Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungssysteme.

Von

LEO KOENIGSBERGER in Heidelberg.

Die von Natani für die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung angegebene*) und von Hamburger auf die Integration gleichzeitiger partieller Differentialgleichungssysteme erster und höherer Ordnung erweiterte**) Methode liefert die Möglichkeit, eine Discussion der Integrale zu bewerkstelligen, ähnlich wie sie Poincaré***) für zahlreiche Fälle *einer* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durchgeführt hat; doch bedarf jene Methode zuvor einiger Ausführungen und Ergänzungen, die ich in der vorliegenden Arbeit der Deutlichkeit und Durchsichtigkeit wegen an den partiellen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung und zweiter Classe mit zwei unabhängigen Variabeln auseinandersetzen und durch Beispiele erläutern will.

Ist ein lineares simultanes partielles Differentialgleichungssystem erster Ordnung und zweiter Classe mit den abhängigen Variabeln z_1 und z_2 , den unabhängigen Variabeln x und y von der Form vorgelegt

$$(1) \quad \begin{cases} A_{11} \frac{\partial z_1}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial z_2}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial z_1}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial z_2}{\partial y} + C_1 = 0, \\ A_{21} \frac{\partial z_1}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial z_2}{\partial x} + B_{21} \frac{\partial z_1}{\partial y} + B_{22} \frac{\partial z_2}{\partial y} + C_2 = 0, \end{cases}$$

worin die Grössen A, B, C gegebene Functionen von x, y, z_1 und z_2 sind, so werde dasselbe zunächst durch Elimination von $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ und mit Hülfe der Bezeichnung

*) Die höhere Analysis in 4 Abhandlungen, Berlin 1866, p. 365.

**) Journal für reine und angew. Mathematik Bd. 81, pag. 243 und Bd. 93, pag. 188.

***) Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Paris 1879.

$$(2) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} = p_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x} = p_2, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = q_1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial y} = q_2$$

auf die Gestalt gebracht

$$(3) \quad \begin{cases} p_1 + \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \beta_1 = 0, \\ p_2 + \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \beta_2 = 0, \end{cases}$$

was stets möglich ist, wenn die beiden Gleichungen (1) algebraisch von einander unabhängig sind und nicht ein totales Differentialgleichungssystem zweiter Classe bilden sollen; denn da sich aus (1) ergibt

$$(4) \quad \begin{cases} (A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}) \frac{\partial z_1}{\partial x} + (B_{11} A_{22} - B_{21} A_{12}) \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ + (B_{12} A_{22} - B_{22} A_{12}) \frac{\partial z_2}{\partial y} + C_1 A_{22} - C_2 A_{12} = 0, \\ (A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}) \frac{\partial z_2}{\partial x} + (B_{21} A_{11} - B_{11} A_{21}) \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ + (B_{22} A_{11} - B_{12} A_{21}) \frac{\partial z_2}{\partial y} + C_2 A_{11} - C_1 A_{21} = 0, \end{cases}$$

so würden sich nur dann die Gleichungen (3) nicht herstellen lassen, wenn

$$(4) \quad A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12} = 0$$

wäre, in welchem Falle jedoch entweder die Gleichungen (4) in zwei totale Differentialgleichungen mit der einen unabhängigen Variablen y und den beiden abhängigen z_1 und z_2 übergehen, oder wenn ausser (5) noch die Beziehungen

$$(6) \quad \begin{aligned} B_{11} A_{22} - B_{21} A_{12} &= 0, & B_{12} A_{22} - B_{22} A_{12} &= 0, \\ C_1 A_{22} - C_2 A_{12} &= 0 \end{aligned}$$

bestehen, die zweite Gleichung (1) durch Multiplication mit $\frac{A_{12}}{A_{22}}$ in die erste Gleichung (1) übergeführt wird, und das Differentialgleichungssystem (1) somit, da die beiden Differentialgleichungen algebraisch von einander abhängig sind, ein unbestimmtes wäre.

Es soll die Integration des partiellen Differentialgleichungssystems (3) mit der Integration totaler Differentialgleichungssysteme in Verbindung gebracht, und zum besseren Verständniss die analoge Erörterung für Differentialgleichungssysteme erster Classe vorausgeschickt werden.

Sei also die partielle Differentialgleichung

$$(7) \quad p + \alpha q + \beta = 0$$

vorgelegt und

$$(8) \quad f(x, y, z) = a,$$

worin α eine willkürliche Constante bedeutet, ein Integral derselben, so lässt sich für jede Functionalbeziehung (8) ein totales Differentialgleichungssystem

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = M, \quad \frac{dz}{dx} = N$$

aufstellen, von welchem die Gleichung (8) eine Integralgleichung ist, da man nur M und N so als Functionen von x, y, z zu bestimmen braucht, dass der Gleichung

$$(10) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M + \frac{\partial f}{\partial z} N = 0$$

identisch für alle x, y, z genügt wird, und es ist also dann, da aus (8)

$$p = - \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z}, \quad q = - \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$$

folgt, z als Function von x und y aus (8) dargestellt ein Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(11) \quad p + Mq - N = 0;$$

da aber (8) auch ein Integral von (7) sein soll, so werden M und N , ohne (8) zu kennen, so gewählt werden können, dass (7) und (11) zu gleicher Zeit bestehen, indem man

$$(12) \quad M = \alpha, \quad N = -\beta$$

setzt, und da dies für jedes Integral von (7) gültig bleibt, so folgt, dass alle Integrale von (7) Integralgleichungen des totalen Differentialgleichungssystems

$$(13) \quad \frac{dy}{dx} = \alpha, \quad \frac{dz}{dx} = -\beta$$

sind.

Uebertragen wir nun dieselbe Schlussform auf das partielle Differentialgleichungssystem (3), und sei

$$(14) \quad f_1(x, y, z_1, z_2) = \alpha_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = \alpha_2,$$

worin α_1 und α_2 willkürliche Constanten bedeuten, ein in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängiges Integralsystem dieser Differentialgleichungen, so ist zunächst klar, dass man stets zwei Gleichungen (14) in den Variablen x, y, z_1, z_2 als Integralgleichungen eines totalen Differentialgleichungssystems

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} = M, \quad \frac{dz_1}{dx} = N, \quad \frac{dz_2}{dx} = P$$

ansehen kann, indem man M, N, P nur aus den beiden in x, y, z_1, z_2 identischen Gleichungen

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} M + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} N + \frac{\partial f_1}{\partial z_2} P = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} M + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} N + \frac{\partial f_2}{\partial z_2} P = 0 \end{cases}$$

zu bestimmen braucht, oder es sind die aus zwei solchen Gleichungen sich ergebenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y , da

$$(17) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial z_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial z_1} : \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \frac{\partial f_1}{\partial z_2}, \\ p_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial z_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial z_2} : \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \frac{\partial f_1}{\partial z_2}, \\ q_1 = \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z_2} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial z_1} : \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \frac{\partial f_1}{\partial z_2}, \\ q_2 = \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial z_1} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial f_1}{\partial z_2} : \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \frac{\partial f_2}{\partial z_2} - \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \end{cases}$$

ist, stets ein Integralsystem des partiellen Differentialgleichungssystems

$$(18) \quad \begin{cases} p_1 + q_1 M - N = 0, \\ p_2 + q_2 M - P = 0, \end{cases}$$

worin M, N, P aus (16) hergeleitet sind. Nun sollen aber die Gleichungen (14) Integralgleichungen des partiellen Differentialgleichungssystems (3) sein, und es werden somit nur dann *alle* Integrale der Systeme (3) und (18) gemeinsame sein, wenn sich die letzteren unmittelbar identificiren lassen, wenn also

$$(19) \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha$$

ist, in welchem Falle

$$(20) \quad M = \alpha, \quad N = -\beta_1, \quad P = -\beta_2$$

gesetzt werden kann, so dass das totale Differentialgleichungssystem (15) ohne Kenntniss eines Integralsystems aufgestellt werden kann und sich somit der bekannte Jacobi'sche Satz ergibt, dass man, um das simultane partielle Differentialgleichungssystem

$$(21) \quad p_1 + \alpha q_1 + \beta_1 = 0, \quad p_2 + \alpha q_2 + \beta_2 = 0$$

allgemein zu integriren, nur das totale Differentialgleichungssystem

$$(22) \quad \frac{dy}{dx} = \alpha, \quad \frac{dz_1}{dx} = -\beta_1, \quad \frac{dz_2}{dx} = -\beta_2$$

zu integriren braucht. Sind dann

$$(23) \quad f_1(x, y, z_1, z_2) = \alpha_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = \alpha_2, \quad f_3(x, y, z_1, z_2) = \alpha_3$$

drei von einander unabhängige Integrale des Systemes (22), so werden z_1 und z_2 , aus den beiden Gleichungen

$$(21) \quad \varphi_1(f_1, f_2, f_3) = 0, \quad \varphi_2(f_1, f_2, f_3) = 0$$

bestimmt, in denen φ_1 und φ_2 willkürliche Functionen bedeuten, die allgemeinen Integralfunctionen des Systemes (21) ergeben.

Sind jedoch die Gleichungen (19) nicht erfüllt, so lassen sich die Systeme (3) und (18) nicht identificiren, und man kann nur M, N, P ohne Kenntniss der Integrale so zu bestimmen suchen, dass eine lineare Verbindung der Gleichungen des einen Systems einer eben-

solchen Verbindung der Gleichungen des anderen Systems identisch gleich ist, dass also

$$(25) \quad \lambda(p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1) + \mu(p_2 + \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2) \\ = \lambda(p_1 + q_1 M - N) + \mu(p_2 + q_2 M - P)$$

ist, woraus sich durch Identificirung, indem M, N, P nicht von den Integralfunctioren sondern nur von den Coefficienten des partiellen Differentialgleichungssystems abhängen sollen,

$$(26) \quad \begin{cases} \lambda(\alpha_{11} - M) + \mu\alpha_{21} = 0, \\ \lambda\alpha_{12} + \mu(\alpha_{22} - M) = 0 \end{cases}$$

und

$$(27) \quad \lambda(\beta_1 + N) + \mu(\beta_2 + P) = 0$$

ergiebt. Bezeichnet nun M_1 eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$(28) \quad (\alpha_{11} - M)(\alpha_{22} - M) - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0,$$

so wird sich

$$(29) \quad \lambda_1 = \alpha_{21}, \quad \mu_1 = M_1 - \alpha_{11}$$

ergeben, während die zu M_1 gehörigen Werthe N_1 und P_1 nur der Gleichung zu genügen brauchen

$$(30) \quad \alpha_{21}(\beta_1 + N_1) + (M_1 - \alpha_{11})(\beta_2 + P_1) = 0,$$

und da nun das totale Differentialgleichungssystem (15) mit dem partiellen (18) identisch ist, so folgt aus (25), da ein Verschwinden der rechten Seite auch das der linken Seite nach sich zieht, dass die aus zwei beliebigen in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängigen Integralgleichungen

$$(31) \quad f_1(x, y, z_1, z_2) = \alpha_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = \alpha_2$$

des totalen Differentialgleichungssystems

$$(32) \quad \frac{dy}{dx} = M_1, \quad \frac{dz_1}{dx} = N_1, \quad \frac{dz_2}{dx} = P_1$$

oder der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(33) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} N_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} P_1 = 0$$

bestimmten Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integralfunctioren der partiellen Differentialgleichung mit zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variablen sind

$$(34) \quad \alpha_{21}(p + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1) + (M_1 - \alpha_{11})(p_2 + \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2) = 0.$$

Sei z. B. das Differentialgleichungssystem

$$(35) \quad \begin{cases} p_1 + z_1 q_1 + z_2 q_2 + \frac{2y(z_2 - z_1) - 2x}{z_2 - 2z_1} = 0, \\ p_2 + 2z_1 q_1 + 2z_2 q_2 + \frac{y(2z_2 - 5z_1) + x}{z_2 - 2z_1} = 0, \end{cases}$$

so würde die in M quadratische Gleichung

$$(36) \quad M^2 - (2z_2 + z_1)M = 0$$

lauten, und daher nach (29) und (30)

$$(37) \quad \begin{cases} M_1 = 0, \quad \lambda_1 = 2z_1, \quad \mu_1 = -z_1, \\ 2z_1 N_1 - z_1 P_1 = 2z_1 \frac{2x - 2y(z_2 - z_1)}{z_2 - 2z_1} + z_1 \frac{y(2z_2 - 5z_1) + x}{z_2 - 2z_1} \end{cases}$$

zu setzen sein. Wählen wir

$$(38) \quad N_1 = \frac{2x - yz_2}{z_2 - 2z_1}, \quad P_1 = \frac{yz_1 - x}{z_2 - 2z_1},$$

so wird die letzte der Gleichungen (37) identisch befriedigt, und das totale Differentialgleichungssystem (32) oder die lineare partielle Differentialgleichung (33) gehen über in

$$(39) \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{2x - yz_2}{z_2 - 2z_1}, \quad \frac{dz_2}{dx} = \frac{yz_1 - x}{z_2 - 2z_1}$$

und

$$(40) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{2x - yz_2}{z_2 - 2z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{yz_1 - x}{z_2 - 2z_1} = 0;$$

nun sind drei von einander unabhängige Integrale des totalen Systems (39), wie leicht zu sehen,

$$(41) \quad y = a_1, \quad xy + z_1 + 2z_2 = a_2, \quad x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2 = a_3,$$

und es müssten nach dem eben bewiesenen Satze die aus den Gleichungen

$$(42) \quad \begin{cases} \varphi_1(y, xy + z_1 + 2z_2, x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0, \\ \varphi_2(y, xy + z_1 + 2z_2, x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0, \end{cases}$$

worin φ_1 und φ_2 willkürliche Functionen bedeuten, hervorgehenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integrale der Differentialgleichung

$$(43) \quad 2z_1 \left(p_1 + z_1 q_1 + z_2 q_2 + \frac{2y(z_2 - z_1) - 2x}{z_2 - 2z_1} \right) - z_1 \left(p_2 + 2z_1 q_1 + 2z_2 q_2 + \frac{y(2z_2 - 5z_1) + x}{z_2 - 2z_1} \right) = 0$$

oder einfacher

$$(44) \quad 2p_1 - p_2 + \frac{y(2z_2 + z_1) - 5x}{z_2 - 2z_1} = 0$$

sein; in der That liefert die partielle Differentiation von (42) nach x die Beziehungen

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial (xy + z_1 + 2z_2)} (y + p_1 + 2p_2) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial (x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2)} (2x + 2z_1 p_1 + 2z_2 p_2) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial (xy + z_1 + 2z_2)} (y + p_1 + 2p_2) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial (x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2)} (2x + 2z_1 p_1 + 2z_2 p_2) = 0$$

und wegen der Unabhängigkeit der willkürlichen Functionen φ_1 und φ_2 von einander

$$(45) \quad y + p_1 + 2p_2 = 0, \quad x + z_1 p_1 + z_2 p_2 = 0,$$

welche die Gleichung (44) identisch befriedigen.

Da der oben in den Gleichungen (31) bis (34) ausgesprochene Satz für die beiden Lösungen M_1 und M_2 der quadratischen Gleichung (28), die wir zunächst als verschieden annehmen, gilt, so folgt,

dass, wenn

$$(46) \quad f_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = a_2$$

zwei in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängige gleichzeitige Integralgleichungen der beiden totalen Differentialgleichungssysteme

$$(47) \quad \frac{dy}{dx} = M_1, \quad \frac{dz_1}{dx} = N_1, \quad \frac{dz_2}{dx} = P_1$$

und

$$(48) \quad \frac{dy}{dx} = M_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = N_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = P_2$$

oder der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} N_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} P_1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M_2 + \frac{\partial f}{\partial z_1} N_2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} P_2 = 0 \end{cases}$$

sind, die aus den beiden Gleichungen (46) hervorgehenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integralfunctionen der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(50) \quad \begin{cases} \alpha_{21}(p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1) + (M_1 - \alpha_{11})(p_2 + \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2) = 0, \\ \alpha_{21}(p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1) + (M_2 - \alpha_{11})(p_2 + \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2) = 0 \end{cases}$$

also des gegebenen Differentialgleichungssystems

$$(51) \quad p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1 = 0, \quad p_2 + \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2 = 0$$

sein werden, und zugleich ist unmittelbar ersichtlich, dass die aus

$$(52) \quad \varphi_1(f_1, f_2) = 0, \quad \varphi_2(f_1, f_2) = 0$$

sich ergebenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y das allgemeine Integralsystem der Differentialgleichungen (51) liefern werden, wenn φ_1 und φ_2 willkürliche Functionen bedeuten,

da aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} M + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} N + \frac{\partial f_1}{\partial z_2} P &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} M + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} N + \frac{\partial f_2}{\partial z_2} P &= 0 \end{aligned}$$

durch Multiplication mit $\frac{\partial \varphi}{\partial f_1}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial f_2}$ und Addition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} M + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} N + \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} P = 0$$

folgt.

Wenden wir die eben gemachten Auseinandersetzungen auf das vorige Beispiel an, so wird für die zweite Lösung der quadratischen Gleichung (36)

$$(53) \quad M_2 = z_1 + 2z_2$$

nach (29) und (30)

$$(54) \quad \begin{cases} \lambda_2 = 2z_1, \mu_2 = 2z_2, \\ 2z_1 N_2 + 2z_2 P_2 = 2z_1 \frac{2x - 2y(z_2 - z_1)}{z_2 - 2z_1} + 2z_2 \frac{y(5z_1 - 2z_2) - x}{z_2 - 2z_1} \end{cases}$$

folgen, und wählen wir

$$(55) \quad N_2 = \frac{2x - yz_2 + (2z_2 - z_1)(2y - xz_2)}{z_2 - 2z_1}, \quad P_2 = \frac{z_1 y - x + (2z_2 + z_1)(z_1 x - y)}{z_2 - 2z_1},$$

so wird das dem Systeme (39) entsprechende totale Differentialgleichungssystem

$$(56) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z_1 + 2z_2, & \frac{dz_1}{dx} = \frac{2x - yz_2 + (2z_2 + z_1)(2y - xz_2)}{z_2 - 2z_1}, \\ & \frac{dz_2}{dx} = \frac{z_1 y - x + (2z_2 + z_1)(z_1 x - y)}{z_2 - 2z_1} \end{cases}$$

oder die der Gleichung (40) analoge lineare partielle Differentialgleichung

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} (z_1 + 2z_2) + \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{2x - yz_2 + (2z_2 + z_1)(2y - xz_2)}{z_2 - 2z_1} \\ + \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{z_1 y - x + (2z_2 + z_1)(z_1 x - y)}{z_2 - 2z_1} = 0 \end{cases}$$

lauten; nun sind aber

$$(58) \quad xy + z_1 + 2z_2 = A, \quad x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2 = B,$$

wie durch Verification unmittelbar folgt, gemeinsame Integralgleichungen der totalen Differentialgleichungssysteme (39) und (56) oder der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (40) und (57), und es werden somit nach dem oben bewiesenen Satze, wenn φ_1 und φ_2 zwei willkürliche Functionen bedeuten, die aus den beiden Gleichungen

$$(59) \quad \begin{cases} \varphi_1(xy + z_1 + 2z_2, x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0, \\ \varphi_2(xy + z_1 + 2z_2, x^2 + y^2 + z_1^2 + z_2^2) = 0 \end{cases}$$

hervorgehenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y die allgemeinen Integralfunctionen des partiellen Differentialgleichungssystems (35) sein.

Doch ist mit dem ausgesprochenen Satze nicht eine allgemeine Methode für die Zurückführung der Integration des simultanen par-

tiellen Differentialgleichungssystem (51) auf totale Differentialgleichungssysteme gegeben, da nicht immer zwei solche Systeme (47) und (48) oder das simultane partielle Differentialgleichungssystem (49) zwei gleichzeitige Integrale (46) besitzen, es werden vielmehr unter den Coefficienten der Differentialgleichungen (51) Bedingungen bestehen müssen, auf deren Entwicklung ich nunmehr eingehen will, und wobei ich es des Folgenden wegen vorziehe, auch das aus der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungssysteme Bekannte an dem vorliegenden speciellen Falle zu entwickeln.

Sollen die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} N_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2} P_1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M_2 + \frac{\partial f}{\partial z_1} N_2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} P_2 = 0 \end{cases}$$

eine gemeinsame Integralfunctio n f_1 haben, so muss dasselbe zunächst auch, wenn

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{M_1 N_2 - M_2 N_1}{M_1 - M_2} = K, & \frac{M_1 P_2 - M_2 P_1}{M_1 - M_2} = L, & \frac{N_1 - N_2}{M_1 - M_2} = K_1, \\ & \frac{P_1 - P_2}{M_1 - M_2} = L_1 \end{cases}$$

gesetzt wird, für die beiden Differentialgleichungen

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + L \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \end{cases}$$

der Fall sein; da nun $f = f_1$ die linke Seite der zweiten Gleichung identisch Null macht und $f = 0$ auch der ersten genügt, so wird für $f = f_1$ auch die partielle Differentialgleichung erfüllt sein

$$(63) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) + K \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) \\ + L \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) = 0$$

und ebenso

$$(64) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + L \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) + K_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + L \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) \\ + L_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + L \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) = 0,$$

woraus sich durch Substitution

$$(65) \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} \left(\frac{\partial K_1}{\partial x} + K \frac{\partial K_1}{\partial z_1} + L \frac{\partial K_1}{\partial z_2} - \frac{\partial K}{\partial y} - K_1 \frac{\partial K}{\partial z_1} - L_1 \frac{\partial K}{\partial z_2} \right) \\ + \frac{\partial f}{\partial z_2} \left(\frac{\partial L_1}{\partial x} + K \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + L \frac{\partial L_1}{\partial z_2} - \frac{\partial L}{\partial y} - K_1 \frac{\partial L}{\partial z_1} - L_1 \frac{\partial L}{\partial z_2} \right) = 0$$

ergiebt, oder kürzer

$$(66) \quad R_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + R_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0.$$

Sollen aber die beiden partiellen Differentialgleichungen (60) oder (62) zwei in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängige Integrale besitzen

$$(67) \quad f_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = a_2,$$

die also dann auch der Gleichung (66) genügen müssen, so dass identisch in x, y, z_1, z_2 die beiden Beziehungen bestehen

$$(68) \quad R_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + R_2 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = 0, \quad R_1 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + R_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} = 0,$$

so muss, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

in Folge der Annahme, dass die beiden Functionen f_1 und f_2 in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängig sein sollen, nicht identisch verschwinden darf,

$$(69) \quad R_1 = 0, \quad R_2 = 0$$

sein, und wir erhalten somit als *nothwendige Bedingung dafür*, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen (60) oder (62) zwei in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängige Integrale besitzen

$$(70) \quad \frac{\partial K_1}{\partial x} + K \frac{\partial K_1}{\partial z_1} + L \frac{\partial K_1}{\partial z_2} - \frac{\partial K}{\partial y} - K_1 \frac{\partial K}{\partial z_1} - L_1 \frac{\partial K}{\partial z_2} = 0,$$

$$(71) \quad \frac{\partial L_1}{\partial x} + K \frac{\partial L_1}{\partial z_1} + L \frac{\partial L_1}{\partial z_2} - \frac{\partial L}{\partial y} - K_1 \frac{\partial L}{\partial z_1} - L_1 \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0.$$

Wir wollen nunmehr zeigen, dass diese Bedingungen auch die *hinreichenden sind*.

Denn seien

$$(72) \quad F_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad F_2(x, y, z_1, z_2) = a_2$$

zwei beliebige von einander unabhängige Integrale der ersten der Gleichungen (62), so wollen wir statt x, y, z_1, z_2 vier neue Variable X, Y, Z_1, Z_2 durch die Substitutionsgleichungen einführen

$$(73) \quad X = \varphi(x, y, z_1, z_2), \quad Y = y, \quad Z_1 = F_1(x, y, z_1, z_2), \quad Z_2 = F_2(x, y, z_1, z_2),$$

worin $\varphi(x, y, z_1, z_2)$ irgend eine Function bedeutet, die aber nicht eine Integralfunction der ersten Gleichung (62) sein darf; da sodann

$$(74) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Z_1} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Z_2} \frac{\partial F_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial Z_1} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial Z_2} \frac{\partial F_2}{\partial z_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial z_2} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial z_2} + \frac{\partial f}{\partial Z_1} \frac{\partial F_1}{\partial z_2} + \frac{\partial f}{\partial Z_2} \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \end{cases}$$

folgt, so ergibt sich durch Multiplication dieser Gleichungen mit 1, K , L und Addition, da F_1 und F_2 Integralfunctionen der ersten Gleichung (62) waren, für jede Integralfunction eben dieser Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial X} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + K \frac{\partial X}{\partial z_1} + L \frac{\partial X}{\partial z_2} \right) = 0,$$

und daher, da X keine solche Integralfunction sein sollte,

$$(75) \quad \frac{\partial f}{\partial X} = 0,$$

welche an Stelle der ersten der partiellen Differentialgleichungen (62) tritt, während die zweite wegen

$$(76) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial Z_1} \frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Z_2} \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

und der beiden letzten Gleichungen (74), mit Hülfe von (75) in

$$(77) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial Y} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \right) \frac{\partial f}{\partial Z_1} \\ + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \right) \frac{\partial f}{\partial Z_2} = 0 \end{aligned}$$

übergeht. Es fragt sich nun, ob die beiden transformirten partiellen Differentialgleichungen (75) und (77) gemeinsame Integrale haben, wie viele und welche, wenn die Grössen K , L , K_1 , L_1 den vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen (70) und (71) identisch Genüge leisten. Da unter dieser Annahme mit Beibehaltung der Bezeichnungen R_1 und R_2 , wenn F die Integralfunctionen F_1 oder F_2 bedeutet, auch

$$(78) \quad L_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + R_2 \frac{\partial F}{\partial z_2} = 0$$

identisch erfüllt ist, so wird auch nach (63), (64), (65) der Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) + K \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) \\ + L \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + K \frac{\partial F}{\partial z_1} + L \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) + K_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + K \frac{\partial F}{\partial z_1} + L \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) \\ + L_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + K \frac{\partial F}{\partial z_1} + L \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) \end{aligned}$$

oder, da F ein Integral der ersten der Gleichungen (62) sein sollte, auch der Gleichung

$$(79) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) + K \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) \\ + L \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F}{\partial z_2} \right) = 0$$

identisch genügt werden; daraus folgt aber, dass

$$\frac{\partial F}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F}{\partial z_2}$$

eine Integralfunction der ersten Gleichung (62) sein muss und somit vermöge (75)

$$(80) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F_2}{\partial z_1} + L_1 \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \right) = 0 \end{cases}$$

ist. Es kommt somit in der Differentialgleichung (77) die Variable X gar nicht vor, und es wird daher jede Integralfunction der Differentialgleichung (77) eine dem transformirten Systeme (75) und (77) also auch dem ursprünglichen Differentialgleichungssysteme (62) gemeinsame sein; es besitzt also das partielle Differentialgleichungssystem (62) stets zwei und nur zwei von einander unabhängige Integralfunctionen, welche man durch Integration der linearen partiellen Differentialgleichung (77) mit einer abhängigen und drei unabhängigen Variablen erhält,

und zugleich folgt, dass, wenn

$$(81) \quad f_1(x, y, z_1, z_2) = \alpha_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = \alpha_2$$

zwei von einander unabhängige gemeinsame Integralgleichungen der beiden partiellen Differentialgleichungen (62) sind, auch jede willkürliche Function $\varphi(f_1, f_2)$ den beiden Differentialgleichungen genügen wird.

Sind somit die durch die Gleichungen (70) und (71) ausgedrückten Bedingungen zwischen den Coefficienten des gegebenen linearen partiellen Differentialgleichungssystems (51) erfüllt, so ist die Integration dieses Systems unter der Voraussetzung ungleicher Lösungen der quadratischen Gleichung (28) auf die Integration zweier totaler Differentialgleichungssysteme zurückgeführt.

Wir wollen nun zunächst noch die Form der Bedingungen (70) und (71) etwas genauer untersuchen. Da nämlich der Gleichung (30) zufolge, weil sich aus (28) die Gleichung

$$(82) \quad M_1 + M_2 = \alpha_{11} + \alpha_{22} \quad \text{oder} \quad M_1 - \alpha_{11} = \alpha_{22} - M_2$$

ergiebt, die beiden Beziehungen bestehen

$$(83) \quad \begin{cases} \alpha_{21} N_1 - (M_2 - \alpha_{22}) P_1 = -\alpha_{21} \beta_1 + (M_2 - \alpha_{22}) \beta_2, \\ \alpha_{21} N_2 - (M_1 - \alpha_{22}) P_2 = -\alpha_{21} \beta_1 + (M_1 - \alpha_{22}) \beta_2, \end{cases}$$

so folgt durch Subtraction

$$\alpha_{21}(N_1 - N_2) + (M_1 P_2 - M_2 P_1) + \alpha_{22}(P_1 - P_2) = - (M_1 - M_2)\beta_2$$

oder nach (61)

$$(84) \quad \alpha_{21} K_1 + L + \alpha_{22} L_1 = - \beta_2,$$

und da sich die Gleichungen (83) vermöge der Gleichung (28) in die Form setzen lassen

$$(85) \quad \begin{cases} (M_2 - \alpha_{11})N_1 - \alpha_{12}P_1 = - (M_2 - \alpha_{11})\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2, \\ (M_1 - \alpha_{11})N_2 - \alpha_{12}P_2 = - (M_1 - \alpha_{11})\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2, \end{cases}$$

so folgt ebenso

$$\alpha_{11}(N_1 - N_2) + M_1 N_2 - N_1 M_2 + \alpha_{12}(P_1 - P_2) = - (M_1 - M_2)\beta_1$$

oder nach (61)

$$(86) \quad \alpha_{11} K_1 + K + \alpha_{12} L_1 = - \beta_1,$$

wonach sich aus (84) und (86)

$$(87) \quad K = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} L + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{21}} L_1,$$

$$(88) \quad K_1 = - \frac{\beta_2}{\alpha_{21}} - \frac{1}{\alpha_{21}} L - \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} L_1.$$

ergiebt, so dass, wenn wir diese Werthe von K und K_1 in die beiden Bedingungsgleichungen (70) und (71) einsetzen, wir zwei identisch zu erfüllende Differentialbeziehungen in den Grössen $L, L_1, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ erhalten, worin die beiden ersten vermöge der Gleichungen (61), (28) und (30) von den 6 letzteren abhängen. Da nun die Grössen N und P mit M nur durch die *eine* Gleichung

$$(89) \quad \alpha_{21}(\beta_1 + N) + (M - \alpha_{11})(\beta_2 + P) = 0$$

mit einander verbunden sind, so wird man P_1 und P_2 willkürlich — nur von Null verschieden — annehmen dürfen, und daher auch, weil sich aus (61)

$$(90) \quad P_1 = L + M_1 L_1, \quad P_2 = L + M_2 L_1$$

ergiebt, und M_1 der Voraussetzung nach von M_2 verschieden ist, L und L_1 willkürlich wählen können, so dass nach getroffener Wahl und Herstellung der Werthe von K und K_1 aus den Gleichungen (87) und (88) die beiden Bedingungsgleichungen (70) und (71) in zwei durch die Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ identisch zu erfüllende Beziehungen übergehen. Wäre es möglich, die beiden in L und L_1 sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen mit den beiden abhängigen Variabeln L und L_1 , und den 4 unabhängigen Variabeln x, y, z_1, z_2 unabhängig von der Beschaffenheit der α und β zu integrieren, so wäre die Integration eines jeden linearen partiellen Differentialgleichungssystems auf die Integration eines totalen Systems zurückführbar; aber da diese Aufgabe schon wieder die Integration eines

partiellen Differentialgleichungssystems erfordert, also die Bestimmung der L und L_1 im Allgemeinen nicht möglich ist, so muss man die Reduction auf ein System totaler Differentialgleichungen im Allgemeinen als unmöglich bezeichnen*), und sehen, durch eine passende Wahl der völlig willkürlichen Functionen L und L_1 die für die α und β sich ergebenden Bedingungen so einfach als möglich zu gestalten. Für eine willkürliche Bestimmung der L und L_1 werden sich im Allgemeinen stets zwei Bedingungsgleichungen in den α und β ergeben, die erfüllt sein müssen, damit die Integration des gegebenen linearen partiellen Differentialgleichungssystems sich auf die von totalen Differentialgleichungssystemen mit den gewählten Werthen von L und L_1 zurückführen lässt, und *es wird sich nun fragen, ob wir nicht die L und L_1 unabhängig von den Werthen der α und β so bestimmen können, dass die α und β in allen diesen Fällen nur einer Bedingung unterliegen.* Man sieht aber unmittelbar, dass, wenn für L und L_1 beliebige Functionen resp. von x und y gewählt werden

$$(91) \quad L = \varphi(x), \quad L_1 = \varphi_1(y),$$

die zweite Bedingungsgleichung (71) identisch erfüllt wird und somit nur noch (70) identisch zu genügen ist; nehmen wir der Einfachheit wegen

$$(92) \quad L = 1, \quad L_1 = 1,$$

— wobei jedoch zu bemerken, dass die vorher getroffene Wahl eine allgemeinere von den α und β zu erfüllende Bedingung für die Reduction auf ein totales Differentialgleichungssystem liefern wird — *so erhalten wir als einzige durch die α und β zu erfüllende Bedingung*

$$(93) \quad \frac{\partial K_1}{\partial x} + K \frac{\partial K_1}{\partial z_1} + \frac{\partial K_1}{\partial z_2} - \frac{\partial K}{\partial y} - K_1 \frac{\partial K}{\partial z_1} - \frac{\partial K}{\partial z_2} = 0,$$

worin nach den Gleichungen (87) und (88)

$$(94) \quad \begin{cases} K = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{21}}, \\ K_1 = -\frac{\beta_2}{\alpha_{21}} - \frac{1}{\alpha_{21}} - \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \end{cases}$$

wird. Für die getroffene Wahl von L und L_1 gehen die partiellen Differentialgleichungen (62) in

*) Um für ein vorgelegtes partielles lineares Differentialgleichungssystem die Integration auf ein totales Differentialgleichungssystem zurückzuführen, setzt man die Werthe für $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ in diese beiden Bedingungsgleichungen ein und sieht zu, ob diese durch eine einfache Wahl der L und L_1 , deren Bestimmung nicht wieder eine Integration erfordert, identisch befriedigt werden können; sind solche Werthe von L und L_1 gefunden, so ist das Problem in der früher durchgeführten Weise lösbar.

$$(95) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + K \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$(96) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + K_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$$

über, worin K und K_1 durch die Gleichungen (94) bestimmt sind, und da nach der oben angegebenen Methode zunächst zwei von einander unabhängige Integrale der Gleichung (95) zu suchen sind, diese aber durch zwei Integralfunktionen des totalen Differentialgleichungssystems

$$(97) \quad \frac{dz_2}{dx} = 1, \quad \frac{dz_1}{dx} = K$$

gegeben werden, so wird die eine dieser Integralfunktionen

$$(98) \quad F_2 = z_2 - x = a_2$$

allen diesen Problemen gemeinsam sein, während die zweite durch

$$(99) \quad F_1(x, y, z_1, z_2) = a_1$$

bestimmt sein mag; da ferner die Gleichung (77) für die getroffene Wahl der L und L_1 vermöge (98) und (99) in

$$(100) \quad \frac{\partial f}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial Z_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \right) + \frac{\partial f}{\partial Z_2} = 0$$

übergeht, so wird deren Integration, wenn

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} + K_1 \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_1}{\partial z_2} \text{ durch } \omega(Y, Z_1, Z_2)$$

bezeichnet wird, indem der Ausdruck, wie oben gezeigt worden, von X unabhängig ist, auf das totale Differentialgleichungssystem führen

$$(101) \quad \frac{dZ_2}{dY} = 1, \quad \frac{dZ_1}{dY} = \omega(Y, Z_1, Z_2),$$

und somit wieder die Integralfunktionen liefern

$$(102) \quad Z_2 - Y = A_1, \quad \Omega(Y, Z_1, Z_2) = A_2,$$

von denen die erste in

$$(103) \quad z_2 - x - y = A_1$$

übergeht und somit ein allen jenen Problemen, für welche die Bedingungsgleichung (93) erfüllt ist, angehöriges gemeinsames Integral der beiden partiellen Differentialgleichungen (49) oder der beiden totalen Differentialgleichungssysteme (47) und (48) liefert.

Wir untersuchen nun noch den Fall, dass die Coefficienten α und β in dem vorgelegten linearen partiellen Differentialgleichungssystem

$$(104) \quad p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1 = 0, \quad p_2 + \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2 = 0$$

nur von x und y , nicht aber von z_1 und z_2 abhängen, und sehen unmittelbar, dass dann die Bedingungsgleichungen (70) und (71), wenn L und L_1 als beliebige Functionen von x und y gewählt werden, vermöge der Gleichungen (87) und (88) in

$$(105) \quad \frac{\partial K_1}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial y}, \quad \frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}$$

übergehen, so dass, wenn wiederum $L = L_1 = 1$ gewählt wird, die einzige zu erfüllende Bedingung nach (87) und (88) durch die identische Beziehung

$$(106) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta_2}{\alpha_{21}} + \frac{1}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{21}} \right) = 0$$

oder, wenn die Differentialgleichungen (104) linear homogen also $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ist, durch

$$(107) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{21}} \right) = 0$$

gegeben ist.

Sei z. B. das homogene lineare Differentialgleichungssystem vorgelegt

$$(108) \quad \begin{cases} p_1 - \frac{x^2+y}{x+y^2} q_1 + x^2 q_2 = 0, \\ p_2 - \frac{1}{x+y^2} q_1 + q_2 = 0, \end{cases}$$

so geht die Bedingungsgleichung (107) in

$$\frac{\partial}{\partial x} (-x - y^2 - x - y^2) + \frac{\partial}{\partial y} \left((x^2 + y - (x + y^2)) \left(-\frac{x^2+y}{x+y^2} + \frac{x^2}{x+y^2} \right) \right) = 0$$

über und ist somit identisch erfüllt; da nun nach den Gleichungen (87) und (88)

$$K = x^2 + 2y, \quad K_1 = 2x + 2y^2$$

folgt, so werden die beiden partiellen Differentialgleichungen (62)

$$(109) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + (x^2 + 2y) \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$(110) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + (2x^2 + 2y) \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$$

zwei gemeinsame Integrale besitzen. Um diese zu ermitteln, setze man nach der oben angegebenen Methode

$$(111) \quad \frac{dz_1}{dx} = x^2 + 2y, \quad \frac{dz_2}{dx} = 1,$$

woraus sich die beiden Integralfunktionen

$$(112) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z_1, z_2) = z_1 - \frac{x^3}{3} - 2xy = a_1, \\ F_2(x, y, z_1, z_2) = z_2 - x = a_2 \end{cases}$$

ergeben, und es geht sodann die Differentialgleichung (100) in

$$(113) \quad \frac{\partial f}{\partial Y} + 2Y^2 \frac{\partial f}{\partial Z_1} + \frac{\partial f}{\partial Z_2} = 0$$

über. Da aber diese durch das totale System integrirt wird,

$$\frac{dZ_1}{dY} = 2Y^2, \quad \frac{dZ_2}{dY} = 1,$$

so ergeben sich die von einander unabhängigen Integralfunctionen

$$(114) \quad Z_1 - \frac{2}{3} Y^3 = A_1, \quad Z_2 - Y = A_2$$

oder vermöge (112)

$$(115) \quad z_1 - \frac{x^3}{3} - 2xy - \frac{2}{3} y^3 = A_1, \quad z_2 - x - y = A_2,$$

so dass die allgemeinen Integralfunctionen z_1 und z_2 als Functionen von x und y für das vorgelegte Differentialgleichungssystem (108) durch die Gleichungen gegeben sind

$$(116) \quad \begin{cases} \varphi_1 \left(z_1 - \frac{x^3}{3} - 2xy - \frac{2}{3} y^3, z_2 - x - y \right) = 0, \\ \varphi_2 \left(z_1 - \frac{x^3}{3} - 2xy - \frac{2}{3} y^3, z_2 - x - y \right) = 0, \end{cases}$$

worin φ_1 und φ_2 zwei von einander unabhängige willkürliche Functionen bedeuten.

Alle aus dem in den Gleichungen (31) bis (34) ausgesprochenen Satze gezogenen Folgerungen hatten zur Voraussetzung, dass die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung (28) von einander verschieden sind, indem sich nur dann aus der Gleichung (34) schliessen liess, dass nicht bloss diese lineare Verbindung der linken Seiten des vorgelegten linearen partiellen Differentialgleichungssystems (3) durch die gefundenen Werthe z_1 und z_2 als Functionen von x und y befriedigt wurde, sondern durch dieselben auch den Gleichungen (3) selbst genügt wurde.

Mag nun jetzt für das lineare Differentialgleichungssystem

$$(117) \quad \begin{cases} p_1 + \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \beta_1 = 0, \\ p_2 + \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \beta_2 = 0 \end{cases}$$

die quadratische Gleichung

$$(118) \quad (\alpha_{11} - M)(\alpha_{22} - M) - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0$$

gleiche Lösungen haben, also

$$(119) \quad (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 - 4\alpha_{12}\alpha_{21} = 0$$

und

$$(120) \quad M = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2}$$

sein, so werden N und P nach der Gleichung (30) durch die Beziehung

$$(121) \quad \alpha_{21}(\beta_1 + N) + (M - \alpha_{11})(\beta_2 + P) = 0$$

mit einander verbunden sein, und wenn

$$(122) \quad f_1(x, y, z_1, z_2) = a_1, \quad f_2(x, y, z_1, z_2) = a_2$$

zwei beliebige in Bezug auf z_1 und z_2 von einander unabhängige Integralgleichungen des totalen Differentialgleichungssystems

$$(123) \quad \frac{dy}{dx} = M, \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} = N, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x} = P$$

oder der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(124) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} M + \frac{\partial f}{\partial z_1} N + \frac{\partial f}{\partial z_2} P = 0$$

sind, so werden die durch (122) bestimmten Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integralfunctionen der partiellen Differentialgleichung

$$(125) \quad \alpha_{21}(p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1) + (M - \alpha_{11})(p_2 + \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2) = 0$$

sein. Denken wir uns nun einen der Coefficienten der Differentialgleichungen (117) z. B. α_{21} unendlich wenig verändert, so dass er in α'_{21} übergehend der quadratischen Gleichung (118) verschiedene Lösungen giebt, so werden die Integralfunctionen z_1 und z_2 als Functionen von x und y , welche dem Differentialgleichungssystem

$$(126) \quad \begin{cases} \alpha'_{21}(p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1) + (M_1 - \alpha_{11})(p_2 + \alpha'_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2) = 0, \\ \alpha'_{21}(p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1) + (M_2 - \alpha_{11})(p_2 + \alpha'_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2) = 0, \end{cases}$$

oder

$$(126a) \quad p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta = 0, \quad p_2 = \alpha'_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2 = 0$$

genügen, nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen in folgender Weise gefunden werden können: sind M_1 und M_2 die verschiedenen Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(127) \quad (\alpha_{11} - M)(\alpha_{22} - M) - \alpha_{12}\alpha'_{21} = 0,$$

so denkt man sich aus den durch Einsetzen der Werthe

$$(128) \quad \begin{cases} K' = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha'_{21}} + \frac{\alpha_{11}}{\alpha'_{21}}L' + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha'_{21}}{\alpha'_{21}}L'_1, \\ K'_1 = -\frac{\beta_2}{\alpha'_{21}} - \frac{1}{\alpha'_{21}}L' - \frac{\alpha_{22}}{\alpha'_{21}}L'_1 \end{cases}$$

in die Bedingungsgleichungen

$$(129) \quad \begin{cases} \frac{\partial K'_1}{\partial x} + K' \frac{\partial K'_1}{\partial z_1} + L' \frac{\partial K'_1}{\partial z_2} - \frac{\partial K'}{\partial y} - K'_1 \frac{\partial K'}{\partial z_1} - L'_1 \frac{\partial K'}{\partial z_2} = 0, \\ \frac{\partial L'_1}{\partial x} + K' \frac{\partial L'_1}{\partial z_1} + L' \frac{\partial L'_1}{\partial z_2} - \frac{\partial L'}{\partial y} - K'_1 \frac{\partial L'}{\partial z_1} - L'_1 \frac{\partial L'}{\partial z_2} = 0 \end{cases}$$

erhaltenen partiellen linearen Differentialgleichung L' und L'_1 als Functionen von x, y, z_1, z_2 bestimmt — es ist die wirkliche Bestim-

mung, die, wie früher hervorgehoben worden, schon die Lösung desselben Problems für 4 unabhängige Variable erfordern würde, für das Folgende nicht nöthig — bestimme aus den gefundenen Werthen von L' und L_1' vermöge der den Gleichungen (90) analogen Beziehungen

$$(130) \quad P_1 = L' + M_1 L_1', \quad P_2 = L' + M_2 L_1',$$

sodann aus den den Gleichungen (83) entsprechenden Beziehungen

$$(131) \quad \begin{cases} \alpha'_{21} N_1 - (M_2 - \alpha_{22}) P_1 = -\alpha'_{21} \beta_1 + (M_2 - \alpha_{22}) \beta_2, \\ \alpha'_{21} N_2 - (M_1 - \alpha_{22}) P_2 = -\alpha'_{21} \beta_1 + (M_1 - \alpha_{22}) \beta_2 \end{cases}$$

die Grössen N_1 und N_2 , so wird ein stets existirendes gleichzeitiges Integralsystem

$$(132) \quad f_1'(x, y, z_1, z_2) = a_1', \quad f_2'(x, y, z_1, z_2) = a_2'$$

der beiden totalen Differentialgleichungssysteme

$$(133) \quad \frac{dy}{dx} = M_1, \quad \frac{dz_1}{dx} = N_1, \quad \frac{dz_2}{dx} = P_1,$$

$$(134) \quad \frac{dy}{dx} = M_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = N_2, \quad \frac{dz_2}{dx} = P_2$$

oder der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(135) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + M_1 \frac{\partial f}{\partial y} + N_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$(136) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + M_2 \frac{\partial f}{\partial y} + N_2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$$

die geforderten Integrale des linearen partiellen Differentialgleichungssystems (126) liefern.

Da aber die Integralfunktionen (132) auch gleichzeitige Integrale der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(137) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + M_1 \frac{\partial f}{\partial y} + N_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$(138) \quad (M_1 - M_2) \frac{\partial f}{\partial y} + (N_1 - N_2) \frac{\partial f}{\partial z_1} + (P_1 - P_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$$

sind, so werden, wie nahe auch α'_{21} dem α_{21} rücken möge, d. h. wie wenig auch M_1 von M_2 verschieden sein mag, zwei gemeinsame Integrale — wenn solche existiren — des partiellen Differentialgleichungssystems

$$(139) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + M_1 \frac{\partial f}{\partial y} + N_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$(140) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{N_1 - N_2}{M_1 - M_2} \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{P_1 - P_2}{M_1 - M_2} \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$$

z_1 und z_2 als solche Functionen von x und y liefern, dass dieselben Integralfunktionen des Systemes (126) oder, wie durch Subtraction

dieser beiden Gleichungen von einander folgt, des Differentialgleichungssystems

$$(140) \quad \alpha'_{21}(M_1 - M_2)(p_1 + \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \beta_1) = 0,$$

$$(141) \quad \alpha'_{21}(M_1 - M_2)(p_2 + \alpha'_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \beta_2) = 0;$$

ist nun $\alpha'_{21} = \alpha_{21} + d\alpha_{21}$, also $M_2 = M_1 + dM_1$, so folgt, dass, wenn die doppelte Lösung der quadratischen Gleichung (118) mit M bezeichnet wird, die aus zwei gemeinsamen Integralen -- wenn solche existiren -- der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(142) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + M \frac{\partial f}{\partial y} + N \frac{\partial f}{\partial z_1} + P \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$(143) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dN}{dM} \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{dP}{dM} \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$$

hergeleiteten Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integralfunctionen des vorgelegten linearen partiellen Differentialgleichungssystems (117) sein werden, wenn M, N, P mit den Coefficienten dieser Differentialgleichungen durch die Beziehung verbunden waren

$$(144) \quad \alpha_{21}(\beta_1 + N) + (M - \alpha_{11})(\beta_2 + P) = 0.$$

Bringt man die Differentialgleichungen (142) und (143) wieder auf die Jacobi'sche Form

$$(145) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \left(N - M \frac{dN}{dM}\right) \frac{\partial f}{\partial z_1} + \left(P - M \frac{dP}{dM}\right) \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$(146) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dN}{dM} \frac{\partial f}{\partial z_1} + \frac{dP}{dM} \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

so werden die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz zweier gemeinsamer Integralfunctionen den Gleichungen (70) und (71) analog lauten

$$(147) \quad \frac{\partial\left(\frac{dN}{dM}\right)}{\partial x} + \left(N - M \frac{dN}{dM}\right) \frac{\partial\left(\frac{dN}{dM}\right)}{\partial z_1} + \left(P - M \frac{dP}{dM}\right) \frac{\partial\left(\frac{dN}{dM}\right)}{\partial z_2} \\ - \frac{\partial\left(N - M \frac{dN}{dM}\right)}{\partial y} - \frac{dN}{dM} \frac{\partial\left(N - M \frac{dN}{dM}\right)}{\partial z_1} - \frac{dP}{dM} \frac{\partial\left(N - M \frac{dN}{dM}\right)}{\partial z_2} = 0,$$

$$(148) \quad \frac{\partial\left(\frac{dP}{dM}\right)}{\partial x} + \left(N - M \frac{dN}{dM}\right) \frac{\partial\left(\frac{dP}{dM}\right)}{\partial z_1} + \left(P - M \frac{dP}{dM}\right) \frac{\partial\left(\frac{dP}{dM}\right)}{\partial z_2} \\ - \frac{\partial\left(P - M \frac{dP}{dM}\right)}{\partial y} - \frac{dN}{dM} \frac{\partial\left(P - M \frac{dP}{dM}\right)}{\partial z_1} - \frac{dP}{dM} \frac{\partial\left(P - M \frac{dP}{dM}\right)}{\partial z_2} = 0.$$

Nun ergibt sich aus (144)

$$(149) \quad \alpha_{21} \frac{dN}{dM} + \beta_2 + P + (M - \alpha_{11}) \frac{dP}{dM} = 0,$$

und wählt man nunmehr P und $\frac{dP}{dM}$ als willkürliche Functionen der Variablen x, y, z_1, z_2 , bestimmt N und $\frac{dN}{dM}$ aus den Gleichungen (144) und (149) und setzt endlich nach Substituierung des Werthes (120) die so erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen (147) und (148) ein, so erhält man zwei Bedingungsgleichungen in den Coefficienten α und β der gegebenen partiellen Differentialgleichungen, die erfüllt sein müssen, damit die aus den beiden gleichzeitigen Integralen der beiden partiellen Differentialgleichungen (145) und (146) hergeleiteten Ausdrücke für z_1 und z_2 als Functionen von x und y Integrale der Gleichungen (117) liefern; andererseits sieht man wieder, wie oben, dass, wenn die α und β willkürlich gegeben sind, wofern nur die Grössen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ der Bedingung (119) Genüge leisten, die für P und $\frac{dP}{dM}$ sich ergebenden gleichzeitigen Integrale des partiellen Differentialgleichungssystems (147), (148) verbunden mit den für N und $\frac{dN}{dM}$ aus (144) und (145) folgenden Werthen die Integration des vorgelegten partiellen Differentialgleichungssystems (117) auf die Auf- findung gleichzeitiger Integrale der partiellen Differentialgleichungen (142), (143) oder gleichzeitiger Integrale der beiden totalen Differential- gleichungssysteme

$$(150) \quad \frac{dy}{dx} = M, \quad \frac{dz_1}{dx} = N, \quad \frac{dz_2}{dx} = P$$

und

$$(151) \quad \frac{dz_1}{dy} = 1, \quad \frac{dz_2}{dy} = \frac{dP}{dM}$$

zurückführen; es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass man durch specielle Annahmen für die Werthe P und $\frac{dP}{dM}$ wieder, wie oben in dem allgemeinen Falle geschehen, einfachere Formen für die Bedingungen (147) und (148) erhalten kann.

Sei z. B. das partielle Differentialgleichungssystem vorgelegt

$$(152) \quad \begin{cases} p_1 + x^2 q_1 - \frac{x(x-y)^2}{4} q_2 = 0, \\ p_2 + x q_1 + x y q_2 = 0, \end{cases}$$

so dass

$$(153) \quad \alpha_{11} = x^2, \quad \alpha_{12} = -\frac{x(x-y)^2}{4}, \quad \alpha_{21} = x, \quad \alpha_{22} = xy, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0$$

ist, so wird die quadratische Gleichung (118) in M die gleichen Lösungen

$$(154) \quad M = \frac{x(x+y)}{2}$$

besitzen, und wählt man

$$(155) \quad P = x, \quad \frac{dP}{dM} = 0,$$

so wird zunächst die zweite Bedingungsgleichung (148) identisch erfüllt, und weil nach (144) und (149)

$$(156) \quad N = \frac{x(x-y)}{2}, \quad \frac{dN}{dM} = -1, \quad \text{also } N - M \frac{dN}{dM} = x^2$$

ist, auch der Gleichung (147) identisch Genüge geleistet. Da nun die partiellen Differentialgleichungen (145) und (146) die Form annehmen

$$(157) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + x^2 \frac{\partial f}{\partial z_1} + x \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$(158) \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0,$$

so folgen zunächst als Integrale des totalen Systems

$$\frac{dz_1}{dx} = x^2, \quad \frac{dz_2}{dx} = x$$

die Integrale

$$(159) \quad z_1 - \frac{x^3}{3} = \alpha, \quad z_2 - \frac{x^2}{2} = \beta,$$

und setzt man

$$(160) \quad y_2 = z_1 - \frac{x^3}{3}, \quad y_3 = z_2 - \frac{x^2}{2}, \quad y_4 = y,$$

so folgt aus (158)

$$\frac{\partial f}{\partial y_4} - \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0,$$

und deren Integral

$$(161) \quad y_2 + y_4 = A,$$

so dass sich aus (159), (160), (161) die beiden gleichzeitigen Integrale der beiden partiellen Differentialgleichungen (157), (158) oder der beiden entsprechenden totalen Differentialgleichungssysteme in der Form ergeben

$$(162) \quad z_1 - \frac{x^3}{3} + y = A, \quad z_2 - \frac{x^2}{2} = B,$$

und also die aus den beiden Gleichungen

$$(163) \quad \begin{cases} \varphi_1 \left(z_1 - \frac{x^3}{3} + y, z_2 - \frac{x^2}{2} \right) = 0, \\ \varphi_2 \left(z_2 - \frac{x^2}{2} + y, z_2 - \frac{x^2}{2} \right) = 0, \end{cases}$$

worin φ_1 und φ_2 willkürliche Functionen bedeuten, sich ergebenden Werthe von z_1 und z_2 als Functionen von x und y die allgemeinen Integralfunctionen des Differentialgleichungssystems (152) liefern; man findet unmittelbar

$$p_1 = x^2, \quad p_2 = x, \quad q_1 = -1, \quad q_2 = 0,$$

welche dem vorgelegten System identisch genügen.

Wir wollen jedoch für das Differentialgleichungssystem (152) den Bedingungsgleichungen (147) und (148) noch in anderer Weise zu genügen suchen; setzt man

$$(164) \quad \frac{dP}{dM} = \varphi(x), \quad P = y \psi(x) + \omega(x),$$

so liefern die Gleichungen (144) und (149) die Werthe

$$(165) \quad \begin{cases} N = \frac{y(x-y)}{2} \psi(x) + \frac{x-y}{2} \omega(x), \\ \frac{dN}{dM} = -y \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\omega(x)}{x} + \frac{x-y}{x} \varphi(x) \end{cases}$$

und somit

$$N - M \frac{dN}{dM} = xy \psi(x) + x \omega(x) - \frac{x(x^2 - y^2)}{4} \varphi(x),$$

$$P - M \frac{dP}{dM} = y \psi(x) + \omega(x) - \frac{x(x+y)}{2} \varphi(x),$$

so dass die Bedingungsgleichungen (147) und (148), welche identisch in x und y , da z_1 und z_2 nicht vorkommen, zu erfüllen sind, für die 3 Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\omega(x)$ die Bestimmungsgleichungen liefern

$$\varphi'(x) = \psi(x) - \frac{x}{2} \varphi(x),$$

$$\frac{x \psi'(x) - \psi(x)}{x^2} + \frac{1}{2} \varphi'(x) = -\frac{x}{2} \varphi(x),$$

$$\frac{x \omega'(x) - \omega(x)}{x^2} - \frac{x}{2} \varphi'(x) - \frac{1}{2} \varphi(x) = -x \psi(x)$$

oder

$$(166) \quad x \varphi''(x) + (x^2 - 1) \varphi'(x) + \frac{x^3}{2} \varphi(x) = 0,$$

$$(167) \quad \psi(x) = \varphi'(x) + \frac{x}{2} \varphi(x),$$

$$(168) \quad \frac{x \omega'(x) - \omega(x)}{x^2} = -\frac{x}{2} \varphi'(x) - \frac{x^2 - 1}{2} \varphi(x).$$

Unter der Voraussetzung, dass die drei Functionen diesen Gleichungen genügen, geht das Differentialgleichungssystem (142), 143) in

$$(169) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \left(xy \psi(x) + x \omega(x) - \frac{x(x^2 - y^2)}{4} \varphi(x) \right) \frac{\partial f}{\partial z_1} \\ + \left(y \psi(x) + \omega(x) - \frac{x(x+y)}{2} \varphi(x) \right) \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0,$$

$$(170) \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \left(-y \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\omega(x)}{x} + \frac{x-y}{2} \varphi(x) \right) \frac{\partial f}{\partial z_1} + \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0$$

über.

Integriert man zunächst die Gleichung (170) oder das totale Differentialgleichungssystem

$$(171) \quad \frac{dz_1}{dy} = -y \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\omega(x)}{x} + \frac{x-y}{2} \varphi(x), \quad \frac{dz_2}{dy} = \varphi(x)$$

so ergibt sich, wenn die Integrale mit den neu einzuführenden Variablen Z_1 und Z_2 bezeichnet werden:

$$(172) \quad \begin{cases} Z_1 = z_1 + y^2 \frac{\psi(x)}{2x} + y \frac{\omega(x)}{x} - y \frac{x\varphi(x)}{2} + \frac{y^2}{4} \varphi(x), \\ Z_2 = z_2 - y \varphi(x), \\ X = x, \end{cases}$$

und durch Substitution von

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Z_1} \left\{ \frac{y^2}{2} \cdot \frac{x\psi'(x) - \psi(x)}{x^2} + y \cdot \frac{x\omega'(x) - \omega(x)}{x^2} - y \cdot \frac{x\varphi'(x)}{2} \right. \\ \left. - y \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{y^2}{4} \varphi'(x) \right\} - \frac{\partial f}{\partial Z_2} y \varphi'(x), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial Z_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_2} = \frac{\partial f}{\partial Z_2}$$

in (169), wenn man bemerkt, dass vermöge der drei Bestimmungsgleichungen (166), (167), (168) in den Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial z_2}$ die Coefficienten von y^2 und y für alle x identisch verschwinden, die partielle Differentialgleichung

$$(173) \quad \frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial Z_1} \left(X\omega(X) - \frac{X^3}{4} \varphi(X) \right) + \frac{\partial f}{\partial Z_2} \left(\omega(X) - \frac{X^2}{2} \varphi(X) \right) = 0$$

oder das totale Differentialgleichungssystem

$$(174) \quad \frac{dZ_1}{dX} = X\omega(X) - \frac{X^3}{4} \varphi(X), \quad \frac{dZ_2}{dX} = \omega(X) - \frac{X^2}{2} \varphi(X),$$

dessen Integrale durch

$$(175) \quad \begin{cases} Z_1 - \int \left(X\omega(X) - \frac{X^3}{4} \varphi(X) \right) dX = \mathfrak{A}, \\ Z_2 - \int \left(\omega(X) - \frac{X^2}{2} \varphi(X) \right) dX = \mathfrak{B} \end{cases}$$

dargestellt werden, worin $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ willkürliche Constanten bedeuten. Die allgemeinen Integralfunctioren des partiellen Differentialgleichungssystems (152) gehen somit, wie aus Substitution von (172) in (175)

ersichtlich ist, aus den beiden Functionalgleichungen mit den willkürlichen Functionen φ_1 und φ_2 hervor:

$$(176) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \left\{ z_1 + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\varphi'(x)}{x} + \varphi(x) \right) + y \left(\frac{\omega(x)}{x} - \frac{x}{2} \varphi(x) \right) - \int \left[x \omega(x) - \frac{x^3}{4} \varphi(x) \right] dx, \right. \\ \quad \left. z_2 - y \varphi(x) - \int \left[\omega(x) - \frac{x^2}{2} \varphi(x) \right] dx \right\} = 0, \\ \varphi_2 \left\{ z_1 + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\varphi'(x)}{x} + \varphi(x) \right) + y \left(\frac{\omega(x)}{x} - \frac{x}{2} \varphi(x) \right) - \int \left[x \omega(x) - \frac{x^3}{4} \varphi(x) \right] dx, \right. \\ \quad \left. z_2 - y \varphi(x) - \int \left[\omega(x) - \frac{x^2}{2} \varphi(x) \right] dx \right\} = 0, \end{array} \right.$$

worin $\varphi(x)$ und $\omega(x)$ durch die Gleichungen (166) und (168) definirt sind; zum Zwecke der Verification findet man

$$p_1 = -\frac{y^2}{2} \cdot \frac{x\varphi''(x) + x^2\varphi'(x) - \varphi'(x)}{x^2} - y \left\{ \frac{x\omega'(x) - \omega(x)}{x^2} - \frac{x\varphi'(x) + \varphi(x)}{2} \right\} \\ + x\omega(x) - \frac{x^3}{4} \varphi(x),$$

$$p_2 = y \varphi'(x) + \omega(x) - \frac{x^2}{2} \varphi(x),$$

$$q_1 = -y \cdot \frac{\varphi'(x) + x\varphi(x)}{x} - \frac{\omega(x)}{x} + \frac{x}{2} \varphi(x),$$

$$q_2 = \varphi(x),$$

welche Werthe mit Benutzung der Gleichungen (166) und (168) dem partiellen Differentialgleichungssystem (152) identisch genügen. In dem vorliegenden Falle lassen sich aber die Functionen $\varphi(x)$ und $\omega(x)$ unmittelbar herstellen, da das allgemeine Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(177) \quad x\varphi''(x) + (x^2 - 1)\varphi'(x) + \frac{x^3}{2}\varphi(x) = 0,$$

wie man leicht erkennt, durch

$$(178) \quad \varphi(x) = c_1 e^{-\frac{1+i}{4}x^2} + c_2 e^{-\frac{1-i}{4}x^2}$$

dargestellt wird, wenn c_1 und c_2 willkürliche Constanten bedeuten, und somit nach (168) $\omega(x)$ durch den Ausdruck bestimmt ist

$$(179) \quad \frac{\omega(x)}{x} = c_1 \frac{1+i}{2} \int e^{-\frac{1+i}{4}x^2} dx + c_2 \frac{1-i}{2} \int e^{-\frac{1-i}{4}x^2} dx \\ - c_1 \frac{i}{2} x e^{-\frac{1+i}{4}x^2} + c_2 \frac{i}{2} x e^{-\frac{1-i}{4}x^2}.$$

Nachdem somit auch der Fall der gleichen Lösungen der quadratischen Gleichung (28) behandelt worden, bleibt nur noch zu bemerken übrig, dass den Gleichungen (26), ohne dass deren Determinante verschwindet, und zwar für beliebige Werthe von λ und μ genügt werden kann, wenn

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0, \quad M = \alpha_{11} = \alpha_{22}$$

ist, aber in diesem Fall nimmt das vorgelegte Differentialgleichungssystem die Form des Jacobi'schen Systems (21) an.

Heidelberg, den 24. December 1891.