DI UNA CERTA SUPERFICIE ALGEBRICA RAZIONALE.

Nota di **Alberto Brambilla**, a Napoli.

Adunanza del 26 agosto 1888.

1. In due Note pubblicate nei *Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* (*) io ho fatto conoscere diverse proprietà della superficie, il cui punto corrente ha le coordinate espresse come segue :

$$(1) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta_1'' : \theta_2'' : \theta_3'' : \theta_4'',$$

dove $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ sono quattro parametri legati fra loro dall' unica identità

$$(2) \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 0.$$

Riguardando le $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ come coordinate di punto in un piano Π , quella superficie Φ riesce rappresentata punto per punto sopra Π e le immagini delle sezioni piane sono le curve del sistema lineare ∞^3

$$(3) \quad \xi_1 \theta_1'' + \xi_2 \theta_2'' + \xi_3 \theta_3'' + \xi_4 \theta_4'' = 0.$$

(*) *Sopra una classe di superficie algebriche rappresentabili punto per punto sul piano* — Serie II^a, vol. XXI : Nota I^a, fasc. VII, Nota II^a, fasc. X-XI, 1888.

Le rette $\theta_r = 0$ di Π sono immagini di curve Γ_r razionali d'ordine n di Φ , lungo le quali la superficie stessa è toccata con un contatto d'ordine $n - 1$ dalle facce $x_r = 0$ del tetraedro T di riferimento (*tetraedro principale*). Indichiamo tali quattro rette di Π con t_r , ed il punto $t_r t_s$ con k_{rs} : allora si vede che ogni retta di Π , che passi per k_{rs} , è immagine di una curva razionale di ordine n , la quale ha un contatto n -punto collo spigolo T_{rs} ($x_r = x_s = 0$) del tetraedro principale in un punto K_{rs} , d'immagine k_{rs} , nel quale lo stesso spigolo ha simile contatto con Γ_r e con Γ_s . Tale curva è quindi piana ed il suo piano passa per T_{rs} . D'altronde questo piano sega Φ costantemente in n curve razionali d'ordine n (compresa quella considerata), che hanno un contatto n punto con T_{rs} in K_{rs} e le cui immagini sono altrettante rette di Π formanti un gruppo dell'involuzione di grado n intorno a k_{rs} definita dai due raggi n -pli t_r, t_s .

2. Evidentemente la superficie Φ è dell'ordine n^2 .

Essa possiede tre rette n -ple, che sono

$$D_1 = \overline{K_{23}} \overline{K_{14}}, \quad D_2 = \overline{K_{31}} \overline{K_{24}}, \quad D_3 = \overline{K_{12}} \overline{K_{34}},$$

ed hanno per immagini le diagonali

$$d_1 = \overline{k_{23}} \overline{k_{14}}, \quad d_2 = \overline{k_{31}} \overline{k_{24}}, \quad d_3 = \overline{k_{12}} \overline{k_{34}}$$

del quadrilatero $t \equiv (t_1 t_2 t_3 t_4)$. Tali rette n -ple concorrono in un punto O , quando n sia pari, e giacciono in un piano Ω , quando n sia dispari. Nel primo caso il punto O è multiplo secondo 3 ($n - 1$) e nel secondo caso le tre rette n -ple formano un triangolo i cui vertici

$$O_1 = D_2 D_3, \quad O_2 = D_3 D_1, \quad O_3 = D_1 D_2$$

sono multipli secondo $2n - 1$ per la superficie Φ .

3. Sovra ciascuna retta n -pla sonvi ancora altri punti d'una molteplicità superiore ad n e di essi trattava in modo speciale la Nota II^a citata: ma i risultati ivi ottenuti, essendo esatti nel caso di n dispari,

vogliono essere modificati quando sia n numero pari. Esponiamo qui tale modificazione insieme a qualche altro fatto che ancora non avevamo enunciato.

4. La superficie Φ possiede, oltre le rette n -ple anzidette, delle curve doppie razionali d'ordine n , in parte gobbe ed in parte piane; queste ultime formano sei sistemi coordinati ai sei spigoli del tetraedro principale, in guisa che le curve di un sistema sono in piani passanti per lo spigolo coordinato. Indicheremo con V_{rs} una di queste curve coordinate allo spigolo T_{rs} : essa è rappresentata da due rette di Π aventi le equazioni della forma

$$(\varepsilon^\lambda - 1)\theta_r + (\varepsilon^\mu - 1)\theta_s = 0, \quad (\varepsilon^{-\lambda} - 1)\theta_r + (\varepsilon^{-\mu} - 1)\theta_s = 0$$

rispettivamente, dove ε è una radice primitiva n^{ma} dell'unità, λ e μ sono due qualunque interi, che basta siano scelti nell'intervallo $1, 2, \dots, n-1$.

Si designeranno tali rette, fra loro *congiunte*, coi simboli $v_{rs}(\lambda, \mu)$, $v_{rs}(-\lambda, -\mu)$. Esse non sono che casi particolari delle rette

$$u(\lambda, \mu, \nu) \equiv (\varepsilon^\lambda - 1)\theta_1 + (\varepsilon^\mu - 1)\theta_2 + (\varepsilon^\nu - 1)\theta_3 = 0,$$

$$u(-\lambda, -\mu, -\nu) \equiv (\varepsilon^{-\lambda} - 1)\theta_1 + (\varepsilon^{-\mu} - 1)\theta_2 + (\varepsilon^{-\nu} - 1)\theta_3 = 0,$$

immagini esse pure di curve doppie di Φ , ma gobbe.

5. Due rette $v_{rs}(\lambda, -\lambda)$, $v_{rs}(-\lambda, \lambda)$, fra loro congiunte, godono in particolare della proprietà di segare le due rette d non passanti per k_{rs} in punti che sono *congiunti* del punto d'incontro delle medesime, cioè, che sono immagini dello stesso punto di Φ rappresentato da questo ultimo, il quale è o non è congiunto agli altri due vertici del trilatero $d_1 d_2 d_3$, secondo che n è pari o dispari (*).

6. Suppongasi n pari: allora, se qrs è una qualunque permutazione

(*) Così, sulla superficie Φ il punto di concorso delle tre rette n -ple, n pari, è $3(n-1)$ -plo; quello di concorso di due, per n dispari, è $(2n-1)$ -plo.

dei numeri 1, 2, 3 e se $v = \frac{n}{2}$, i due piani

$$\Theta_{rs} = x_r - x_s = 0, \quad \Theta_{q4} = x_q - x_4 = 0$$

secano ciascuno la superficie Φ nella retta n -pla D_q ed in una residua curva di ordine $n(n-1)$ rispettivamente. Quest'ultima si scinde necessariamente in tante curve d'ordine n , perchè ognuno di quei piani passa per uno spigolo del tetraedro principale, curve, che hanno per immagini altrettante rette del piano rappresentativo Π . Tali rette sono rispettivamente

$$(4) \quad \theta_r - \varepsilon^x \theta_s = 0, \quad \theta_q - \varepsilon^x \theta_4 = 0,$$

$$(x = 1, 2, 3, \dots, n)$$

compresa in ciascuno dei due tipi la retta d_q (per $\alpha = v$). Ma si trova di leggeri che le due ret.

$$\theta_r - \varepsilon^\beta \theta_s = 0, \quad \theta_r - \varepsilon^{-\beta} \theta_s = 0,$$

ad esempio, non sono altro che le congiunte $v_{rs}(-\beta, \beta)$, $v_{rs}(3, -3)$ immagini di una curva doppia piana di Φ , passante pel punto O di concorso delle rette n -ple, e precisamente intersezioni ciascuna di due falde appartenenti alle rette n -ple D_r , D_s . Al medesimo tipo (4) a sinistra appartiene la retta

$$g_{rs} = \theta_r - \theta_s = 0$$

(per $\alpha = n$), la quale non è congiunta ad alcuna altra ed è perciò immagine di una curva semplice di Φ . In modo analogo si ragionerebbe per le rette del tipo (4) a destra: con che si perviene alla seguente proposizione. *Nel caso di n pari il piano determinato da un qualunque spigolo del tetraedro principale colla retta n -pla ad esso appoggiata sega ulteriormente la superficie Φ in $\frac{n-2}{2}$ curve doppie ed in una curva sem-*

plice tutte razionali e d'ordine n . (*) Indicheremo queste speciali curve doppie piane col simbolo $[V_n]$ e la curva semplice, che loro s'accompagna, con G_n .

7. Ogni piano, che passi per la retta D_q , sega ulteriormente Φ in una curva d'ordine $n(n-1)$, la cui immagine è variabile in un fascio d'ordine $n-1$. I punti base di questo fascio sono $n-2$ sopra d_r , $n-2$ sopra d_s , oltre il punto $o_q = d_r d_s$, mentre gli altri $(n-2)^2$ formano la completa intersezione dei due tipi di rette v sotto (4). Tali punti sono necessariamente immagini di punti della retta D_q di molteplicità superiore ad n : essi coincidono coi punti, che nella Nota II^a citata indicammo colla lettera H e che credemmo fossero immagini di punti $(n+2)$ -pli, sulla quale affermazione qui ritorniamo

8. Vedemmo già nella Nota I^a che due rette v congiunte segano una coppia analoga opposta (dicendo *opposte fra loro* una retta v_r ed una v_{q4}) in una quaderna di punti congiunti. Nel caso attuale (n pari) si trova facilmente che i quattro punti H , centri dei fasci

$$(5) \quad \begin{aligned} &u(\lambda_1, \lambda_2 + \mu, \lambda_3 + \mu), & u(-\lambda_1, \mu' - \lambda_2, \mu' - \lambda_3), \\ &u(\lambda_1, \mu'' - \lambda_2, \mu'' - \lambda_3), & u(-\lambda_1, \lambda_2 + \mu''', \lambda_3 + \mu'''), \end{aligned}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono interi fissati e μ, μ', μ'', μ''' sono interi variabili nel campo $1, 2, \dots, n$, sono congiunti fra loro e ad un gruppo di n punti (*ennivla*) della retta d_1 , il quale è sezione comune di quei quattro fasci con questa retta.

D'altronde quei medesimi quattro punti formano la completa intersezione della coppia di rette

$$v_{23}(\lambda_2 - \lambda_3 + v, \lambda_3 - \lambda_2 - v), \quad v_{23}(\lambda_3 - \lambda_2 - v, \lambda_2 - \lambda_3 + v)$$

(*) Nel caso di n dispari ogni piano conjugato armonico di quello determinato da uno spigolo e dalla retta n -pla di Φ ad esso appoggiati rispetto alle facce del tetraedro principale passanti per quello spigolo, sega la superficie Φ secondo una curva semplice ed $\frac{n-1}{2}$ curve doppie razionali e d'ordine n .

colla coppia opposta $v_{14}(\lambda_1 - \nu, \nu - \lambda_1)$, $v_{14}(\nu - \lambda_1, \lambda_1 - \nu)$. che sono due coppie opposte qualunque di rette $v(\alpha, -\alpha)$ congiunte. Ciò prova anzitutto la precedente asserzione, che due rette v opposte del tipo $v(\alpha, -\alpha)$ si segano in un punto H , qualora non s' incontrino sopra una retta d . Dunque le $n - 2$ rette $v_{rs}(\alpha, -\alpha)$ segano le opposte $n - 2$ rette $v_{q4}(\alpha, -\alpha)$ in $(n - 2)^2 - 2(n - 2) = (n - 2)(n - 4)$ punti H_q distinti in $\frac{(n - 2)(n - 4)}{4}$ quaderne, ognuna delle quali è congiunta ad una ennupla sopra d_q . Per conseguenza sopra ogni retta n -pla di Φ esistono $\frac{(n - 2)(n - 4)}{4}$ punti $(n + 4)$ pli.

Sopra ogni curva doppia piana del tipo $[V_{rs}]$ esistono $\frac{n - 4}{2}$ punti $(n + 4)$ -pli di Φ siti sulla retta n -pla D_q , i quali sono doppi per la curva stessa: per ognuno di tali punti passa (pure con due rami) una curva $[V_{q4}]$ i cui punti doppi, $(n + 2)$ -pli per Φ sopra D_q , sono distribuiti uno ad uno sovra le $\frac{n - 4}{2}$ curve $[V_{rs}]$, le cui immagini non segano le immagini della $[V_{q4}]$ sopra d_r o d_s .

9. Non tutti i punti H_q sono peraltro intersezioni di due rette $v_{rs}(\alpha, -\alpha)$, $v_{q4}(\beta, -\beta)$. Ed invero, mentre due fasci (5) di una stessa orizzontale sono congiunti fra loro, epperò fra loro diversi, essi ponno coincidere coi due rimanenti: ciò accade quando sia $\lambda_q = \nu$, oppure $\lambda_r = \lambda_s + \nu$. Nel primo caso, i centri dei due fasci sono le tracce delle rette $v_{rs}(\lambda_r - \lambda_s + \nu, \lambda_s - \lambda_r - \nu)$, $v_{rs}(\lambda_s - \lambda_r - \nu, \lambda_r - \lambda_s + \nu)$ sopra la g_{q4} ; nel secondo, tali centri sono le tracce delle $v_{q4}(\lambda_q - \nu, \nu - \lambda_q)$, $v_{q4}(\nu - \lambda_q, \lambda_q - \nu)$ sopra la g_{rs} . In ciascuno dei due casi, i due centri sono congiunti ad una ennupla di punti sovra d_q ed a nessuno altro punto.

Ne segue che sopra ogni retta n -pla D_q di Φ esistono $\frac{n + 2}{2}$ punti $(n + 2)$ -pli della superficie, doppi per la curva G_{rs} e semplici uno ad uno per ciascuna curva $[V_{q4}]$; ed altri $\frac{n - 2}{2}$ punti $(n + 2)$ -pli di Φ , doppi per la curva G_{q4} e semplici uno ad uno per ciascuna curva $[V_{rs}]$.

10. Le due specie di punti H sono ancora caratterizzate da altra proprietà. Nella Nota II^a si è osservato come pel punto $H_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, centro del fascio $u_1(\lambda_1, \lambda_2 + \mu, \lambda_3 + \mu)$ passi la retta

$$u(2\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1),$$

che è manifestamente del tipo $u(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ e che unisce quindi un punto della retta d_2 ad uno della d_3 , congiunti, dei vertici del tri-latero $d_1 d_2 d_3$ (*). Ora si può notare che tali rette $u(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ sono in numero di $(n-2)(n-4)$, se si escludono da esse le rette $v_{23}(\alpha, -\alpha)$ e $v_{14}(\alpha, -\alpha)$: facilmente poi si verifica essere i punti H della prima specie dotati della proprietà di appartenere ciascuno *univocamente* ad una di queste rette u . Epperò, osservando che la congiunta della retta anzidetta passa per $H_1(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$ e che per i due punti H rimanenti, congiunti tali punti H , passano due rette $u(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ fra loro congiunte, si potrà concludere che *per un punto $(n+4)$ -plo di Φ passano due curve doppie gobbe, le quali hanno un punto doppio nel punto di concorso delle rette n -ple e sono intersezioni di falde, che appartengono alle due rette n -ple non contenenti quel punto $(n+4)$ plo.*

Ma per un punto H_q della seconda specie la curva u del tipo sopraindicato si riduce alla $v_{rs}(\alpha, -\alpha)$, se è $\lambda_q = v$, od alla g_{14} , se è $\lambda_3 = \lambda_2 + v$. I quali due casi sono diversi soltanto per la diversa notazione adottata ed essenzialmente si riducono alla scomparsa della retta $u_{qrs}(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ in parola (**), mentre le due rette $v(\alpha, -\alpha)$, g appartengono sempre a tal punto H_q . Per un punto $(n+2)$ -plo di Φ dobbiamo dunque dire solamente che non esistono curve doppie passanti per esso analoghe alle ultime indicate per un punto $(n+4)$ plo.

11. Finalmente non perdiamo di vista che per un punto $(n+4)$ -plo passano $2n$ curve doppie ulteriori, di cui 8 sono piane ed appartengono due a due ai piani, che dal punto $(n+4)$ -plo proiettano gli spi-

(*) Vedasi: Nota I^a, n.° 15.

(**) Sotto $u_{qrs}(\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ intendiamo la retta u per la quale si hanno $\lambda_q = \alpha + \beta$, $\lambda_r = \alpha$, $\lambda_s = \beta$.

goli del tetraedro principale, non appoggiati alla retta n -pla, che contiene tal punto; mentre per un punto $(n + 2)$ -plo passano ulteriormente soltanto n curve doppie, di cui 4 sono piane e situate una ad una nei piani analoghi ai precedenti. Il punto $(n + 4)$ -plo od $(n + 2)$ -plo è doppio per ognuna di queste nuove curve doppie.

Bergamo, Giugno 1888

A. BRAMBILLA.