Bestimmung der Augenblicke der grössten und kleinsten Elongationen des gebundenen und des freihangenden, in sehr länglichen Ellipsen schwingenden Pendels, mit Rücksicht auf die stetige Verminderung der Elongationen durch den der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand der Atmosphäre,

von Herrn Dr. *Lehmann*.

(F o r t s e t z u n g.)

§ 24.

Die Gleichungen (42) § 22 und (43) § 23, welche für das gebundene so gut wie für das freihangende, in sehr länglichen Ellipsen schwingende Pendel gelten, lassen sich, wenn man bei der Bestimmung der Augenblicke der grössten Elongationen $\tau = \frac{i\pi}{(\omega)}$, bei der Bestimmung der Augenblicke der kleinsten Elongationen aber $\tau = \frac{2i+1}{2} \cdot \frac{\pi}{(\omega)}$ setzt, in

$$\frac{\pi}{2(\omega)} + \frac{(\epsilon)^2}{16} \cdot \frac{1-c}{k} - \frac{k\pi}{2(\omega)}, \quad \frac{\pi}{2(\omega)} + \frac{(\epsilon)^2}{16} \cdot c - \frac{k\pi}{2(\omega)} - \frac{k\pi}{(\omega)}, \quad \frac{\pi}{2(\omega)} + \frac{(\epsilon)^2}{16} \cdot c - \frac{k\pi}{(\omega)} - \frac{3k\pi}{2(\omega)},$$

und folglich wird der Überschuss der Dauer jeder Halbschwingung über $\frac{\pi}{2(\omega)}$ immer kleiner, und zwar nimmt er

in einer geometrischen Reihe ab, deren Exponent $= c - \frac{k\pi}{2(\omega)}$. Auch lässt sich leicht beweisen, dass die Gleichung (44) ihre Richtigkeit behält, wenn man die Zeit t , anstatt von der grössten, von der kleinsten Elongation an rechnet. Man hat nämlich, zum Behuf dieser Umwandlung, die in der Gleichung (44) vorkommende Grösse τ in $\tau + \frac{\pi}{2(\omega)} \cdot t$ aber

in $t + \frac{\pi}{2(\omega)} + \frac{(\epsilon)^2}{16} \cdot \frac{1-c}{k} - \frac{k\pi}{2(\omega)}$ zu verwandeln; dadurch geht die Gleichung (44) in

$$t = \tau + \frac{\left((\epsilon)c - \frac{k\pi}{4(\omega)} \right)^2}{16} \cdot \frac{1-c}{k} - \frac{k\pi}{4(\omega)}$$

über, wo $(\epsilon)c - \frac{k\pi}{4(\omega)}$ das dem Augenblick des ersten Elon-

Eine zusammenziehen, nämlich:

$$t = \tau + \frac{(\epsilon)^2}{16} \cdot \frac{1-c}{k} - k\tau, \quad \dots \dots \dots (44)$$

welche Gleichung zeigt, dass die vom Widerstande herrührende Verkürzung der Dauer der Halb-Schwingungen eine stetige ist; denn die Dauer der ersten, zweiten und dritten Halbschwingung ist hiernach =

gations-Minimums zugehörige ϵ , übrigens aber nicht merklich (nämlich nur um $\frac{k\pi(\epsilon)}{4(\omega)} = \text{Arc. } 9'', 780$) von dem nächstvorgehenden und nächstfolgenden Elongations-Maximum verschieden ist.

§ 25.

Die Gleichung (44) giebt die ungeachtet des Widerstandes stattfindende grosse Gleichförmigkeit der Pendelschwingungen zu erkennen. Zwei von der grössten oder kleinsten Elongation an gerechnete Zeiten mögen t und t' heissen, und es sei $t > t'$; auch umfasse sowohl der Zeitraum t als der Zeitraum t' eine ganze Anzahl von Halbschwingungen. Das dem Zeitraum t' entsprechende τ werde mit τ' bezeichnet. Wäre nun die Pendel-Bewegung völlig gleichförmig, so wäre $t' = t \cdot \frac{\tau'}{\tau}$. Die Gleichung (44) aber giebt

$$t' = \tau' + \frac{(\epsilon')^2}{16} \cdot \frac{1-c}{k} - k\tau';$$

also ist

$$t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau} = \tau' + \frac{(\epsilon)^2}{16} \cdot \frac{1 - c^{-k\tau'}}{k} - \left(\tau + \frac{(\epsilon)^2}{16} \cdot \frac{1 - c^{-k\tau}}{k} \right) \cdot \frac{\tau'}{\tau} = \frac{(\epsilon)^2}{16k} \left(1 - \frac{\tau'}{\tau} - c^{-k\tau'} + \frac{\tau'}{\tau} c^{-k\tau} \right).$$

Von diesem Ausdruck für $t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau}$ ist (bei gegebenem (ϵ) , k und τ) das Maximum =

$$\frac{(\epsilon)^2}{16k} \left(1 - \frac{1 - c^{-k\tau}}{k\tau} \left(1 - \log. \text{nat.} \frac{1 - c^{-k\tau}}{k\tau} \right) \right), \dots (45)$$

also bei gegebenem τ desto grösser, je grösser (ϵ) , woraus folgt, dass die Schwingungen sich desto mehr der Gleichförmigkeit nähern, je länger sie fortgesetzt werden. Setzt

man die Grösse (45) = 0,4 Zeit-Seconds und $\tau = 6^h$, so findet man $(\epsilon) = 3^\circ 35' 5''$; hieraus folgt, dass, wenn das Elongations-Maximum bis auf $3^\circ 35' 5''$ abgenommen hat, die Abweichung der Schwingungen von der Gleichförmigkeit nicht mehr merklich ist, wenn sie auch nachher noch 6 Stunden fortgesetzt werden. Löst man die Grösse (45) in eine unendliche Reihe auf, und versteht man unter $t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau}$ das vorhin genannte Maximum, so erhält man:

$$t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau} = \frac{k(\epsilon)^2 \tau^2}{128} - \frac{k^2 (\epsilon)^2 \tau^3}{256} + \frac{11 k^3 (\epsilon)^2 \tau^4}{9216} - \frac{5 k^4 (\epsilon)^2 \tau^5}{18432} + \dots,$$

und die Umkehrung der aus dieser Reihe durch Wurzel-Ausziehung sich ergebenden Reihe

$$\sqrt{t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau}} = \frac{(\epsilon)}{8} \sqrt{\frac{k}{2} \left(\tau - \frac{k\tau^2}{4} + \frac{13k^2\tau^3}{288} - \frac{7k^3\tau^4}{1152} + \dots \right)}$$

geht:

$$\tau = \frac{8}{(\epsilon)} \sqrt{\frac{2}{k} \left(t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{32}{(\epsilon)^2} \left(t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau} \right) + \frac{736}{9(\epsilon)^3} \sqrt{(2k) \left(t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{4096k}{9(\epsilon)^4} \left(t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau} \right)^2 + \dots}}$$

Setzt man hier $t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau} = 0,4$ Zeit-Seconds, so wird

$$\tau = \frac{16}{(\epsilon)\sqrt{(5k)}} + \frac{64}{5(\epsilon)^2} + \frac{2944}{45(\epsilon)^3} \sqrt{\frac{k}{5}} + \frac{16384k}{225(\epsilon)^4} + \dots,$$

desto kleiner, je grösser (ϵ) , und, wenn man $(\epsilon) = \frac{1}{3}$ setzt, $= \frac{144}{\sqrt{(5k)}} + \frac{5184}{5} + \frac{238464}{5} \sqrt{\frac{k}{5}} + \frac{11943936k}{25} + \dots$, also, in Zeit-Minuten ausgedrückt, $= 55 + 17 + 7 + 3 + \dots$. Ungeachtet der langsamen Convergenz dieser Reihe sieht man doch, dass beinahe anderthalb Stunden hindurch, nachdem das Pendel die Elongation $\frac{1}{3}$ gehabt hat, die Abweichung der Schwingungen von der Gleichförmigkeit unmerklich bleibt. Genauer findet man diesen Zeitraum durch indirecte Auflösung der Gleichung (45), indem man darin $(\epsilon) = \frac{1}{3}$ und τ nach und nach =

$$1^h 22', \quad 1^h 23', \quad 1^h 24'$$

setzt; man findet dadurch das Maximum von $t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau}$ resp. =

$$0'' 38343, \quad 0'' 38925, \quad 0'' 39507;$$

Differenzen: $0'' 00582, \quad 0'' 00582,$

woraus wir vermuthen, dass, wenn $\tau = 1^h 25'$ gesetzt wird, $t' - t \cdot \frac{\tau'}{\tau}$ schon auf mehr als $0'' 4$ steigen könne; wenigstens ist soviel streng bewiesen, dass die Abweichung der Schwingungen von der Gleichförmigkeit 1,4 Stunden hindurch unmerklich bleibt.

Potsdam, den 29. September 1854.

W. Lehmann.

Beitrag zur Methode der kleinsten Quadrate, von Herrn Professor Dr. d'Arrest.

Die bei irgend einer Gattung von Beobachtungen wirklich vorkommenden Fehler, mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ihres Vorkommens, ist man gewohnt sich unter dem geometrischen Bilde einer Curve vorzustellen, von der jeder Punkt bestimmt wird durch die einzelnen Fehler als Abscissen

und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten als Ordinaten. Die Definition des wahrscheinlichen Fehlers, als derjenigen Abscisse, deren Ordinate zu beiden Seiten des Nullpunktes den Flächeninhalt der Curve in zwei gleiche Theile theilt, beruht ganz und gar auf dieser Vorstellung, und es liegt