselbe Verfahren geschieht, wie die aus positiven.

In der That: wird die Involution auf k , deren Centrum P ist, aus P selbst auf k projecirt (Nr. 10.), so reproducirt sie sich so wie auch der ihr beigelegte Sinn.

12. Es seien $ABCD\Delta$ und $ABCD\Delta'$ zwei nicht neutrale Würfe auf dem Kegelschnitte k und es wird vorausgesetzt, dass die geraden Träger d und d' von Δ und Δ' beide durch den Pol G von AC gehen; das Product $ABCD\Delta \cdot ABCD\Delta'$ ist dann neutral. Denn man hat $\Delta\Delta'$ mit AC zu durchschneiden und den Schnittpunkt aus B auf k zu projeciren. Nun liegt aber der reelle Punkt von $\Delta\Delta'$ auf der Polare von $G = dd'$, also auf AC , mithin ist der genannte Schnittpunkt M und seine Projection reell.

M ist einer der beiden Ordnungspunkte der Involution, welche durch A, C und die Schnittpunkte der Geraden AC mit d und d' bestimmt wird; welcher, hängt vom Sinne von Δ und Δ' ab. Vertauscht einer der beiden Punkte Δ, Δ' (oder die ihn darstellende Involution) den Sinn, so tritt an Stelle von M der andere Ordnungspunkt. Es

ist leicht einzusehen, dass die Projectionen der beiden Ordnungspunkte aus B auf k mit G in gerader Linie liegen; was beweist, dass das Product, wenn der eine Factor mit seinem conjungirten vertauscht wird, nur sein Zeichen wechselt.

13. Auch der Quotient $ABCA : ABCA' \text{ ist neutral.}$ Wenn $ABCA'' = ABCB : ABCA' = 1 : ABCA'$, so ist $ABCA : ABCA' = ABCA \cdot ABCA''$; also ist nachzuweisen, dass der gerade Träger d'' von Δ'' durch G geht. Da das Product $ABCA' \cdot ABCA''$ der neutrale Wurf $ABCB$ ist, so muss der Schnittpunkt der Tangente BB mit AC , also der Pol von BG , der reelle Punkt von $\Delta' \Delta''$ sein; der Schnittpunkt $d' d''$ muss seine Polare sowohl durch den Pol von d , als auch durch diesen reellen Punkt schicken, die beide auf AC liegen, also ist G dieser Schnittpunkt.

14. Interessanter aber scheint es, die *Division direct* auszuführen*). Man hat dann Δ aus B auf AC zu projectiren und den erhaltenen Punkt E aus Δ' auf den Kegelschnitt k (nach O); $ABCO$ ist $ABCA : ABCA'$. Es ist dann nachzuweisen, dass diese letzte Projection einen *reellen* Punkt liefert, oder dass es auf k einen reellen Punkt giebt, aus dem die geraden Involutionen auf AC und d' , welche E und Δ' darstellen, durch dieselbe Involution projectirt werden, oder, da die gerade und die krumme Involution, welche Δ' darstellen, aus jedem Punkte von k perspectiv sind, dass es auf k einen reellen Punkt giebt, aus dem gleichzeitig die gerade Involution auf AC , welche E darstellt, und die krumme auf k , welche Δ' darstellt, durch dieselbe Strahleninvolution projectirt werden.

Da die beiden geraden Träger d und d' durch G gehen, so liegen die Centren D und D' der krummen Involutionen, welche Δ und Δ' darstellen, auf AC (Fig. 4); jede dieser beiden Involutionen hat also AC zu einem Paare; und ebenso gehört das Paar AC zur geraden Involution (E), welche E darstellt. Sei KL irgend ein zweites Paar dieser Involution und projectiren wir diese beiden Punkte aus einem beweglichen Punkte O von k auf diesen Kegelschnitt nach U, V , so beschreiben U und V projective (nicht involutorische) Punktreihen auf k , von denen A und C die vereinigten Elemente sind. Die Geraden UV umhüllen also einen Kegelschnitt s , welcher k in A und C tangirt; weil seine Tangenten k durchschneiden, so berührt entweder s den k von innen, oder beide berühren sich von aussen. Da nun aber die Involution AC, KL einen imaginären Punkt E darstellt, so trennen sich diese beiden Paare; woraus dann hervorgeht, dass jede

*) Aus der Definition des Products folgt die des Quotienten: $ABCD_1 : ABCD_2 = ABCO$, wenn AC, D_1B, D_2O in Involution sind.

zwei Paare UV sich ein- und ausschliessen und der Schnittpunkt je zweier Linien UV , also auch je zweier consecutiver ausserhalb k liegt; folglich berühren sich k und s von aussen. Demnach gehen vom Centrum D' der krummen Involution (Δ') , das innerhalb k liegt, zwei reelle Tangenten an s . Sind U_1, V_1 die (reellen) Schnittpunkte der einen dieser Tangenten mit k , so sind dieselben einerseits zwei Punkte U, V , also K, L ihre Projectionen aus einem gewissen reellen Punkte O_1 von k ; andererseits gehören U_1, V_1 auch zur Involution (Δ') ; also die beiden Paare AC, U_1V_1 von (Δ') und die beiden Paare AC, KL von (E) liegen perspectiv aus dem Centrum O_1 ; mithin die ganzen Involutionen. Die andere Tangente führe zu U_2, V_2, O_2 .

Legen wir jetzt den Involutionen ihren Sinn bei, so wird nur der eine oder der andere der Punkte O_1, O_2 genügen, d. h. nur einer der beiden neutralen Würfe $ABCO_1, ABCO_2$ ist der Quotient; und wenn der Sinn der einen Involution geändert wird, der andere. Dass die beiden Punkte O_1, O_2 mit G in gerader Linie liegen, also die eben genannten Würfe zur Summe 0 haben, „entgegengesetzte“ sind, ergibt sich leicht.

Die beiden Dreiecke $U_1V_1O_1$ und $U_2V_2O_2$ liegen nämlich homologisch (perspectiv), indem ihre entsprechenden Seiten sich in den Punkten D', K, L von AC schneiden; also gehen O_1O_2, U_1U_2, V_1V_2 durch denselben Punkt, von dem bald zu erkennen ist, dass er zu jedem der 3 Punkte D', K, L bezüglich k conjugirt, mithin der Pol G von AC ist.

15. Also jeder beliebige nicht neutrale Wurf $ABC\Delta$, für den der gerade Träger d von Δ durch G geht, lässt sich darstellen als Product eines neutralen Wurfs in einen gegebenen festen Wurf $ABC\Delta_0$ von derselben Art wie $ABC\Delta$; ersetzt man Δ oder Δ_0 durch den conjugirten Punkt, so tritt an Stelle des neutralen Wurfs sein entgegengesetzter.

16. Es sei jetzt $ABC\Phi$ ein beliebiger nicht neutraler Wurf, bei dem der gerade Träger f von Φ nicht durch G geht. F sei der Pol von f ; wir projeciren ihn aus C auf k nach Q und diesen aus G auf k nach R , so dass $ABCQ + ABCR = 0$ ist. Um $ABCR$ und $ABC\Phi$ zu addiren, projeciren wir Φ aus R auf die Tangente CG nach Σ , d. h. die gerade Involution auf f und zugleich die krumme auf k , welche Φ darstellen, in die den Σ darstellende gerade Involution auf CG ; da CQ ein Paar der krummen Involution (Φ) ist, so ist CG ein Paar der geraden Involution (Σ) . Nun ist noch Σ aus A auf k nach Δ , d. h. die gerade Involution (Σ) in die krumme Involution (Δ) zu projeciren: aus dem Paare CG ergibt sich das Paar CA ; das Centrum D von (Δ) liegt mithin auf AC , folglich geht der gerade Träger d von Δ durch G . Wir haben demnach erhalten:

$$\begin{aligned} ABCR + ABC\Phi &= ABC\Delta, \\ 0 &= ABCR + ABCQ, \\ \hline ABC\Phi &= ABCQ + ABC\Delta. \end{aligned}$$

Also jeder beliebige Wurf lässt sich darstellen als die Summe eines neutralen und eines nicht neutralen von der Art $ABC\Delta$, bei welchem der gerade Träger d von Δ durch G geht.

Ist mithin δ_0 ein gegebener nicht neutraler Wurf von der Art von Nr. 15., α ein beliebiger Wurf, so ist jederzeit

$$\alpha = a + b\delta_0,$$

wo a und b neutral sind, und nur auf eine Weise; wenn a oder δ_0 mit dem conjungirten Wurfe vertauscht wird, so ist b durch den entgegengesetzten Wurf zu ersetzen.

Unter den Würfeln von der Art δ_0 werden die beiden conjungirten ι und ι_1 ausgezeichnet, bei denen der Träger der vierten Elemente die Polare des Punktes $H = (AC, BG)$ ist; wenn B' der zweite Schnittpunkt von BG mit k ist, so dass $ABCB' + ABCB = 0$, also $ABCB' = -1$, so ist $\iota^2 = \iota_1^2 = -1$. Jeder Wurf α lässt sich also auch in der Form $a + b\iota = a - b\iota_1$, sein conjungirter in der Form $a - b\iota = a + b\iota_1$ darstellen*).

17. Sind α und β nicht neutrale Würfe von beliebiger Art, so ist

$$\begin{aligned} \beta &= c + d\delta_0, \\ \alpha &= a + b\delta_0, \end{aligned}$$

also durch Elimination von δ_0

$$\alpha = e + f\beta;$$

folglich kann die obige Beschränkung wegfallen.

Ist demnach β ein beliebiger nicht neutraler, α ein beliebiger Wurf, so lässt sich jederzeit und nur auf eine Weise α in der Form

$$\alpha = a + b\beta$$

darstellen, wo a und b neutral sind**).

Ist α neutral, so ist $b = 0$.

18. Repräsentirt man zwei conjungirte imaginäre Punkte Δ und Δ_1 von k durch das Centrum D der sie darstellenden krummen Involution, so sind die sämmtlichen imaginären Punkte von k , also alle Würfe, mithin auch, da ja jedem Wurf eine complexe Zahl entspricht, alle complexen Zahlen und die mit ihnen erfüllte Gauss'sche Ebene Γ abgebildet in das doppelte Innere des Kegelschnitts k : also

*) Lüroth Nr. 74.

**) v. Staudt's Beitr. Nr. 277.

eine zweiblättrige Fläche, deren Uebergangscurve k ist. Die beiden Blätter sind den Halbebenen von Γ , die durch die reelle Axe entstehen, zugeordnet. Jeder Parallelen zur lateralen Axe entspricht ein Strahl aus C auf dem einen Blatte bis k und dann auf dem andern Blatte zurück; der lateralen Axe selbst entspricht CAC . Jeder Parallelen zur reellen Axe entspricht ein Kegelschnitt, der den k in C vierpunktig berührt und ganz auf dem einen Blatte liegt; derselbe Kegelschnitt, aber zum andern Blatte gerechnet, correspondirt der äquidistanten Parallelen; der reellen Axe selbst entspricht die Randcurve k . Einer beliebigen Geraden von Γ correspondirt ein Kegelschnitt, der k einmal in C und ein anderes Mal in einem andern variablen Punkte X berührt und dessen beide Bogen CX zu verschiedenen Blättern gehören. Derselbe Kegelschnitt, dessen Bogen aber nun je zu dem andern Blatte als vorher gerechnet werden, entspricht derjenigen Geraden, die zu g bezüglich der reellen Axe symmetrisch ist. Dem Unendlichen correspondirt der Punkt C (als unendlich kleiner Kegelschnitt) mit allen seinen Fortschreitungsrichtungen nach dem Innern von k .

19. Fasst man k als den Umriss der Projection einer nicht geradlinigen Fläche 2. Grades F^2 auf, d. i. als Projection der Berührungscurve $\mathfrak{k}$ des vom Projectionscentrum O an F^2 gelegten Kegels; dann ist jeder innere Punkt von k die Projection zweier verschiedener Punkte von F^2 , die den beiden durch $\mathfrak{k}$ gebildeten Theilen angehören. Jedem imaginären Punkte von k entspricht dann ein reeller Punkt auf F^2 (und umgekehrt), der auf dem einen oder andern Theile dieser Fläche liegt, je nachdem die krumme Involution den einen oder andern Sinn hat. Die reellen Punkte sind in die Curve $\mathfrak{k}$ abgebildet. Nehmen wir wieder die Gauss'sche Ebene als Träger der complexen Zahlen, die den Würfeln entsprechen, welche von den drei festen Punkten A, B, C auf k mit allen übrigen (reellen und imaginären) gebildet werden, mit hinzu, so entspricht, wenn $\mathfrak{C}$ der Punkt von $\mathfrak{k}$ ist, der sich nach C projicirt, jeder Geraden von Γ ein durch $\mathfrak{C}$ gehender Kegelschnitt auf F^2 , den Strahlen eines Büschels Kegelschnitte, die noch den dem Scheitel correspondirenden Punkt gemein haben; entfernt sich der Scheitel ins Unendliche, so nähert sich dieser Punkt dem $\mathfrak{C}$; die Kegelschnitte, welche die Bilder von parallelen Geraden sind, haben eine gemeinsame Tangente in $\mathfrak{C}$, z. B. die, welche den Parallelen zur reellen Axe entsprechen, die Tangente an $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{C}$, während die Bilder der Parallelen zur lateralen Axe $\mathfrak{C}O$ berühren.

20. Den Schluss dieses Aufsatzes mag eine rein geometrische Entwicklung der Gleichung einer Ebene (oder eines Punktes) in Wurfcoordinaten bilden. Der Gang ist im Wesentlichen, besonders am Anfange,

derselbe wie in Salmon-Fiedler's Analyt. Geometrie des Raums 2. Aufl. 1. Thl. Art. 38, oder in Fiedler's darstellender Geometrie (1. Aufl.) Art. 138 und 139 (vergl. auch Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich Bd. XV, S. 152), deren Figur ich auch zu benutzen bitte (weshalb nun mit griechischen Buchstaben nicht mehr imaginäre Gebilde bezeichnet werden).

Da in den genannten Werken mit Doppelverhältnissen, hier mit Würfeln operirt wird, so ist die Schreibweise verschieden: der Wurf $ABCD$ entspricht dem Doppelverhältniss $(ACDB) = \frac{AD}{CD} : \frac{AB}{CB}$.

21. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken des Fundamentaltetraeders für räumliche Coordinaten, E der Einheitspunkt, E_i seine Projection aus der Ecke A_i auf die Gegenebene, E_{ik} seine Projection auf die Kante $a_{ik} = A_i A_k$ aus der Gegenkante; in gleicher Weise mögen aus dem beliebigen Punkte P die Projectionen P_i und P_{ik} sich ergeben.

Das Product der drei Würfe $A_i P_{ik} A_k E_{ik}, A_k P_{ki} A_i E_{ki}, A_i P_{li} A_l E_{li}$, welche auf den drei Seiten des Dreiecks $A_i A_k A_l$ liegen (Fig. 5.), ist gleich 1, wie aus Herrn Lüroth's Abh. Nr. 81 hervorgeht, da die E_{ik}, P_{ik} etc. die Projectionen von E_j, P_j aus den Ecken dieses Dreiecks auf die Gegenseiten sind.

Man kann in Folge dessen

$$a_{ji} (A_k E A_i P) = A_k E_{ik} A_i P_{ik} = A_i P_{ik} A_k E_{ik} = \frac{x_i}{x_k}$$

setzen. Diese 4 Würfe x_1, x_2, x_3, x_4 , von denen einer beliebig ist, sind dann die homogenen Coordinatenwürfe des Punktes P in Bezug auf das Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ und den Einheitspunkt E ; über ihre geometrische Darstellung sehe man die eben angeführte Stelle von Lüroth.

Es seien ferner E, Π die Einheitsebene und eine beliebige Ebene, E_{ik}, Π_{ik} ihre Schnitte mit a_{ik} , so führen die dualen Betrachtungen dazu, dass man

$$A_i E_{ik} A_k \Pi_{ik} = \frac{\xi_i}{\xi_k}$$

setzen kann, und $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die homogenen Coordinatenwürfe der Ebene Π bezüglich desselben Tetraeders und der Einheitsebene E sind.

22. Die Schnittlinie von E mit der Ebene $A_j = A_i A_k A_l$ sei e_j (Fig. 6.) und der Schnittpunkt von e_j (oder E) mit der Geraden $A_i E_j E_{ik}$ sei E_{ij}^x , so ist

$$A_i E_{ik} A_k E_{ik} = E_{il} E_{ij}^x E_{ki} E_{ik},$$

wie sich durch Projection aus A_l auf e_j ergibt. Mithin ist das Product

$$\begin{aligned} & A_i E_{ik} A_k E_{ik} \cdot A_k E_{kl} A_l E_{kl} \cdot A_l E_{li} A_i E_{li} \\ &= E_{il} E_{ij}^x E_{ki} E_{ik} \cdot E_{ki} E_{ij}^x E_{li} E_{kl} \cdot E_{lk} E_{kj}^x E_{il} E_{li}. \end{aligned}$$

Die 3 Würfe rechts werden aber nur von 6 Punkten gebildet, welche als Schnittpunkte der e_j mit den Seiten des vollständigen Vierecks $A_i A_k A_l E_j$ drei involutorische Paare bilden: $E_{ik} E_{lj}^x$, $E_{kl} E_{ij}^x$, $E_{li} E_{kj}^x$. Also ist dieses Product gleich -1 nach Nr. 7. Folglich kann man setzen:

$$A_i E_{ik} A_k E_{ik} = - \frac{\lambda_i}{\lambda_k}.$$

Sei E'_{ik} von E_{ik} durch $A_i A_k$ harmonisch getrennt, so dass $A_i E_{ik} A_k E'_{ik} = A_k E_{ik} A_i E'_{ik} = A_i E'_{ik} A_k E_{ik} = -1$, so gilt, wenn die durch E'_{14} , E'_{24} , E'_{34} gelegte Ebene E' die a_{12} in E''_{12} trifft, nach dem eben Bewiesenen die Wurfgleichung:

$$A_1 E_{12} A_2 E''_{12} \cdot A_2 E_{24} A_4 E'_{24} \cdot A_4 E_{41} A_1 E'_{41} = -1;$$

folglich ist der erste Factor links allein schon gleich -1 und E''_{12} identisch mit E'_{12} ; die Ebene E' geht demnach durch alle sechs Punkte E'_{ik} , welche den E_{ik} bezüglich der Tetraëderecken harmonisch zugeordnet sind, so dass auf diese Weise die Existenz der Harmonicalebene des Punktes E in Bezug auf das Tetraëder gezeigt ist.

Wenn nun ε'_i die Coordinatenwürfe der Ebene E bezüglich des Tetraëders $A_1 A_2 A_3 A_4$ und der Harmonicalebene E' von E als Einheitsebene sind, so ist wegen Nr. 21.

$$\frac{\varepsilon'_i}{\varepsilon_k} = A_i E'_{ik} A_k E_{ik} = A_i E'_{ik} A_k E_{ik} \cdot A_i E_{ik} A_k E_{ik}$$

nach v. Staudt's Definition des Products, also

$$\frac{\varepsilon'_i}{\varepsilon_k} = -1 \times - \frac{\lambda_i}{\lambda_k} = \frac{\lambda_i}{\lambda_k},$$

mithin

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = \varepsilon'_1 : \varepsilon'_2 : \varepsilon'_3 : \varepsilon'_4.$$

Ist mithin E' die Harmonicalebene von E und E' der harmonische Punkt von E bezüglich des Tetraëders $A_1 A_2 A_3 A_4$, so sind die oben erhaltenen Würfe λ_i den Coordinaten der gegebenen Einheitsebene E in Bezug auf jenes Tetraëder und auf E' als Einheitsebene oder, wie leicht einzusehen, den Coordinaten des gegebenen Einheitspunktes E in Bezug auf $A_1 A_2 A_3 A_4$ und E' als Einheitspunkt proportional.

Die Coordinaten von $E(E)$ bezüglich $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $E(E)$ sind einander gleich, weil $A_i E_{ik} A_k E_{ik} = 1$; ist also E die Harmonicalebene von E , so sind die 4 Würfe λ_i einander gleich.

23. Bilden wir nun das Product der drei Würfe $-\frac{\lambda_i}{\lambda_k}, \frac{x_i}{x_k}, \frac{\xi_i}{\xi_k}$;

$$-\frac{\lambda_i x_i \xi_i}{\lambda_k x_k \xi_k} = A_i P_{ik} A_k E_{ik} \cdot A_i E_{ik} A_k E_{ik} \cdot A_i E_{ik} A_k \Pi_{ik} = A_i P_{ik} A_k \Pi_{ik}.$$

Mithin ist:

$$-\frac{\lambda_1 x_1 \xi_1 + \lambda_2 x_2 \xi_2 + \lambda_3 x_3 \xi_3}{\lambda_4 x_1 \xi_4} = A_1 P_{14} A_4 \Pi_{14} + A_2 P_{24} A_4 \Pi_{24} + A_3 P_{34} A_4 \Pi_{34}.$$

Den Beweis, dass diese Summe von drei Würfeln gleich 1 ist, wenn P in Π liegt, will ich auf andere Weise führen, als es in den genannten Werken geschehen ist, wo durch Projection ins Unendliche die Doppelverhältnisse vereinfacht werden.

Es seien die Geraden p_j und die auf ihnen befindlichen Punkte P_{ij}^x aus P und Π ebenso abgeleitet wie e_j und E_{ij}^x aus E und $\mathbf{E}$ (Auf. Nr. 22.). Die drei Würfe lassen sich unter der genannten Voraussetzung, dass P in Π liegt, so auf p_4 projiciren, dass sich drei Würfe ergeben, die aus sechs involutorisch gepaarten Punkten gebildet sind, so dass der Satz in Nr. 6. anzuwenden ist.

Der erste Wurf $A_1 P_{14} A_4 \Pi_{14}$ wird aus der Geraden PA_2 auf p_4 projicirt, wodurch sich $\Pi_{12} \Pi_{23} P_{24}^x P_{14}^x$ ergibt. Dass $\Pi_{12} = p_4 a_{12}$ die Projection von A_1 aus PA_2 ist, bedarf keines Beweises. Ferner $A_2 P_3$ und $A_3 P_2$ gehen beide durch P_{14} ; also liegen in der Ebene $A_2 A_3 P_{14}$ auch $P_2, P_3, A_2 P_2, A_3 P_3$ und deren Schnittpunkt P , d. h. die Ebene $P_{14} A_2 P$ geht durch $A_2 A_3 = a_{23}$ und trifft p_4 in $p_4 a_{23} = \Pi_{23}$. Drittens, da $A_4 P$ durch P_4 geht, so geht die Ebene $A_4 A_2 P$ durch $P_4 A_2$, also durch P_{24}^x .

Endlich, weil P in Π liegt, so liegt auch $P\Pi_{14}$ in Π und trifft p_4 ; in der Ebene von $\Pi_{14} P$ und $A_1 P_1$, die sich in P treffen, liegen die Geraden $A_1 \Pi_{14} A_4, A_4 P P_4, A_1 P_4 P_{23}$, also enthält diese Ebene zugleich $\Pi_{14} P$ und $A_1 P_{23}$. Da letztere in A_4 liegt, so ist der Schnittpunkt P_{14}^x von $p_4 = \Pi A_4$ mit $A_1 P_{23}$ derjenige Punkt, wo p_4 von $P\Pi_{14}$ oder von der Ebene $A_2 P\Pi_{14}$ getroffen wird, d. h. P_{14}^x ist die Projection von Π_{14} aus $A_2 P$ auf p_4 . Folglich ist, wie oben behauptet,

$$A_1 P_{14} A_4 \Pi_{14} = \Pi_{12} \Pi_{23} P_{24}^x P_{14}^x.$$

Ebenso ergibt sich durch Projection des zweiten und dritten Wurfs unserer Summe bez. aus $A_3 P, A_1 P$ (die drei Projectionen hätten auch bez. aus $A_3 P, A_1 P, A_2 P$ geschehen können):

$$\begin{aligned} A_2 P_{24} A_4 \Pi_{24} &= \Pi_{23} \Pi_{13} P_{34}^x P_{24}^x, \\ A_3 P_{34} A_4 \Pi_{34} &= \Pi_{13} \Pi_{12} P_{14}^x P_{34}^x. \end{aligned}$$

Die drei rechten Würfe sind aber aus den Punktepaaren $\Pi_{12} P_{34}^x, \Pi_{23} P_{14}^x, \Pi_{13} P_{24}^x$ gebildet, welche, da sie aus dem Schnitte von p_4 mit den Seiten des Vierecks $A_1 A_2 A_3 P_4$ hervorgehen, involutorisch gepaart sind.

Folglich ist nach Nr. 6. ihre Summe und also auch die der drei linken Würfe gleich dem Wurf 1. *Man erhält als Beziehung zwischen*

den Wurfcoordinaten x_i eines Punktes P und den ξ_i einer Ebene Π , die jenen enthält,

$$-\frac{\lambda_1 x_1 \xi_1 + \lambda_2 x_2 \xi_2 + \lambda_3 x_3 \xi_3}{\lambda_4 x_4 \xi_4} = 1$$

oder

$$\lambda_1 x_1 \xi_1 + \lambda_2 x_2 \xi_2 + \lambda_3 x_3 \xi_3 + \lambda_4 x_4 \xi_4 = 0.$$

24. Herrn Fiedler, dem ich diesen Beweis schrieb, verdanke ich die Mittheilung zweier anderer Beweise für die Gleichheit der Wurfsumme mit 1, von denen der eine durch die Herren Padova und Sayno in ihrer italienischen Bearbeitung von Fiedler's darstellender Geometrie gegeben ist und zwar mit Doppelverhältnissen geführt ist, jedoch sich einfach in die Wurftheorie übertragen lässt, während der andere von Herrn Culmann herrührt und unmittelbar mit Würfen geführt ist, bis jetzt aber keine Veröffentlichung erfahren hat.

Die binnen kurzem erscheinende zweite Auflage von Herrn Fiedler's darstellender Geometrie wird beide Beweise bringen*).

Darmstadt, Anfang October 1875.

*) Mittlerweile ist dies Buch erschienen; der Beweis von Padova-Sayno steht im Text S. 549, der von Culmann in den Quellen- und Literaturnachweisungen S. 739. Nov. 1875.