Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen.

Von

A. VOSS in DRESDEN.

Wird das Längenelement auf einer Oberfläche durch die Formel:

$$(1) \quad ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

ausgedrückt, so bestehen bekanntlich beim Uebergange zu neuen Variablen u' , v' , durch welchen die Gleichung (1) in:

$$ds^2 = e' du'^2 + 2f' du' dv' + g' dv'^2$$

verwandelt wird, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} e &= e' \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \right)^2 + 2f' \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial u} + g' \left(\frac{\partial v'}{\partial u} \right)^2, \\ (2) \quad f &= e' \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} + f' \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u} \right) + g' \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v}, \\ g &= e' \left(\frac{\partial u'}{\partial v} \right)^2 + 2f' \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial v} + g' \left(\frac{\partial v'}{\partial v} \right)^2. \end{aligned}$$

Man hat sich bisher vorzugsweise mit solchen Coordinatensystemen u' , v' beschäftigt, für welche $f' = 0$ ausfällt, während entweder $e' = g'$ oder $e' = 1$ wird; jenes führt zu den Untersuchungen über conforme Abbildung, dieses zu denen über geodätische Linien. Aber es ist ersichtlich, dass man im Allgemeinen in den Gleichungen (2) irgend zwei Relationen zwischen den e' , f' , g' annehmen kann, um aus ihnen und den genannten Gleichungen die Transformationsrelationen zwischen u , v und u' , v' zu bestimmen. Insbesondere kann man also für e' und g' ein für allemal fest gewählte Functionen annehmen, und sich demgemäss das Längenelement jeder Fläche in der Form (1) vorstellen, in welcher nur der Coefficient f für die einzelne Fläche charakteristisch ist. Alsdann sind die Abmessungen in den beiden Richtungen der u und v für alle Flächen dieselben. Es wird dadurch ein Zusammenhang zwischen allen Flächen vermittelt, deren geometrischer Sinn sich folgendermassen darstellt. Man denke sich auf irgend einer Fläche ein System von Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ gezeichnet, und stelle

sich längs dieser dieselbe mit völlig biegsamen unausdehnssamen Fäden überdeckt vor, die an den Kreuzungsstellen unter sich verknüpft sind. Ein solches Netz kann — wenn auch nicht in seiner ganzen Ausdehnung, so doch theilweise — im Allgemeinen auf jeder anderen Fläche ausgebreitet werden; jede solche Ausbreitung liefert eine Einteilung der neuen Fläche in Elemente, deren Seiten $\sqrt{e} du$, $\sqrt{g} dv$ denen der entsprechenden Elemente in der ursprünglichen Fläche gleich sind. Wie man sieht, kommt dies darauf hinaus, *jede Oberfläche als Biegsdeformation einer bestimmten etwa der Ebene erscheinen zu lassen, mit welcher eine Dehnung von dem besondern Charakter verbunden ist, dass die Abmessungen nach zwei verschiedenen Richtungen ungeändert bleiben.*

Im Folgenden ist zunächst $e = g = 1$ vorausgesetzt. Die Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ mögen dann *äquidistante Curven* heissen; das Netz, welches auf der Fläche ausgebreitet ist, lässt sich stets in die Gestalt eines ebenen Netzes mit rechteckigen Maschen bringen, und es wird durch diese Operation die Abbildung eines beliebigen Flächen-theils auf ein ebenes Rechteck vermittelt. Die §§ 1.—2. beschäftigen sich zunächst mit den allgemeinen Eigenschaften dieser Netze auf beliebigen Flächen, insbesondere auf Flächen constanter Krümmung. Daran schliessen sich Betrachtungen über die Bestimmung solcher Netze. Dabei können von vornherein zwei Wege eingeschlagen werden. Sucht man nämlich Integrale der beiden simultanen partiellen Differentialgleichungen:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, Integrale des Systems:

$$\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}},$$

so erhält man offenbar Flächen, auf denen ein Curvensystem der gewünschten Art bekannt ist. Zu diesen gehören alle Flächen, welche durch Translation einer beliebigen Curve längs einer anderen Curve entstehen, deren Gleichungen von der Form:

$$x = f_1 u + \varphi_1 v,$$

$$y = f_2 u + \varphi_2 v,$$

$$z = f_3 u + \varphi_3 v$$

sind. Solche Flächen sind im Folgenden als *Translationsflächen* bezeichnet.

Auf eine eigentliche Integration der eben genannten Differentialgleichungen bin ich nicht weiter eingegangen, da in den Fällen, wo dieselbe sich leicht auf Quadraturen zurückführen lässt, man meistens zu solchen Flächen gelangt, auf denen es nicht schwer ist, a priori äquidistante Curven anzugeben. Man kann sich überhaupt zweitens die Aufgabe stellen, auf einer *gegebenen* Fläche Netze der gewünschten Art zu bestimmen. Bei der allgemeinsten Lösung dieser Frage kann ersichtlich eine der Curven u und eine der Curven v willkürlich angenommen werden. Demgemäss kommt die Aufgabe auf die Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung hinaus, von welchen für die Gauss'schen Biegungsflächen der Rotationsflächen leicht particuläre Integrale angegeben werden können.

Aus der grossen Zahl von Untersuchungen, welche nach dieser Richtung hin angestellt werden könnten, habe ich auch hier nur ganz einzelne Fälle anführen zu sollen geglaubt, da eine speciellere Verfolgung der in Rede stehenden Abbildungen sich zu weit von meinem Zwecke entfernt hätte, einige neue, meines Wissens bisher nicht aufgeworfene Gesichtspunkte, welche für die Flächentheorie von Interesse scheinen, zu erörtern. Aus demselben Grunde habe ich auch davon abgesehen, irgend eine der Abbildungen genauer zu beschreiben.

§ 1.

Allgemeine Eigenschaften äquidistanter Curvensysteme.

Schreibt man das Längenelement

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + dv^2 + 2f du dv$$

in der Form:

$$2ds^2 = (du + dv)^2 (1 + f) + (du - dv)^2 (1 - f),$$

so ergibt sich der auch geometrisch unmittelbar evidente Satz:

Die Curven $u + v = \text{const.}$, $u - v = \text{const.}$, d. h. die Diagonalcurven, welche die Knotenpunkte des Netzes verbinden, bilden ein Orthogonalsystem auf der Fläche.

Ist f eine Function von $(u + v)$, so sind die Curven $u - v$ geodätische Linien auf der Fläche. Dies ist der Fall bei den Biegungsflächen von Rotationsflächen.

Es seien ferner p, q, r die Richtungscosinus der Normale des Flächenelementes $dw = \sqrt{eg - f^2} du dv$, so ist:

$$p = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{1 - f^2}} \text{ u. s. w.,}$$

ferner sei:

$$\begin{aligned}
 E &= p \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + q \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + r \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \\
 F &= p \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + r \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \\
 G &= p \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + q \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + r \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
 \end{aligned}$$

Dann ist bekanntlich:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A \frac{\partial x}{\partial u} + A_1 \frac{\partial x}{\partial v} + Ep, \\
 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= B \frac{\partial x}{\partial u} + B_1 \frac{\partial x}{\partial v} + Fp, \\
 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= C \frac{\partial x}{\partial u} + C_1 \frac{\partial x}{\partial v} + Gp,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

und analoge Gleichungen gelten für y und z . Dabei hat man:

$$\begin{aligned}
 Ae + A_1 f &= \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial u}, \\
 Af + A_1 g &= \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial v}, \\
 Be + B_1 f &= \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial v}, \\
 Bf + B_1 g &= \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u}, \\
 Ce + C_1 f &= \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u}, \\
 Cf + C_1 g &= \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v},
 \end{aligned}$$

also im vorliegenden Falle, wo $e = g = 1$:

$$\begin{aligned}
 B &= B_1 = 0, \\
 A &= -\frac{f \frac{\partial f}{\partial u}}{1 - f^2}, \quad A_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{1 - f^2}, \\
 C &= -\frac{f \frac{\partial f}{\partial v}}{1 - f^2}, \quad C_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{1 - f^2}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Für das Krümmungsmass K , welches auch durch die Gleichung:

$$K = \frac{EG - F^2}{eg - f^2}$$

definiert ist, hat man:

$$K = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{f}{1 - f^2} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \frac{1}{1 - f^2},$$

oder, wenn $f = \cos z$ gesetzt wird, wo z den Winkel zwischen den Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ bedeutet:

$$-K \sin z = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

(5)

An diese Gleichung knüpft sich zunächst ein sehr einfacher Ausdruck für die *Curvatura integra* eines Flächenstückes $ABCD$, das von zwei Paaren von Curven $u_0, u_1; v_0, v_1$ begrenzt wird.

Die *Curvatura integra* Ω ist hier:

$$\Omega = \int K d\omega = - \int \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} du dv.$$

Integriert man in der Richtung der wachsenden Argumente u , so entsteht:

$$-\Omega = \int \left[\left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)_1 - \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)_0 \right] dv,$$

und weiter

$$-\Omega = z_{11} - z_{10} - (z_{01} - z_{00}).$$

Führt man an Stelle der Winkel z die inneren Winkel des Vierecks ein, so entsteht:

$$-\Omega = A + B + C + D - 2\pi.$$

Die *Curvatura integra* eines von zwei Paaren äquidistanter Curven gebildeten Vierecks ist gleich dem negativen Excess desselben. Man kann diesen Satz ausdehnen auf eine Figur mit beliebig viel Ecken, deren Seiten von Theilen äquidistanter Curven gebildet sind. Auf Flächen mit positivem Krümmungsmasse ist daher der Excess immer negativ, bei negativem Krümmungsmasse positiv. Dass auf den developpablen Flächen der Excess gleich Null sein muss, wird evident, wenn man dieselben in die Ebene abwickelt, wobei das Viereck in ein krummliniges Parallelogramm übergeht. Im Besondern wird auf Flächen constanter Krümmung der Excess dem Inhalte proportional. Wir haben hier also ein vollständiges Analogon zu dem bekannten Gauss'schen Satze über die *Curvatura* eines von geodätischen Linien begrenzten Flächenstückes, und mag bemerkt werden, dass es leicht ist, diesen Satz mit Hülfe der hier gewählten Form des Längenelementes zu beweisen.

Es legt das Vorige die Frage nahe, ob die eine Schaar der Curven, etwa die Curven $v = \text{const.}$, selbst geodätische Linien der Fläche sein können. Soll dies der Fall sein, so muss die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{vmatrix},$$

(es ist der Abkürzung halber nur die erste Verticalreihe hingeschrieben), verschwinden, welche ausdrückt, dass die Krümmungsebene der Curve die Flächennormale enthält.

Multipliziert man Δ mit

$$\Delta' = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \end{array} \right| = E\sqrt{1-f^2},$$

so ergibt sich leicht:

$$\Delta\Delta' = \Delta' \frac{\partial f}{\partial u},$$

mithin wird $\Delta = \frac{\partial f}{\partial u}$. Nach (4) kann daher nur bei developpablen Flächen eine der Curvenschaaren ein System geodätischer Linien bilden.

Von grösserem Interesse ist die Frage, ob es Flächen giebt, auf welchen die Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ zugleich Haupttangentialcurven sind. Bekanntlich sind die Letzteren gegeben durch die Differentialgleichung:

$$Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 = 0.$$

Sollen daher $du = 0$, $dv = 0$ selbst Haupttangentialcurven sein, so muss $E = 0$, $G = 0$ sein. Nun genügen aber E und G bekanntlich den beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} (6) \quad & 2(eg - f^2) \left(\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} \right) - (Eg - 2Ff + Ge) \frac{\partial e}{\partial v} \\ & + (Fg - Gf) \frac{\partial e}{\partial u} + 2(Ge - Ff) \frac{\partial f}{\partial u} \\ & + (Ef - Fe) \frac{\partial g}{\partial u} = 0, \\ & 2(eg - f^2) \left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} \right) - (Eg - 2Ff + Ge) \frac{\partial g}{\partial u} \\ & + (Gf - Fg) \frac{\partial e}{\partial v} + 2(Eg - Ff) \frac{\partial f}{\partial v} \\ & + (Fe - Ef) \frac{\partial g}{\partial v} = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man $e = g = 1$, $E = G = 0$, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{Ff \frac{\partial f}{\partial u}}{1-f^2} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{Ff \frac{\partial f}{\partial v}}{1-f^2} &= 0 \end{aligned}$$

und durch Integration:

$$F = \sqrt{1-f^2} \text{ const.},$$

mithin wird:

$$K = -\frac{F^2}{1-f^2} = -(\text{const.})^2.$$

Damit ist bewiesen, dass nur auf den Flächen constanter negativer Krümmung ein System äquidistanter Curven aus den Haupttangentialcurven gebildet werden kann. *) Aber es lässt sich auch umgekehrt zeigen, dass auf jeder Fläche mit constanter negativer Krümmung die Haupttangentialcurven wirklich ein solches System bilden. **)

Hat man nämlich ein Curvensystem bestimmt, für welches $E = 0$, $G = 0$ ist, während

$$F^2 = k(eg - f^2)$$

wird, so erhält man durch Einsetzen seiner Werthe in die beiden Differentialgleichungen (6) unter Berücksichtigung, dass:

$$2F \frac{\partial F}{\partial u} = k \left(e \frac{\partial g}{\partial u} + g \frac{\partial e}{\partial u} - 2f \frac{\partial f}{\partial u} \right),$$

$$2F \frac{\partial F}{\partial v} = k \left(e \frac{\partial g}{\partial v} + g \frac{\partial e}{\partial v} - 2f \frac{\partial f}{\partial v} \right),$$

die beiden Gleichungen:

$$f \frac{\partial e}{\partial v} - e \frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

$$f \frac{\partial g}{\partial u} - g \frac{\partial e}{\partial v} = 0,$$

aus welchen, da die Determinante $eg - f^2$ nicht verschwinden kann, folgt:

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

mithin sind e, g bezüglich unabhängig von v und u und können durch passende Wahl dieser Variabeln in 1 verwandelt werden, wie zu zeigen war.

Das Integral der Curvatura integra eines Flächenstückes, dessen Begrenzung nicht von Curven u, v gebildet wird, lässt sich im Allgemeinen nicht weiter ausführen. Indessen lassen sich ausser den geodätischen Linien noch gewisse Curvensysteme angeben, für welche das Integral einer übersichtlichen geometrischen Deutung fähig ist. Um hierzu zu gelangen, mag vorerst eine allgemeine Massbestimmung mit dem Längenelemente $edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ wieder auf der Fläche vorausgesetzt werden.

Es seien durch einen Punkt P die beiden Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ gezogen, deren Tangenten die Richtungscosinus

*) Die Ebene ist hier selbstverständlich nicht mit berücksichtigt.

**) Diese Eigenschaft der Haupttangentialcurven der Flächen constanter Krümmung ist, worauf ich erst nach Vollendung dieser Arbeit aufmerksam wurde, bereits von Herrn Hazzidakis (Journal von Borchardt, Bd. 88, p. 68) erwiesen. Zugleich findet sich dort die Bemerkung über den Inhalt eines von zwei Paaren solcher Curven begrenzten Vierecks.

$$\frac{1}{V_e} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{V_e} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{1}{V_e} \frac{\partial z}{\partial u}; \quad \frac{1}{V_g} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{V_g} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{1}{V_g} \frac{\partial z}{\partial v}$$

haben. Auf denselben seien zwei zu P unendlich benachbarte Punkte P_u, P_v angenommen, und durch dieselben die benachbarten Curven $u + du, v + dv$ gelegt, welche sich in P' schneiden. So entsteht ein elementares Viereck $PP_uP_vP_1$, dessen Betrachtung für das Folgende erforderlich ist.

Es seien nun die unendlich kleinen Winkel zwischen den Tangenten an die Curven $v = \text{const.}$ in den Punkten P_1 und P , respective in den Punkten P_u und P durch Θ'_{uv}, Θ'_v bezeichnet, analog die entsprechenden Grössen für die Curven $u = \text{const.}$ durch $\Theta''_{vu}, \Theta''_u$. Die Richtungscosinus der Tangente an die Curve v im Punkte P_1 sind

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{1}{V_e} + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dv \right) \frac{1}{V_e} - \frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial e}{\partial e^{\frac{1}{2}}} \text{ u. s. w.,}$$

mithin wird:

$$\begin{aligned} \Theta'_{uv}{}^2 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{de}{e} \right)^2 \\ &+ \frac{1}{e} \left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} dv \right)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{de}{e} \right)^2 + \frac{1}{e} \{ (Edu + Fdv)^2 + Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2 \}, \end{aligned}$$

wo:

$$L = \frac{1}{2} A \frac{\partial e}{\partial u} + A_1 \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial e}{\partial v} \right),$$

$$M = \frac{1}{2} \left(A \frac{\partial e}{\partial v} + A_1 \frac{\partial g}{\partial u} \right),$$

$$N = \frac{1}{2} \left(B \frac{\partial e}{\partial v} + B_1 \frac{\partial g}{\partial u} \right).$$

Hieraus ergibt sich für $du = 0$ der Werth von $\Theta'_{uv}{}^2$, dagegen für $dv = 0$ Θ'^2 , der Contingenzwinkel der Curve $v = \text{const.}$ im Punkte P . Für den Fall $e = g = 1$ wird also:

$$\begin{aligned} (7) \quad \Theta'_{uv}{}^2 &= (Edu + Fdv)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 du^2, \\ \Theta'_v &= Fdv, \\ \Theta'^2 &= \left\{ E^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right\} du^2, \end{aligned}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} (8) \quad \Theta''_{vu}{}^2 &= (Fdu + Gdv)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 dv^2, \\ \Theta''_u &= Fdu, \\ \Theta''^2 &= \left\{ G^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right\} dv^2. \end{aligned}$$

Hieraus entnehmen wir zunächst eine Eigenschaft der Haupttangentialcurven der Flächen constanter negativer Krümmung. Ist nämlich $E = 0$, $G = 0$, so wird:

$$\Theta' = \frac{\partial z}{\partial u} du,$$

$$\Theta'' = \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Bildet man nun das von zwei Paaren von Haupttangentialcurven begrenzte Viereck $ABCD$ dadurch auf die Einheitskugel ab, dass man Parallelen zu den Tangenten oder den Hauptnormalen der Begrenzungscurven zieht, so entstehen vier sphärische Curven ab, bc, cd, da , deren Bogenlängen durch dieselben Zeichen dargestellt sein mögen. Und bezeichnet man die jedesmalige Curvatura integra der Curven AB, BC, CD, DA durch:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4,$$

so ist

$$\omega_1 AB = ab, \quad \omega_2 BC = bc, \quad \omega_3 CD = cd, \quad \omega_4 DA = da,$$

oder, weil die Haupttangentialcurven äquidistante Curven sind:

$$\Omega = AB(\omega_1 - \omega_3) = BC(\omega_2 - \omega_4).$$

Das liefert den Satz:

Die Curvatura integra eines Vierecks auf einer Fläche constanter negativer Krümmung, welches von zwei Paaren von Haupttangentialcurven begrenzt wird, ist gleich einer der Seiten multiplicirt in die Differenz der totalen Krümmung dieser und der gegenüberliegenden Seite.

Wir bestimmen ferner die kürzeste Entfernung correspondirender Tangenten (d. h. solcher, die einen unendlich kleinen Winkel mit einander bilden) in den Punkten P und P_1 . Bekanntlich ist für zwei Gerade, deren Neigung und kürzester Abstand durch Θ, d bezeichnet werden, und deren Gleichungen in der Form:

$$x = \lambda \cos \alpha_1 + x_1, \quad x = \lambda \cos \alpha_2 + x_2,$$

$$y = \lambda \cos \beta_1 + y_1, \quad y = \lambda \cos \beta_2 + y_2,$$

$$z = \lambda \cos \gamma_1 + z_1, \quad z = \lambda \cos \gamma_2 + z_2$$

gegeben sind:

$$d \sin \Theta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \end{vmatrix}.$$

Setzt man:

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{V_e} \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{1}{V_e} + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dv \right) \frac{1}{V_e} + \frac{\partial x}{\partial u} d \frac{1}{V_e} + \dots,$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2 \right],$$

so erhält man, wenn die kürzesten Entfernungen durch d'_{uv} , d''_{vu} bezeichnet werden:

$$d'_{uv} \Theta'_{uv} = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{1}{V_e} \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} dv \right) \frac{1}{V_e} \end{array} \right|$$

$$= \sqrt{\frac{eg - f^2}{e}} dv (Edu + Fdv),$$

und ebenso:

$$d''_{vu} \Theta''_{vu} = \sqrt{\frac{eg - f^2}{g}} du (Fdu + Gdv).$$

Die Curven $Edu + Fdv = 0$, $Fdu + Gdv = 0$ sind daher die Berührungscurven der developpablen Flächen, deren Erzeugende die Tangenten der Curven u, v auf der Fläche sind.

Nimmt man jetzt wieder $e = g = 1$, so ist nach (7) und (8) für diese Curven:

$$\Theta'_{uv} = \frac{\partial z}{\partial u} du,$$

$$\Theta''_{vu} = \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man die Curvatura integra auch bestimmen für Flächenstücke, die von Curven dieser Art begrenzt sind, wie dies in den folgenden Beispielen angedeutet ist.

1) *Dreieck* ABC , begrenzt von zwei Curven $AB (u = u_0)$, $CB (v = v_0)$ und einer Curve AC . Ist AC eine Curve $Edu + Fdv = 0$, so integriert man nach v und erhält:

$$-\Omega = z_{11} - z_{01} - \int_{AC} \Theta'_{uv},$$

wo z_{11}, z_{01} die beiden Winkel bedeuten, welche von den Curven u, v in den Punkten B, C gebildet werden.

2) *Viereck* $ABCD$, begrenzt von zwei Curven $AB (u = u_0)$, $CD (u = u_1)$ und zwei Curven $Edu + Fdv = 0$. Man lege durch C, D zwei Curven $v = \text{const.}$, welche die Curve $u = u_0$ in A_1, B_1 schneiden, so wird:

$$-\Omega = z_{01} - z_{00} - \int_{AC} \Theta'_{uv} - (z_{11} - z_{01}) + \int_{B_1B} \Theta'_{uv}$$

— Curvatura von CA_1B_1D .

Da aber die negative Curvatura von CA_1B_1D gleich:

$$(z_{11} - z_{01}) - (z_{10} - z_{00}),$$

so wird:

$$-\Omega = \int_{DB} \Theta'_{uv} - \int_{AC} \Theta'_{uv}.$$

3) *Viereck* $ABCD$, begrenzt von zwei Curven $Edu + Fdv = 0$, AC und DB , sowie von zwei Curven $Fdu + Gdv = 0$, CD und AB . Man ziehe durch die Eckpunkte C und B zwei Curven $v = \text{const.}$, durch A und D zwei Curven $u = \text{const.}$, welche sich untereinander in den Punkten $abcd$ schneiden. Die Curvatura von $ABCD$ ist dann gleich der von $abcd$, vermehrt um die der vier Dreiecke AaC , DdB , CcD , AbB . Versteht man unter A , B , C , D die Winkel, welche die Curven u , v in den Eckpunkten des Vierecks $ABCD$ bilden, unter z_{11} , z_{10} , z_{01} , z_{00} die Winkel zwischen eben diesen Curven an den Punkten d , b , c , a , bezeichnet man ferner die Curvatura integra eines Flächenstückes durch eine eckige Klammer, so hat man:

$$\begin{aligned} -[AaC] &= C - z_{00} - \int_{AC} \Theta'_{uv}, \\ -[DdB] &= -(z_{11} - B) + \int_{BD} \Theta'_{uv}, \\ -[CcD] &= -(D - z_{01}) + \int_{CD} \Theta''_{vu}, \\ -[AbB] &= (z_{10} - A) - \int_{AB} \Theta''_{vu}, \\ -[abcd] &= z_{11} - z_{10} - (z_{01} - z_{00}), \\ -[ABCD] &= C + B - (D + A) \\ &+ \int_{BD} \Theta'_{uv} - \int_{AC} \Theta'_{uv} + \int_{CD} \Theta''_{vu} - \int_{AB} \Theta''_{vu}. \end{aligned}$$

also endlich:

§ 2.

Eigenschaften der Translationsflächen. Rotationsflächen, welche zugleich Translationsflächen sind.

Es ist bereits eingangs hervorgehoben, dass auf den Flächen, welche durch Translation einer Curve längs einer anderen Curve erzeugt werden, diese Curven ein System von äquidistanten bilden. Die im Paragraph 1. entwickelten Eigenschaften eines solchen Netzes sind daher insbesondere solche der Translationsflächen.

Herr Lie hat in seinen Untersuchungen über Minimalflächen (diese Annalen XIV, p. 332 ff.) eine Reihe anderer wichtiger Eigenschaften dieser Flächen bemerkt. Von diesen führe ich zunächst die folgende an:

Da für Translationsflächen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0,$$

so wird $F = 0$, mithin folgt für die Differentialgleichung der Haupttangentencurven

$$E du^2 + G dv^2 = 0.$$

Die Haupttangenten sind daher harmonisch zu den Tangenten der Curven u und v .*)

Fallen daher an einer Stelle die Tangenten der beiden Curven u und v zusammen, so ist ihre gemeinsame Richtung die einer Haupttangente der Fläche. Im Allgemeinen wird es nur eine endliche Zahl solcher Tangenten geben. Wenn aber für die beiden Curven u und v die Tangenten sich paarweise als parallel zuordnen lassen, so haben sie eine gemeinsame Curve Σ zur Umhüllungscurve,**) und diese ist, wie man hinzufügen kann, eine singuläre Haupttangentencurve der Fläche, welche durch blosse Elimination bestimmt werden kann. —

Es ist ferner das Krümmungsmass K der Fläche bestimmt durch die Gleichung:

$$EG = K \sin^2 z.$$

Bezeichnet man die Krümmungshalbmesser der Curven u und v in dem betreffenden Punkte durch ϱ_1 und ϱ_2 , ferner mit α_1 und α_2 die Winkel ihrer Hauptnormalen mit der Flächennormale, so hat man zufolge der Werthe von E und G :

$$\frac{\cos \alpha_1}{\varrho_1} \frac{\cos \alpha_2}{\varrho_2} = K \sin^2 z, \quad f = \cos z.$$

Nebenbei folgt, dass Translationsflächen immer zwei völlig getrennte parabolische Curven enthalten, welche durch die Gleichungen $E = 0$, $G = 0$ bestimmt sind.

Von Interesse scheint die Frage, ob eine Translationsfläche zugleich durch Rotation um eine Axe erzeugt werden könne. Diesen Charakter besitzt zunächst der Rotationscyliner, ferner das Rotationsparaboloid.

Letzteres erkennt man sofort, wenn man die Gleichung desselben in der Form:

$$2cz = u^2 + v^2,$$

$$x = u,$$

$$y = v$$

schreibt. Durch die folgende Betrachtung erkennt man eine weitere Classe von Flächen der genannten Eigenschaft.

Man denke sich eine Fläche S durch Rotation einer Curve c um

*) Vgl. die Beweise bei Lie a. a. O., p. 335.

**) Vgl. den Beweis bei Lie a. a. O., p. 356.

die z -Axe erzeugt. Man übe ferner auf die Curve zwei gleiche entgegengesetzte infinitesimale Translationen senkrecht zur z -Axe aus. Alsdann kann man die infinitesimale Rotation um die z -Axe ersetzen durch eine solche um eine zu ihr parallele Axe z' und eine Translation. Ferner stelle man sich in der z' -Axe zwei gleiche und entgegengesetzte Translationen vor. Dann kann man die infinitesimale Bewegung ersetzen durch eine Schraubenbewegung um die z' -Axe und eine geeignete Translation v . Wenn aber die Curve C eine gemeine Schraubenlinie ist, welche durch jene Schraubenbewegung in sich selbst übergeht, so folgt, dass die infinitesimale Rotation um die z -Axe zugleich als Translation v der Curve C aufgefasst werden kann, oder mit anderen Worten, dass die durch Rotation einer Schraubenlinie um eine zu ihrer Axe parallele Axe erzeugte Fläche zugleich durch Translation dieser Schraubenlinie längs einer Schraubenlinie entsteht.

Die Gleichungen einer solchen Fläche sind:

$$\begin{aligned}x &= a \sin u + b \sin v, \\y &= a \cos u + b \cos v, \\z &= k \operatorname{tg} \alpha (u - v).\end{aligned}$$

Um alle Flächen zu finden, die Rotations- und Translationsflächen sind, kann man folgenden Weg einschlagen.

In den Gleichungen einer Translationsfläche

$$\begin{aligned}z &= h(u) + g(v), \\x &= f(u) + \varphi(v), \\y &= \psi(u) + \chi(v)\end{aligned}$$

kann man zunächst $h(u)$ und $g(v)$ an Stelle der Variablen u, v selbst nehmen und hat demgemäss die Functionalgleichung:

$$F(u + v) = (f(u) + \varphi(v))^2 + (\psi(u) + \chi(v))^2,$$

welche zu lösen ist.

Setzt man $u + v = w$, so wird:

$$Fw = [f(u) + \varphi(w - u)]^2 + [\psi(u) + \chi(w - u)]^2.$$

Ferner hat man für $u = 0, v = 0$

$$\begin{aligned}Fu &= [f(u) + \varphi(0)]^2 + [\psi(u) + \chi(0)]^2, \\Fv &= [f(0) + \varphi(v)]^2 + [\psi(0) + \chi(v)]^2.\end{aligned}$$

Aus diesen Identitäten ergibt sich:

$$\begin{aligned}&F(v + u) - F(u) - F(v) + F(0) \\&= [\varphi(v) - \varphi(0)] [f(u) - f(0)] + [\chi(v) - \chi(0)] [\psi(u) - \psi(0)].\end{aligned}$$

Nimmt man an, dass $f(u)$ und $\chi(v)$ Constanten sind (man würde nur Cylinderflächen erhalten, wenn man $f(u)$ und $\psi(u)$ gleichzeitig con-

stant nähme), so ergibt sich aus der vorstehenden Gleichung durch Differentiation nach v

$$F'(v + u) - F'v = 0,$$

also für $v = 0$:

$$F'u = F'0;$$

d. h. F ist eine lineare Function. Diese Lösung der Functionalgleichung führt ersichtlich auf das Rotationsparaboloid.

Wenn dagegen die rechte Seite jener Gleichung nicht identisch verschwindet, so erhält man durch wiederholte Differentiation nach u (oder v) Gleichungen von der folgenden Form:

$$F''(u + v) - F''(u) = [\varphi(v) - \varphi(0)] f'(u) + [\chi(v) - \chi(0)] \psi'(u),$$

$$F'''(u + v) - F'''(u) = [\varphi(v) - \varphi(0)] f''(u) + [\chi(v) - \chi(0)] \psi''(u),$$

u. s. w.

Legt man daher u einen beliebigen constanten Werth bei, so ergibt sich durch Elimination von v eine Gleichung von der folgenden Form:

$$AF'' + BF' + CF + D = 0,$$

also eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten. Mithin ist F eine Summe von Exponentialfunctionen, und für die vier Functionen φ , ψ , f , χ , ergeben sich, wie man unmittelbar erkennt, ebenfalls lineare Ausdrücke von solchen. Da man, um reelle Ausdrücke zu erhalten, die Argumente der Exponentialfunctionen imaginär nehmen muss, so wird man ersichtlich auf die vorhin construirte Schraubenfläche geführt.

Die genannten Flächen sind daher die einzigen, denen die verlangte Eigenschaft zukommen kann.

Jede Translationsfläche besitzt bekanntlich zwei verschiedene Translationen in sich selbst. Die soeben betrachteten Flächen haben demgegenüber die Eigenschaft, unendlich viele verschiedene (allerdings congruente) Systeme von Translationscurven zu enthalten. Sie sind indessen nicht die einzigen dieser Eigenschaft. So z. B. lassen sich auf der Schraubenfläche:

$$z = au,$$

$$x = b\rho \cos u,$$

$$y = c\rho \sin u$$

unendlich viele Systeme unter sich verschiedener Translationscurven angeben. Man erkennt dies sofort, wenn man die Gleichungen der Fläche durch die Substitution:

$$\rho = k \cos v, \quad u + v = U, \quad u - v = V$$

in die Form:

$$\begin{aligned}2z &= a(U + V), \\2x &= bk(\cos U + \cos V), \\2y &= ck(\sin U + \sin V).\end{aligned}$$

bringt. Dabei wird jedesmal ein bestimmter durch die Wahl der Constanten k begrenzter Bereich der Fläche erzeugt; die Translationscurven sind congruente Schraubenlinien.

Man kann die Frage aufwerfen, wann überhaupt eine Fläche eines oder mehrere Systeme von Translationseurven enthalten könne. Auf diesen Punkt hoffe ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen.

§ 3.

Aequidistante Curven auf Flächen constanter Krümmung, Developpabeln und Rotationsflächen.

Die Bestimmung von äquidistanten Curvensystemen auf einer gegebenen Fläche kommt auf die Auflösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurück. Man erhält dieselbe folgendermassen. Ist das Längenelement ursprünglich von der Form:

$$ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

so handelt es sich darum, neue Veränderliche u', v' einzuführen, durch welche ds^2 in:

$$du'^2 + 2f' du' dv' + dv'^2$$

übergeht. Man hat also die Differentialgleichungen:

$$1 = \left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 e + 2f \frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial v}{\partial u'} + g \left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2,$$

$$1 = \left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 e + 2f \frac{\partial u}{\partial v'} \frac{\partial v}{\partial v'} + g \left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2$$

zu lösen, oder, wenn man die Variablen vertauscht, zu bewirken, dass:

$$\begin{aligned}& e \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 - 2f \frac{\partial v'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u} + g \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\&= e \left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 - 2f \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} + g \left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 = \Delta^2\end{aligned}$$

wird, wo Δ die Functionaldeterminante:

$$\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u}$$

bedeutet. Es mag nun vorausgesetzt werden, dass die Fläche bereits conform auf die Ebene abgebildet, d. h. $f = 0$, $e = g$ sei. Alsdann hat man die Gleichungen:

$$(1) \quad \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2.$$

Setzt man jetzt

$$v' + u' = U, \quad v' - u' = V,$$

so erhält man:

$$\frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial u} = 0,$$

welchen man durch die Annahme:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = -k \frac{\partial V}{\partial u},$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = +k \frac{\partial V}{\partial v}$$

genügt. Für k erhält man ferner aus den Gleichungen (1):

$$k^2 = \frac{e}{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - e}.$$

Mithin lautet die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial V}{\partial u} \sqrt{\frac{e}{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - e}} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\partial V}{\partial v} \sqrt{\frac{e}{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - e}} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Von derselben lassen sich leicht particuläre Integrale angeben, wenn e eine Function von u allein ist, d. h. wenn die Fläche Biegungsfläche einer Rotationsfläche ist, auf welchen Fall wir noch zurückkommen werden.

Eine besondere Beachtung verdienen die Flächen constanter Krümmung. Für dieselben kennt man, wie oben gezeigt, die particuläre durch die Haupttangentialcurven vermittelte Lösung, aus welcher durch Bewegung der Flächen in sich ∞^2 andere hergeleitet werden können. In diesem Falle ist zugleich der Coefficient $f = \cos z$ charakterisirt durch die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -K \sin z.$$

Man kann in der That zeigen, dass die Aufgabe auf den Flächen constanter Krümmung alle Systeme äquidistanter Curven zu bestimmen, von der Lösung der Differentialgleichung (2) abhängig ist. Wählt man z. B. als Typus dieser Flächen bei negativem K die Rotationsfläche der Tractrix, so ergibt sich als Ausdruck für das Längenelement bei Polarcordinaten:

$$ds^2 = \varrho^2 d\varphi^2 + \frac{a^2}{e^2} d\varrho^2,$$

und man hat demgemäss die Gleichungen:

$$\varrho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \frac{a^2}{\varrho^2} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} \right)^2 = 1,$$

$$\varrho^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \frac{a^2}{\varrho^2} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial v} \right)^2 = 1$$

zu lösen. Setzt man $d\varrho = \varrho dw$, so wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{-w} \sqrt{1 - a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{-w} \sqrt{1 - a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2}.$$

Durch die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}$ findet man hieraus:

$$(3) \quad a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \sqrt{1 - a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2} \sqrt{1 - a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2}.$$

Sei nun $aw = z$

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \cos \Theta, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \cos \Theta',$$

so folgt:

$$(5) \quad \begin{aligned} -a \frac{\partial \Theta}{\partial v} &= \sin \Theta', \\ -a \frac{\partial \Theta'}{\partial u} &= \sin \Theta. \end{aligned}$$

Wird endlich $\Theta' = \Theta + \psi$ gesetzt, so gehen die Gleichungen (5) über in

$$(6) \quad \begin{aligned} -a \frac{\partial \Theta}{\partial v} &= \sin(\Theta + \psi), \\ -a \frac{\partial \Theta}{\partial u} &= a \frac{\partial \psi}{\partial u} + \sin \Theta, \end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \sin \psi.$$

Unter der Voraussetzung, dass ψ dieser Differentialgleichung genügt, sind die linearen Differentialgleichungen (6) integrabel. Auf eine ganz ähnliche Art lässt sich auch für eine Kugel mit dem Radius a die Integration auf die der Gleichung:

$$-a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \sin \psi$$

zurückführen.

Auf den developpablen Flächen reducirt sich die Bestimmung unmittelbar auf die Lösung der Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2 = 1.$$

Durch Differentiation entsteht:

$$\frac{\partial u}{\partial u'} \frac{\partial^2 u}{\partial u' \partial v'} + \frac{\partial v}{\partial u'} \frac{\partial^2 v}{\partial u' \partial v'} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial v'} \frac{\partial^2 u}{\partial v' \partial u'} + \frac{\partial v}{\partial v'} \frac{\partial^2 v}{\partial v' \partial u'} = 0.$$

Da nun die Functionaldeterminante der u, v nicht verschwinden darf, weil die Functionen u, v von einander unabhängig sein müssen, so folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u' \partial v'} = \frac{\partial^2 v}{\partial u' \partial v'} = 0,$$

mithin ist für die Biegungsflächen der Ebene die einzige Lösung durch die Translation einer beliebigen Curve gegeben. Dies ist geometrisch übrigens unmittelbar evident, da die unendlich kleinen von den äquidistanten Curven begrenzten Elemente Parallelogramme in der Ebene sind.

Wie schon bemerkt, lassen sich auf den Biegungsflächen der Rotationsflächen leicht particuläre Systeme solcher Curven finden. Ist nämlich das Linienelement von der Form:

$$ds^2 = du^2 + dv^2 G(u),$$

so setze man $u = y$, wo y eine Function von $u', v = v'$ und

$$\frac{dy}{\sqrt{c - G(y)}} = du'.$$

Nimmt man $c(1 - f) = 2G(y)$, so wird

$$ds^2 = \frac{1}{2} \{ (du')^2 c(1 + f) + dv'^2 c(1 - f) \},$$

so dass für $u' \sqrt{c} = u'' + v''$, $v' \sqrt{c} = u'' - v''$ das Längenelement die verlangte Form erhält. Die Lösung enthält eine willkürliche Constante c .

Für Rotationsflächen insbesondere, deren Gleichung:

$$z = f\varphi,$$

$$x = \varrho \cos \varphi,$$

$$y = \varrho \sin \varphi,$$

setze man:

$$\varphi = c(u - v),$$

$$u + v = \int d\varrho \frac{\sqrt{1 + f' \varrho^2}}{\sqrt{1 - \varrho^2 c^2}}.$$

Die auf diese Weise entstehenden äquidistanten Curven haben eine einfache Beziehung zu den geodätischen Linien auf einer anderen Rotationsfläche. Setzt man nämlich $\varrho = \frac{1}{\varrho'}$, $u = -\frac{u'}{c}$, $v = -\frac{v'}{c}$, so werden die letzteren Gleichungen:

$$u' + v' = c \int \frac{d\varrho'}{\varrho'} \frac{\sqrt{1 + \left(f' \frac{1}{\varrho'}\right)^2}}{\sqrt{\varrho'^2 - c^2}},$$

$$v' - u' = \varphi.$$

Nimmt man endlich $\psi \varrho' = -\int f' \varrho \frac{1}{\varrho^2} d\varrho$, so sind die Curven u' , v' auf der Rotationsfläche mit der Meridiancurve $z = \psi \varrho'$ geodätische Linien. Man kann sich daher der bekannten Eigenschaften der geodätischen Linien auf den Rotationsoberflächen bedienen, um gleichzeitig auch den Verlauf der äquidistanten Curven zu bestimmen. So entsprechen z. B. den Curven auf der Kugel die kürzesten Linien auf der Rotationsfläche der Kettenlinie u. s. w.

Für die Kugel erhält man insbesondere die folgenden Curvensysteme:

$$x = r \sin \operatorname{am} \frac{u+v}{r} \cos \frac{u-v}{r} k,$$

$$y = r \sin \operatorname{am} \frac{u+v}{r} \sin \frac{u-v}{r} k,$$

$$z = r \cos \operatorname{am} \frac{u+v}{r}$$

mit dem Modul k der elliptischen Functionen; speciell für $k = 1$:

$$x = r \frac{e^{\frac{u+v}{r}} - e^{-\frac{u+v}{r}}}{e^{\frac{u+v}{r}} + e^{-\frac{u+v}{r}}} \cos \frac{u-v}{r},$$

$$y = r \frac{e^{\frac{u+v}{r}} - e^{-\frac{u+v}{r}}}{e^{\frac{u+v}{r}} + e^{-\frac{u+v}{r}}} \sin \frac{u-v}{r},$$

$$z = \frac{zr}{e^{\frac{u+v}{r}} + e^{-\frac{u+v}{r}}}.$$

Auf den Rotationsflächen, welche zugleich Translationsflächen sind, kann das System der Translationscurven mit unter den eben ermittelten Curvensystemen begriffen sein. Dies ist in der That der Fall bei den Schraubenflächen, wie man durch einfache Rechnung findet. Dagegen ist das System der Translationscurven auf dem Rotationsparaboloid nicht in der eben abgeleiteten Lösung enthalten.

§ 4.

Beispiele.

Gelingt es, Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 &= 1, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

zu finden, so erhält man eine Fläche, auf der wenigstens ein System äquidistanter Curven bekannt ist. Man kann dabei folgenden Weg einschlagen.

Setzt man:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \sin \Theta, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \sin \Theta', \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \cos \Theta \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \cos \Theta' \sin \varphi', \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \cos \Theta \cos \varphi, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \cos \Theta' \cos \varphi', \end{aligned}$$

so sind die Gleichungen (1) identisch erfüllt. Die Integrabilitätsbedingungen liefern dann weiter:

$$(3) \quad \cos \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v} = \cos \Theta' \frac{\partial \Theta'}{\partial u},$$

$$(4) \quad \sin \Theta \sin \varphi \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \cos \Theta \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sin \Theta' \sin \varphi' \frac{\partial \Theta'}{\partial u} - \cos \Theta' \cos \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial v},$$

$$(5) \quad \sin \Theta \cos \varphi \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \cos \Theta \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sin \Theta' \cos \varphi' \frac{\partial \Theta'}{\partial u} + \cos \Theta' \sin \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial v}.$$

Aus (4) und (5) erhält man leicht:

$$\begin{aligned} \sin \Theta \cos \varphi - \varphi' \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \cos \Theta \sin \varphi - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \sin \Theta' \frac{\partial \Theta'}{\partial u} \\ - \sin \Theta \sin \varphi - \varphi' \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \cos \Theta \cos \varphi - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \cos \Theta' \frac{\partial \varphi'}{\partial u}, \end{aligned}$$

oder für $\varphi - \varphi' = w$

$$(6) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial \varphi'}{\partial u} &= \frac{1}{\sin w \cos \Theta'} \left[\sin \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \sin \Theta' \frac{\partial \Theta'}{\partial u} \cos w \right] = P, \\ -\frac{\partial \varphi'}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{1}{\sin w \cos \Theta} \left[\cos w \sin \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \sin \Theta' \frac{\partial \Theta'}{\partial u} \right] = Q. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$(7) \quad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u}$$

liefert eine Relation, welche mit (3) zu verbinden ist. Im Folgenden

werde ich eine einfache Annahme machen, bei welcher die Lösung der Differentialgleichungen auf Quadraturen zurückgeführt werden kann; sie führt freilich nur zu sehr speciellen Flächen. Nimmt man $\Theta = \Theta'$, so folgt aus (3), dass Θ eine Function von $u + v$ sein muss. Die Gleichung (7) wird dann:

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\partial \log \cos \Theta}{\partial u} \operatorname{tg} \frac{w}{2} \right\} + \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial \log \cos \Theta}{\partial u} \operatorname{tg} \frac{w}{2} \right\} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0,$$

während aus (6) wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial u} &= \operatorname{tg} \frac{w}{2} \frac{d \log \cos \Theta}{du}, \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial v} &= - \operatorname{tg} \frac{w}{2} \frac{d \log \cos \Theta}{du} - \frac{\partial w}{\partial v}. \end{aligned}$$

Da auch von (8) particuläre Integrale im Allgemeinen nicht bekannt sind, so setze man:

$$\cos \Theta = k e^{c(u+v)}$$

und w als Function von $au + bv = V$ voraus. Die Gleichung (8) wird dann

$$\frac{d^2 w}{dV^2} + c \frac{a+b}{ab} \frac{d}{dV} \operatorname{tg} \frac{w}{2} = 0,$$

doch darf hier $a \pm b$ nicht verschwinden. Demgemäss ist z bestimmt durch die Gleichung:

$$c \frac{a+b}{ab} \operatorname{tg} \frac{w}{2} + \frac{dw}{dV} + c_1 = 0.$$

Setzt man $c_1 = m \cos \alpha$, $c \frac{a+b}{ab} = m \sin \alpha$, so wird:

$$mV + 2 \left[\left(\frac{w}{2} - \alpha \right) \cos \alpha + \sin \alpha \log \cos \left(\frac{w}{2} - \alpha \right) \right] = 0.$$

Um endlich die Ausdrücke für y und z zu erhalten, setze man:

$$\begin{aligned} u + v &= U, \\ au + bv &= V, \\ b - a \frac{\partial y}{\partial U} &= b \frac{\partial y}{\partial u} - a \frac{\partial y}{\partial v}, \\ b - a \frac{\partial y}{\partial V} &= \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}, \end{aligned}$$

also:

$$y(b-a) = \int k e^{cU} (b \sin \varphi - a \sin \varphi') dU + \psi(V).$$

Ferner hat man:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{abc_1}{a+b} v - u + \frac{aw}{a+b}, \\ \varphi' &= \frac{abc_1}{a+b} v - u + \frac{bw}{a+b}, \end{aligned}$$

oder, wenn $v - u = \frac{b+a}{b-a} U + \frac{2V}{b-a}$ gesetzt wird:

$$\varphi = \frac{abc'}{b-a} U + \frac{2abc'}{b^2-a^2} V + \frac{aw}{a+b},$$

$$\varphi' = \frac{abc'}{b-a} U + \frac{2abc'}{b^2-a^2} V - \frac{bw}{a+b}.$$

Setzt man:

$$c = h \cos \beta,$$

$$\frac{abc'}{b-a} = h \sin \beta,$$

so wird

$$y(b-a) = \frac{k}{h} e^{cU} \left\{ b \sin \left(\frac{abc'}{b-a} U + 2 \frac{abc'}{b^2-a^2} V + \frac{aw}{a+b} - \beta \right) \right. \\ \left. - a \sin \left(\frac{abc'}{b-a} U + 2 \frac{abc'}{b^2-a^2} V - \frac{bw}{a+b} - \beta \right) \right\},$$

die Function $\psi(V)$ wird gleich einer Constanten, wovon man sich leicht mit Hülfe der Gleichung

$$\cos \varphi - \beta \operatorname{tg} \frac{w}{2} + \cos \varphi' - \beta \operatorname{tg} \frac{w}{2} = \sin(\varphi - \beta) - \sin(\varphi' - \beta)$$

überzeugt. Mithin hat man als Gleichungen der Fläche:

$$x = \int \frac{dt}{t} \sqrt{1 - k^2 t^2},$$

$$y = \frac{ke^{cU}}{(b-a)h} [b \sin(\varphi - \beta) - a \sin(\varphi' - \beta)],$$

$$z = \frac{ke^{cU}}{(b-a)h} [b \cos(\varphi - \beta) - a \cos(\varphi' - \beta)],$$

$$t = e^U.$$

Für den Coefficienten f des Längenelementes erhält man die Gleichung:

$$f = 1 - 2 \cos^2 \Theta \sin^2 \frac{w}{2}.$$

Giebt man der Constanten c' den Werth Null, so wird $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0$. Daraus findet man:

$$f = 1 - 2k^2 h^2 e^{c(b-a)} \left[\frac{u}{b} - \frac{v}{a} \right].$$

Für diesen Specialwerth wird also f Function einer Variablen, die Fläche wird Biegungsfläche einer Rotationsfläche. Die Curven $U = \text{const.}$ werden Cykloiden, die Fläche selbst wird erzeugt durch Drehung einer veränderlichen Tractrix um die X-Axe.

Sucht man andererseits solche Lösungen, bei denen w Function von $u - v$ wird, welcher Fall so eben ausgeschlossen war, so ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{du^2} - 2 \operatorname{tg} \frac{w}{2} \frac{d^2 \log \cos \Theta}{du^2} = 0.$$

Nimmt man wieder $\cos \Theta = k e^{cU}$, so wird $w = m(u - v)$, also:

$$\varphi = mu - \frac{2}{m} c \log \cos \frac{m}{2} (u - v),$$

$$\varphi' = mv - \frac{2}{m} c \log \cos \frac{m}{2} (u - v).$$

Setzt man noch $u - v = V$, so erhält man aus:

$$2 \frac{\partial y}{\partial U} = \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} = 2 \cos \Theta \sin \frac{\varphi + \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2},$$

$$y = \frac{k}{h} e^{cU} \cos V \frac{m}{2} \sin \left[m \frac{U}{2} - \frac{2}{m} \log \cos \left(\frac{m}{2} V - \alpha \right) \right],$$

$$z = \frac{k}{h} e^{cU} \cos V \frac{m}{2} \cos \left[m \frac{U}{2} - \frac{2}{m} \log \cos \left(\frac{m}{2} V - \alpha \right) \right],$$

wobei

$$c = h \cos \alpha,$$

$$\frac{m}{2} = h \sin \alpha$$

zu setzen ist, und x wie früher durch das logarithmische Integral bestimmt wird.

Endlich kann man auch $\frac{d^2 \log \cos \Theta}{du^2} = c$ setzen und w aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 w}{du^2} = 2c \operatorname{tg} \frac{w}{2}$$

bestimmen, doch nehmen die Integrale dann schon eine complicirte Form an.

§ 5.

Schlussbemerkung.

Die vorigen Paragraphen enthalten den einfachsten Fall einer grossen Classe von Untersuchungen über Curvensysteme auf Oberflächen. Die nächst einfache Annahme über das Längenelement würde wohl die sein, dass:

$$ds^2 = du^2 + 2u \cos z \, du \, dv + u^2 dv^2$$

gesetzt wird, wo z der Winkel zwischen den Curven u und v ist. Diese Curven bilden ein Netz auf der Fläche, welches man als *Radialnetz* bezeichnen kann, weil die Abmessungen nach den Richtungen der u , v so erfolgen, wie in dem Systeme der concentrischen Kreise und Radienvectoren der Polarcordinaten. Schreibt man das Längenelement in der Form:

$$ds^2 = (du - u dv)^2 \sin^2 \frac{z}{2} + (du + v du) \cos^2 \frac{z}{2},$$

so erkennt man, dass die Curven $v + lu = \text{const.}$, $v - lu = \text{const.}$ wieder ein Orthogonalsystem bilden.

Die Bestimmung von Radialnetzen auf developpablen Flächen kommt auf die Integration der folgenden Gleichungen hinaus, in denen x, y geradezu Coordinaten der Ebene vorstellen mögen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = u^2.$$

Setzt man:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos \Theta, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin \Theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u \cos \Theta', \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u \sin \Theta',$$

so liefern die Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v} \sin(\Theta' - \Theta) = 1;$$

$$u \sin(\Theta' - \Theta) \frac{\partial \Theta'}{\partial u} = \cos(\Theta' - \Theta).$$

Setzt man noch $\Theta' - \Theta = z$, so wird:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v} = \frac{1}{\sin z},$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = -\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{u} \cotg z,$$

also entsteht für $u' = lu$ die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u' \partial v} = \frac{\partial}{\partial u'} \frac{1}{\sin z} - \frac{\partial \cotg z}{\partial v} = 0,$$

sie drückt zugleich aus, dass das Krümmungsmass der Fläche gleich Null ist. Für die particulären Lösungen, bei denen z eine Function von $au' + bv + c = U$ ist, erhält man:

$$dU = \frac{b}{a} \frac{\sin z dz}{\frac{b}{a} \cos z + k \sin z - 1},$$

wo k eine willkürliche Constante. Bestimmt man z aus dieser Gleichung, so erhält man Netze der geforderten Art. Der Kürze halber mag hier nur der Fall angeführt werden, wo $a = b = 0$ genommen, also z gleich der Constanten c gesetzt wird. Man hat dann:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v} = \frac{1}{\sin c},$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = \frac{\cotg c}{u},$$

also:

$$\Theta = \frac{v + \cos c \, l u}{\sin c} + c'$$

und:

$$x = u \sin c \sin \left\{ c' + \frac{v + \cos c \, l u}{\sin c} \right\},$$

$$y = u \sin c \cos \left\{ c' + \frac{v + \cos c \, l u}{\sin c} \right\},$$

die Curven $u = \text{const.}$ werden Kreise, die Curven $v = \text{const.}$ logarithmische Spiralen.

Auch auf den Rotationsflächen lassen sich leicht Radialnetze construiren. Dazu hat man in dem Längenelemente:

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 (1 + f'^2)$$

nur zu setzen:

$$d\varphi = \frac{dr}{r} \sqrt{c^2 - (1 + f'^2)} + dv,$$

$$dr = du$$

und erhält:

$$ds^2 = c^2 du^2 + u^2 dv^2 + 2 du dv u \sqrt{c^2 - (1 + f'^2)},$$

wo c eine willkürliche Constante.

Man kann sich endlich die Aufgabe stellen, Transformationen des Raumes zu bestimmen, bei denen die Abmessungen nach drei Richtungen nach gegebenen Gesetzen erfolgen. Dabei wird es sich darum handeln, das Längenelement in die Form:

$$ds^2 = e_1 du^2 + e_2 dv^2 + e_3 dw^2 + 2e_{12} du dv + \dots$$

zu bringen, wo e_1, e_2, e_3 gegebene Functionen von u, v, w sind. Der wichtigste Fall ist wiederum der, wo das Längenelement die Form:

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + dw^2 + 2f_w du dv + 2f_u du dw + 2f_v dv dw$$

annimmt. Der Raum erscheint dann durchzogen von äquidistanten Curven, die Transformation ist eine solche, wie sie vermittelt wird durch Biegung eines aus undehnensamen Fäden bestehenden körperlichen Gewebes mit parallelopipedischen Zellen. Eine particuläre Lösung der Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2 = 1$$

erhält man auch hier durch die Annahme $x = fu + \varphi v + \psi w$ u. s. w. Allgemeinere Systeme entstehen, wenn man eine beliebige mit äquidistanten Curven überdeckte Fläche in Translation versetzt. Eine Lösung der obigen Gleichungen, welche nicht auf diese angegebenen einfachen Fälle zurückführt, ist mir bisher nicht gelungen.

Dresden, den 12. Mai 1881.