1868. ANNALEN № 6.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND CXXXIV.

I. *Ueber den Einfluſs der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung; von G. Kirchhoff.*

Bei seinen schönen Versuchen über die Schallgeschwindigkeit der Luft in Röhren hat Hr. Kundt[1]) experimentell nachgewiesen, daſs die Schallgeschwindigkeit in engen Röhren um so kleiner ist, je enger die Röhre und je tiefer der Ton. Helmholtz[2]) hatte theoretisch die Schallbewegung in einer cylindrischen Röhre mit Rücksicht auf die Reibung untersucht und eine Formel für die Schallgeschwindigkeit abgeleitet, die in sofern mit den Resultaten jener Versuche übereinstimmt, als auch nach ihr die Geschwindigkeit kleiner wird, wenn der Radius der Röhre, und wenn die Schwingungszahl des Tones abnimmt. Hr. Kundt hat aber gezeigt, daſs die Werthe der Geschwindigkeit, die er bei seinen engeren Röhren beobachtet hat, sehr viel kleiner als diejenigen sind, die die Helmholtz'sche Formel giebt. Er schlieſst daraus, daſs die Reibung zur Erklärung der von ihm beobachteten Erscheinungen nicht genügt, und spricht die Vermuthung aus, daſs ein Wärmeaustausch zwischen der Luft, die den Schall fortpflanzt, und der Wand der umschlieſsenden Röhre die wesentlichste Ursache derselben sey. Die Wärmeleitung der Luft, die einen solchen Wärmeaustausch vermitteln muſs, hängt nun nach der neueren Gastheorie innig mit der Reibung zusammen, so, daſs bei einer Bewegung eines Gases, bei der Temperaturänderungen vorkom-

1) Monatsbericht der Berl. Ak. 19. Dec. 1867.
2) Verhandlungen des natur-historisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg vom Jahre 1863, Bd. III, S. 16.

men, die nicht zu vernachlässigen sind, der Einflufs der Wärmeleitung mindestens von derselben Ordnung seyn mufs als der Einflufs der Reibung. Um so näher liegt es zu untersuchen, ob bei Rücksicht auf die Wärmeleitung die von Hrn. Kundt beobachteten Thatsachen vollsändiger theoretisch sich erklären lassen, als ohne diese.

1.

Sind u, v, w die unendlich kleinen Componenten der Geschwindigkeit und ist ϱ die Dichtigkeit zur Zeit t in dem Punkte x, y, z, so ist zunächst

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Ist p der Druck und sind μ' und μ'' zwei von der Reibung abhängige Constanten, so ist weiter

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=\mu'\Delta u-\mu''\frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x\,\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}=\mu'\Delta v-\mu''\frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y\,\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}=\mu'\Delta w-\mu''\frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial z\,\partial t},$$

wo

$$\Delta F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

gesetzt ist.

Zu diesen vier Gleichungen ist noch eine fünfte hinzuzufügen. Vernachlässigt man die Wärmeleitung, so ist diese

$$c\varrho\,dp-c'p\,d\varrho=0,$$

wo c die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen, c' seine specifische Wärme bei constantem Druck bezeichnet. Berücksichtigt man die Wärmeleitung, so tritt an ihre Stelle eine complicirtere. Um diese abzuleiten, bezeichne man durch p_0 und ϱ_0 Druck und Dichtigkeit für den Zustand der Ruhe, durch ϑ die Temperatur, gerechnet von *der* Temperatur, die bei der Ruhe stattfindet, durch α den Ausdehnungscoëfficienten des Gases, so dafs

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{p_0}{\varrho_0}(1+\alpha\vartheta).$$

Wird bei einem Gasquantum, dessen Masse M ist, der Druck um dp und zugleich die Dichtigkeit um $d\varrho$ vermehrt, so mufs ihm eine Wärmemenge dW zugeführt werden, die durch die Gleichung

$$dW = P dp + R d\varrho$$

bestimmt ist, wo

$$P = \frac{Mc\varrho_0}{\alpha p_0 \varrho}$$

$$R = -\frac{Mc'p\varrho_0}{\alpha p_0 \varrho^2}.$$

Das gedachte Gasquantum sey nun dasjenige, das zur Zeit t sich in einem rechtwinkligen Parallelepipedum befindet, dessen einer Eckpunkt der Punkt x, y, z ist, dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind und die Längen dx, dy dz haben. In dem Zeitelemente dt wird diesem durch Leitung eine Wärmemenge zugeführt, die, wenn k die Wärmeleitungsfähigkeit des Gases bedeutet,

$$= k\, dx\, dy\, dz\, dt\, \varDelta\vartheta$$

ist; bei Rücksicht darauf, dafs u, v, w unendlich klein sind, folgt hieraus, dafs dieser Ausdruck

$$= \left(P\frac{\partial p}{\partial t} + R\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) dt$$

seyn mufs, wenn bei der Bildung der Werthe von P und R

$$M = \varrho\, dx\, dy\, dz$$

gesetzt wird. Berücksichtigt man noch, dafs ϱ unendlich wenig von ϱ_0 verschieden ist, so ergiebt sich hieraus:

$$k\varDelta\vartheta = \frac{1}{\alpha p_0}\left(c\varrho\frac{\partial p}{\partial t} - c'p\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right).$$

In dieser, so wie in den früher aufgestellten Gleichungen soll p mittelst der Gleichung

$$dp = \frac{p_0}{\varrho_0} d\varrho + \alpha p_0\, d\vartheta$$

eliminirt und gesetzt werden:

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \sigma)$$

$$\vartheta = \frac{c' - c}{\alpha c}\theta$$

$$k = \nu c \varrho_0$$

$$\frac{p^0}{\varrho_0}\frac{c'}{c} = a^2$$

$$\frac{p_0}{\varrho_0} = b^2$$

wobei dann a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet, die der Schall haben würde, wenn die Reibung und die Wärmeleitung keinen Einfluſs ausübte, und b die Schallgeschwindigkeit, die stattfinden würde, wenn überdieſs keine Temperaturänderungen in Folge der Aenderungen der Dichtigkeit einträten. Die fünf Differentialgleichungen nehmen dann die folgende Form an:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b^2\frac{\partial\sigma}{\partial x} + (a^2 - b^2)\frac{\partial\theta}{\partial x} = \mu' \varDelta u - \mu''\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + b^2\frac{\partial\sigma}{\partial y} + (a^2 - b^2)\frac{\partial\theta}{\partial y} = \mu' \varDelta v - \mu''\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + b^2\frac{\partial\sigma}{\partial z} + (a^2 - b^2)\frac{\partial\theta}{\partial z} = \mu' \varDelta w - \mu''\frac{\partial^2\sigma}{\partial z\partial t}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \nu \varDelta \theta.$$

Von den drei Constanten μ', μ'', ν, die hier auftreten, ist bisher nur die erste experimentell bestimmt, welche *allein* bei solchen Bewegungen von Einfluſs ist, bei denen die Aenderungen der Dichtigkeit vernachlässigt werden können. Nach Meyer [1]) ist für atmosphärische Luft bei der Temperatur von etwa 20° C. und dem Drucke einer Atmosphäre, wenn man eine Secunde als Zeiteinheit annimmt,

$$\sqrt{\mu'} = 4{,}86 \text{ Millimeter.}$$

Nach der Theorie von Stokes [2]) ist

$$\mu'' = \tfrac{1}{3}\mu'.$$

Dieselbe Relation besteht nach der Theorie von Maxwell [3]); nach dieser ist weiter, wenn man die Gasmolecüle als materielle Punkte betrachtet,

$$\nu = \tfrac{5}{2}\mu',$$

1) Pogg. Ann. Bd. 125. S. 572 und S. 599.
2) *Cambridge Phil. Trans. vol. VIII, p.* 297 (1845).
3) *London Phil. Trans. vol.* 157 *part I, p.* 49 (1867).

und μ', μ'' und ν sind dem Drucke umgekehrt und dem Quadrate der absoluten Temperatur direct proportional. Der Werth von ν ist aber vielleicht erheblich gröfser, als er nach der Theorie von Maxwell seyn sollte, da diese auf die Wärmestrahlung keine Rücksicht nimmt und die Strahlung die Wärmeleitung vergröfsert ohne ihr Gesetz zu ändern, wenn man annehmen darf, dafs die Wärmestrahlen, die die Gastheilchen aussenden, in unendlich kleinen Strecken vollständig absorbirt werden.

2.

Die aufgestellten Gleichungen sollen jetzt unter der Voraussetzung weiter entwickelt werden, dafs die unbekannten Funktionen u, v, w, σ, θ den Faktor

$$e^{ht}$$

enthalten, im Uebrigen aber von t unabhängig sind, wo h eine Constante bedeutet, die später imaginär angenommen werden wird. Bezeichnet man die Funktionen von x, y, z die durch Abtrennung des genannten Faktors aus u, v, w, σ, θ entstehen, jetzt mit denselben Zeichen, so erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+h\sigma=0$$

$$hu-\mu'\Delta u=-\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$hv-\mu'\Delta v=-\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$hw-\mu'\Delta w=-\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$P=(b^2+h\mu'')\sigma+(a^2-b^2)\theta$$

$$\sigma=\theta-\frac{\nu}{h}\Delta\theta.$$

Durch Benutzung der letzten dieser Gleichungen wird die vorletzte:

$$P=(a^2+h\mu'')\theta-\frac{\nu}{h}(b^2+h\mu'')\Delta\theta$$

und die erste:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+h\theta-\nu\Delta\theta=0;$$

bei Rücksicht hierauf erhält man aus den 3 übrigen, wenn man sie nach x, y, z differentiirt und addirt:

$$h^2\theta-[a^2+h(\eta'+\mu''+\nu)]\Delta\theta+\frac{\nu'}{h}[b^2+h(\mu'+\mu'')]\Delta\Delta\theta=0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung für θ findet man, indem man λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$h^2-[a^2+h(\mu'+\mu''+\nu)]\lambda+\frac{\nu'}{h}[b^2+h(\mu'+\mu'')]\lambda^2=0$$

nennt, zwei Funktionen Q_1 und Q_2 aus den Gleichungen

$$\Delta Q_1=\lambda_1 Q_1$$
$$\Delta Q_2=\lambda_2 Q_2$$

bestimmt, und

$$\theta=A_1 Q_1+A_2 Q_2$$

setzt, wo A_1 und A_2 willkührliche Constanten bedeuten.

Für diesen Werth von θ erhält man partikuläre Lösungen der zweiten, dritten und vierten unserer Gleichungen, indem man u, v, w den nach x, y, z genommenen Differentialquotienten von

$$B_1 Q_1+B_2 Q_2$$

gleichsetzt und die Constanten B_1 und B_2 passend bestimmt, wobei sich ergiebt:

$$B_1=-A_1\left(\frac{h}{\lambda_1}-\nu\right)$$
$$B_2=-A_2\left(\frac{h}{\lambda_2}-\nu\right).$$

Allgemeinere Lösungen derselben Gleichungen bekommt man, indem man zu den gefundenen hinzufügt Funktionen u', v', w', die den Gleichungen

$$\Delta u'=\frac{h}{\mu'}u'$$
$$\Delta v'=\frac{h}{\mu'}v'$$
$$\Delta w'=\frac{h}{\mu'}w'$$

genügen. Dadurch wird

$$u=u'+B_1\frac{\partial Q_1}{\partial x}+B_2\frac{\partial Q_2}{\partial x}$$
$$v=v'+B_1\frac{\partial Q_1}{\partial y}+B_2\frac{\partial Q_2}{\partial y}$$
$$w=w'+B_1\frac{\partial Q_1}{\partial z}+B_2\frac{\partial Q_2}{\partial z}$$

wo für B_1 und B_2 die eben angegebenen Werthe zu setzen sind.

Substituirt man diese Ausdrücke für u, v, w in die angegebene Umformung der ersten der vorgelegten Gleichungen, so ergiebt sich zwischen u', v', w' noch die Bedingung

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0.$$

3.

Die gewonnenen Resultate sollen nun zunächst auf den Fall *ebener* Wellen angewandt werden, die im unbegränzten Luftraume in der Richtung der positiven x-Axe fortschreiten. Man setze

$$v'=0 \text{ und } w'=0$$

und nehme u', Q_1 und Q_2 als unabhängig von y und z an. Dann mufs u' den beiden Gleichungen

$$\frac{d^2 u'}{dx^2}=\frac{h}{\mu'}u'$$

$$\frac{du'}{dx}=0.$$

genügen, aus denen folgt:

$$u'=0.$$

Die Gleichungen für Q_1 und Q_2 werden:

$$\frac{d^2 Q_1}{dx^2}=\lambda_1 Q_1$$

$$\frac{d^2 Q_2}{dx^2}=\lambda_2 Q_2.$$

Hiernach kann man setzen:

$$Q_1=e^{-x\sqrt{\lambda_1}}$$

$$Q_2=e^{-x\sqrt{\lambda_2}}$$

wo die Vorzeichen der Wurzelgröfsen so zu wählen sind, dafs die reellen Theile derselben positiv sind, damit nicht Q_1 und Q_2 in der Unendlichkeit unendlich grofs werden. Es wird daher:

$$u=A_1\sqrt{\lambda_1}\left(\frac{h}{\lambda_1}-\nu\right)e^{-x\sqrt{\lambda_1}}+A_2\sqrt{\lambda_2}\left(\frac{h}{\lambda_2}-\nu\right)e^{-x\sqrt{\lambda_2}}$$

$$\theta=\qquad A_1 e^{-x\sqrt{\lambda_1}}+A_2 e^{-x\sqrt{\lambda_2}}$$

Die Gröfsen A_1 und A_2 bestimmen sich, wenn für $x=0$

$$u = u_0 \qquad \theta = \theta_0$$

gegeben sind, aus den Gleichungen

$$u_0 = A_1 \sqrt{\lambda_1}\left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right) + A_2 \sqrt{\lambda_2}\left(\frac{h}{\lambda_2} - \nu\right)$$

$$\theta_0 = A_1 \qquad\qquad + A_2.$$

Aus der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln λ_1 und λ_2 sind, folgt nun

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{a^2}{h^2} + \frac{\mu' + \mu'' + \nu}{h}$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\,\frac{1}{\lambda_2} = \frac{\nu}{h^3}\left[b^2 + h(\mu' + \mu'')\right];$$

bezeichnet man μ', μ'' und ν als unendlich kleine Gröfsen erster Ordnung, so mufs hiernach eine von den Gröfsen $\frac{1}{\lambda_1}$ und $\frac{1}{\lambda_2}$ auch unendlich klein von der ersten Ordnung, die andere endlich seyn; es sey λ_1 die endliche, λ_2 die unendlich grofse Wurzel. Aus den für A_1 und A_2 aufgestellten Gleichungen ergiebt sich dann, dafs diese Gröfsen endlich sind, wenn u_0 und θ_0 als endlich bezeichnet werden, und weiter, dafs das zweite Glied in dem Ausdrucke von u für $x=0$ unendlich klein von der Ordnung von

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}},$$

für ein endliches x aber unendlich klein von der Ordnung von

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\, e^{-x\sqrt{\lambda_2}}$$

ist. Bei Vernachlässigung unendlich kleiner Gröfsen höherer Ordnung hat man daher für ein endliches x:

$$u = A_1 \sqrt{\lambda_1}\left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right) e^{-x\sqrt{\lambda_1}}.$$

Berücksichtigt man bei der Bildung des Werthes von λ_1 nur die unendlich kleinen Gröfsen niedrigster Ordnung, so findet man

$$\sqrt{\lambda_1} = \pm\left\{\frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^3}\left[\mu' + \mu'' + \nu\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right]\right\}$$

oder, wenn man

$$h = 2\pi n i$$

setzt, wo $i = \sqrt{-1}$ ist und n die Schwingungszahl des Tones bedeutet,

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{2\pi^2 n^2}{a^3}\left[\mu' + \mu'' + \nu\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right] + \frac{2\pi n i}{a}.$$

Setzt man

$$\frac{2\pi^2 n^2}{a^3}\left[\mu' + \mu'' + \nu\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right] = m'$$

und restituirt in dem Ausdrucke von u den von der Zeit abhängigen Faktor, so hat man hiernach

$$u = C \,.\, e^{-m'x + 2\pi n\left(t - \frac{x}{a}\right)i},$$

wo C eine neue Constante bedeutet. Fügt man zu diesem Ausdrucke von u denjenigen, der aus ihm entsteht, wenn man für i — i setzt und die multiplicative Constante verändert, so erhält man

$$u = e^{-m'x}\left[D \sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{a}\right) + E \cos 2\pi n\left(t - \frac{x}{a}\right)\right],$$

wo D und E zwei reelle Constanten bezeichnen sollen.

Man sieht, dafs die Gröfse m' die Abnahme bedingt, die die Amplitude der Schwingungen bei dem Fortschreiten dieser erfährt; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles zeigt sich durch die Reibung und die Wärmeleitung nicht geändert. Strenge genommen erleidet auch diese eine Aenderung [1]), aber eine, die von der Ordnung der Quadrate der Gröfsen μ', μ'', ν ist; man findet dieselbe, wenn man bei der Entwickelung von $\sqrt{\lambda_1}$ die Gröfsen dieser Ordnung beibehält.

In ganz ähnlicher Weise, wie ebene Wellen, lassen sich kugelförmige Wellen der Rechnung unterwerfen. Man setze:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$u' = s'x, \quad v' = s'y, \quad w' = s'z$$

und nehme s', Q_1 und Q_2 als Funktionen von r an. Die vier Differentialgleichungen, denen u', v', w' genügen sollen, geben dann die zwei:

1) Vergl. Stefan, Sitzungsberichte der Wiener Ak. Bd. 54, S. 529 (1866).

$$\frac{d^2 s'}{dr^2} + \frac{4}{r}\frac{ds'}{dr} = \frac{h}{\mu'} s'$$

$$r\frac{ds'}{dr} + 3s' = 0,$$

aus denen folgt:

$$s' = 0.$$

Die Gleichungen für Q_1 und Q_2 werden

$$\frac{d^2 Q_1}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dQ_1}{dr} = \lambda_1 Q_1$$

$$\frac{d^2 Q_2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dQ_2}{dr} = \lambda_2 Q_2,$$

woraus sich ergiebt

$$Q_1 = \frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_1}}$$

$$Q_2 = \frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_2}}$$

wo den Wurzelgröfsen *das* Vorzeichen gegeben werden mufs, bei dem ihre reellen Theile positiv sind, wenn die Bewegung in der Unendlichkeit nicht unendlich grofs werden soll. Es wird daher:

$$u = s\frac{x}{r},\quad v = s\frac{y}{r},\quad z = s\frac{z}{r}$$

$$s = -\frac{d}{dr}\left\{A_1\left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_1}} + A_2\left(\frac{h}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_2}}\right\}$$

$$\theta = A_1\frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_1}} + A_2\frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_2}}.$$

Die Gröfsen A_1 und A_2 werden bestimmt, wenn s und θ für einen Werth von r gegeben sind; für jeden um etwas Endliches gröfseren Werth von r verlieren, die mit A_2 behafteten Glieder ihren Einflufs, da λ_2 unendlich grofs ist, und man erhält auf einem Wege, der dem bei der Untersuchung ebener Wellen eingeschlagenen ganz gleich ist,

$$s = \frac{d}{dr}\frac{1}{r} e^{-m'r}\left[D\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right) + E\cos 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)\right],$$

wo m' denselben Werth, wie oben, hat.

4.

Es soll jetzt angenommen werden, dafs die betrachtete Luftmasse in einer cylindrischen Röhre von kreisförmigem Querschnitt enthalten ist; die Bewegung sey symmetrisch in Bezug auf die Axe der Röhre, welche zur x Axe genommen werden möge. Es sey

$$y^2 + z^2 = r^2$$

$$v = s\frac{y}{r},\ w = s\frac{z}{r}$$

$$v' = s'\frac{y}{r},\ w' = s'\frac{z}{r}$$

und u, u', s, s', Q_1, Q_2 seyen Funktionen von x und r. Es werde nun vorausgesetzt, dafs alle diese Funktionen den Faktor

$$e^{mx}$$

haben, wo m eine Constante bedeutet, im Uebrigen aber von x unabhängig seyen. Behält man für die Funktionen von r, welche nach Abtrennung dieses Faktors übrig bleiben, dieselben Zeichen bei, so hat man zunächst:

$$\frac{d^2 Q_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dQ_1}{dr} = (\lambda_1 - m^2)\, Q_1$$

$$\frac{d^2 Q_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dQ_2}{dr} = (\lambda_2 - m^2)\, Q_2.$$

Für u' und s' ergeben sich die drei Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 u'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du'}{dr} = \left(\frac{h}{\mu'} - m^2\right) u'$$

$$\frac{d^2 s'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{ds'}{dr} - \frac{s'}{r^2} = \left(\frac{h}{\mu'} - m^2\right) s'$$

$$mu' + \frac{ds'}{dr} + \frac{s'}{r} = 0.$$

Diese drei Gleichungen werden erfüllt, wenn man u' aus der ersten bestimmt und

$$s' = -\frac{m}{\frac{h}{\mu'} - m^2}\frac{du'}{dr}$$

setzt, welche Relation sich ergiebt, wenn man die dritte Gleichung nach r differentiirt und von der zweiten abzieht. Man mache nun

$$u' = A\,Q,$$

wo A eine Constante, Q eine Funktion von r bedeutet, die der Gleichung

$$\frac{d^2 Q}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dQ}{dr} = \left(\frac{h}{\mu'} - m^2\right) Q$$

genügt; man hat dann:

$$u = A\,Q - A_1 m\left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right) Q_1 - A_2 m\left(\frac{h}{\lambda_2} - \nu\right) Q_2$$

$$s = -A\,\frac{m}{\frac{h}{\mu'} - m^2}\,\frac{dQ}{dr} - A_1\left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{dQ_1}{dr} - A_2\left(\frac{h}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{dQ_2}{dr}$$

$$\theta = \qquad A_1 Q_1 \qquad + A_2 Q_2.$$

An der Röhrenwand müssen u, s, θ gewissen Bedingungen genügen; es soll hier nur die Hypothese verfolgt werden, dafs die Lufttheilchen, welche die Röhre berühren, an dieser haften und die constante Temperatur derselben besitzen. Die Ausdrücke von u, s, θ müssen dann verschwinden, wenn r gleich dem Radius der Röhre gesetzt wird; das erfordert, dafs für diesen Werth von r die Determinante der Coëfficienten von A, A_1, A_2 in den Ausdrücken von u, s, θ verschwindet, d. h.

$$\frac{m^2 h}{\frac{h}{\mu'} - m^2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{d \lg Q}{dr} + \left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{d \lg Q_1}{dr} - \left(\frac{h}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{d \lg Q_2}{dr} = 0$$

ist.

Die Funktionen Q, Q_1, Q_2 müssen die Eigenschaft haben, für $r = 0$ endlich zu bleiben; dadurch werden sie bis auf multiplicative Constanten, die beliebig gewählt werden können, vollsändig bestimmt. Alle drei lassen sich ausdrücken durch die Funktion

$$1 + \frac{q^2}{1^2} + \frac{q^4}{(1.2)^2} + \frac{q^6}{(1.2.3)^2} + \ldots,$$

die durch $J(q)$ oder J bezeichnet werden möge und die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J}{dq^2} + \frac{1}{q}\frac{dJ}{dq} = 4J$$

genügt; man kann nämlich setzen:

$$Q = J\left(\frac{r}{2}\sqrt{\frac{h}{\mu'} - m^2}\right)$$

$$Q_1 = J\left(\frac{r}{2}\sqrt{\lambda_1 - m^2}\right)$$

$$Q_2 = J\left(\frac{r}{2}\sqrt{\lambda_2 - m^2}\right).$$

Nimmt man μ', μ'' und $\nu = 0$ an, so hat man

$$m^2 = \frac{h^2}{a^2} \text{ und } \lambda_1 = \frac{h^2}{a^2}$$

$$\text{also } \lambda_1 = m^2;$$

daraus folgt, dafs, wenn μ', μ'', ν als unendlich klein angenommen werden, auch $\lambda_1 - m^2$ unendlich klein ist; da dann weiter

$$\frac{h}{\mu'} - m^2 \text{ und } \lambda_2 - m^2$$

unendlich grofs sind, so hat man die Funktion J nur für unendlich kleine und unendlich grofse Werthe ihres Arguments in Betracht zu ziehen.

Für einen unendlich kleinen Werth von q ist

$$J = 1 + q^2,$$

für einen unendlich grofsen

$$J = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2q}}{\sqrt{q}}$$

vorausgesetzt, dafs der reelle Theil von q positiv und unendlich grofs ist, und dafs das Vorzeichen von $\sqrt{q}$ so gewählt wird, dafs auch hier der reelle Theil positiv ist. Die Richtigkeit dieser Angabe beweist man mit Leichtigkeit, wenn man von der Gleichung

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2q\cos x}\, dx$$

ausgeht.

Berücksichtigt man nur die Glieder der höchsten Ordnung, so hat man daher:

$$\frac{d \lg Q}{dr} = \sqrt{\frac{h}{\mu'}}$$

$$\frac{d \lg Q_1}{dr} = \frac{r}{2}(\lambda_1 - m^2)$$

$$\frac{d \lg Q_2}{dr} = \sqrt{\lambda_2}.$$

Setzt man hier, so wie in den Coëfficienten der für m gefundenen Gleichung

$$\lambda_1 = \frac{h^2}{a^2},\ \lambda_2 = \frac{h a^2}{\nu b^2}$$

und schreibt $\frac{h^2}{a^2}$ für m^2 in dem dann auftretenden mit dem Faktor $\sqrt{\mu'}$ behafteten Gliede, so giebt dieselbe

$$m^2 = \frac{h^2}{a^2}\left(1 + \frac{2\gamma}{r\sqrt{h}}\right),$$

wo

$$\gamma = \sqrt{\mu'} + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\sqrt{\nu}$$

und das Vorzeichen von $\sqrt{h}$ so zu wählen ist, dafs der reelle Theil davon positiv wird.

Setzt man wieder

$$h = 2\pi n i, \text{ also } \sqrt{h} = \sqrt{n\pi}\,(1 + i),$$

so wird

$$m = \pm(m' + i m''),$$

wo

$$m' = \frac{\gamma\sqrt{\pi n}}{a r}$$

$$m'' = \frac{2\pi n}{a} + \frac{\gamma\sqrt{\pi n}}{a r}.$$

Führt man jetzt die bisher unterdrückten von t und von x abhängigen Faktoren wieder ein, so hat man

$$u = BR\, e^{ht + mx}$$

$$s = BR'\, e^{ht + mx}$$

$$\theta = BR''\, e^{ht + mx},$$

wo B eine willkührliche Constante bedeutet, R, R', R'' gewisse Funktionen von r sind, die verschwinden, wenn für r der Radius der Röhre gesetzt wird, und für Punkte, die in endlicher Entfernung von der Röhrenwand liegen, bei Vernachlässigung unendlich kleiner Gröfsen höherer Ordnung, diese Werthe annehmen:

$$R = 1, \quad R' = 0, \quad R'' = -\frac{1}{a}.$$

Bildet man den Ausdruck, der die Geschwindigkeit u für Punkte, die in endlicher Entfernung von der Röhrenwand liegen, darstellt, für die beiden Vorzeichen von i und für die beiden Vorzeichen von m und setzt die vier so entstehenden Ausdrücke, mit verschiedenen Constanten multiplicirt, zusammen, so erhält man

$$u = C_1 e^{m'x} \sin(2\pi n t + m''x + \delta_1)$$
$$+ C_2 e^{-m'x} \sin(2\pi n t - m''x + \delta_2),$$

wo C_1, C_2, δ_1, δ_2 vier reelle willkührliche Constanten bedeuten sollen. Es bedingt hiernach m' die Abnahme, die die Schwingungen bei ihrem Fortschreiten erfahren, und m'' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben; die letztere ist

$$= \frac{2\pi n}{m''}$$

d. h.

$$= a\left(1 - \frac{2r\sqrt{\pi n}}{\gamma}\right).$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem von **Helmholtz** angegebenen überein, abgesehen davon, dafs γ hier eine andere Bedeutung hat.

Wenn die Röhre an einem Ende, für welches $x = 0$ seyn möge, durch einen Stempel verschlossen ist, so mufs, für $x = 0$, $u = 0$, also $C_2 = -C_1$ und $\delta_2 = \delta_1$ oder

$$u = C_1 \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2\cos 2m'x} \sin(2\pi n t + \delta)$$

seyn, wo δ in gewisser Weise von x abhängt. Die Wurzelgröfse, die in diesem Ausdrucke vorkommt, verschwindet für keinen andern Werth von x, als für $x = 0$, aber sie hat eine Reihe Minima, die nur unendlich wenig von 0 verschieden sind; diese Minima entsprechen den Knoten. Die Maxima und Minima der Wurzelgröfse sind bestimmt durch die Gleichung:

$$m'\left(e^{2m'x} - e^{-2m'x}\right) + 2m'' \sin 2m''x = 0,$$

oder, wenn man Gröfsen von der Ordnung von γ^2 vernachlässigt, durch die Gleichung:

$$\sin 2m''x = 0.$$

Für die Knoten ist daher

$$\sin m''x = 0$$

und der Abstand zweier aufeinander folgenden Knoten ist

$$= \frac{\pi}{m''},$$

also gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, dividirt durch das doppelte der Schwingungszahl.

Die Constanten C_1 und δ_1 bestimmen sich, sobald noch für einen zweiten Querschnitt der Röhre die Bewegung gegeben ist. Gesetzt es sey für $x = l$

$$u = G \sin 2\pi n t,$$

so mufs für alle Werthe von t:

$$G \sin 2\pi n t = C_1 \sqrt{e^{2m'l} + e^{-2m'l} - 2\cos 2m''l}\, \sin(2\pi n t + \delta l)$$

seyn, wo δl den Werth von δ für $x = l$ bedeutet; daraus folgt:

$$\delta l = 0$$

$$C_1 = \frac{G}{\sqrt{e^{2m'l} + e^{-2m'l} - 2\cos 2m''l}}.$$

Es ergiebt sich daraus, dafs bei gegebenem G ein Maximum von C_1 stattfindet, wenn an dem Orte, für den $x = l$ ist, ein Knoten liegt; es ist dann C_1 unendlich grofs gegen G, nämlich

$$C_1 = \frac{G}{2m'l}$$

oder

$$= G \frac{ar}{2\gamma l \sqrt{\pi n}}.$$

Dem hier theoretisch untersuchten Falle entsprechen die im Eingange angeführten Versuche des Hrn. Kundt. Die Resultate derselben stimmen mit der für die Schallgeschwindigkeit hier abgeleiteten Formel in so fern überein, als auch nach dieser die Schallgeschwindigkeit um so mehr verringert wird, je enger die Röhre und je tiefer der Ton wird. Die Gröfse der beobachteten Verringerungen im Allgemeinen widerspricht der theoretischen Formel nicht, da in dieser der Coëfficient der Wärmeleitung ν, vorkommt, der, wenn die Strahlung berücksichtigt werden soll, so weit ich sehe, auch nicht näherungsweise geschätzt werden kann. Dafs bei Vermehrung des Druckes die Schallgeschwindigkeit wächst, erklärt sich daraus, dafs, wie bereits oben angeführt ist, die Gröfsen μ', μ'' und ν abnehmen, wenn der Druck vergröfsert wird. Wird die glatte Oberfläche der Röhre in eine rauhe verwandelt, so mufs der Einflufs der Reibung sowohl als der Wärmeleitung zunehmen, die Schallgeschwindigkeit also kleiner werden, wie es von Hrn. Kundt beobachtet ist. In einer Hinsicht aber besteht ein wesentlicher Mangel an Uebereinstimmung zwischen dem Versuch und der Theorie. Nach dieser soll unter sonst gleichen Umständen die Verringerung der Schallgeschwindigkeit dem Radius der Röhre umgekehrt proportional seyn; nach den Versuchen wächst sie bei abnehmendem Radius erheblich schneller als das Reciproke des Radius. Ich kann den Grund dieses Mangels an Uebereinstimmung nicht finden; doch möchte ich einen Umstand erwähnen, der vielleicht dabei mit im Spiele ist. Die Longitudinaltöne von Stäben — mit denen Hr. Kundt experimentirt hat — sind nicht einfache Töne; der Grundton ist von seinen harmonischen Obertönen begleitet; der einfache Ton, dem die beobachtete Schallgeschwindigkeit entsprach, konnte daher nicht genau mit dem Grundton des Stabes übereinstimmen, sondern mufste höher seyn, um so höher, je stärker die Obertöne im Verhältnifs zum Grundtone waren; dieses Verhältnifs aber hatte vielleicht verschiedene Werthe bei den Röhren von verschiedenem Durchmesser.

Heidelberg, Februar 1868.