Das Verhältniss der electromotorischen Kräfte von Platin und Aluminium hängt also stark von der Concentration der Säure ab, und da bekannt ist¹⁾, dass die E. K. des Platinelementes mit abnehmender Concentration abnimmt, so folgt, dass die des Aluminium-Elementes ebenfalls mit abnehmender Concentration kleiner wird, aber in etwa doppelt so grossem Verhältniss, als die erstere.

In der folgenden, dritten, Abhandlung werde ich zuerst Versuche mittheilen, welche behufs näherer Kenntniss der Wasserstoff-Condensation und -Absorption durch Platin und Palladium angestellt wurden, sodann eine übersichtliche Zusammenstellung der in den beiden ersten Abhandlungen enthaltenen Resultate geben und endlich versuchen, diese auf ein einheitliches Erklärungsprincip zurückzuführen.

Giessen, Januar 1883.

XII. Ueber die Bestimmung des Ohms auf dynamometrischem Wege;

Vorschlag von J. Fröhlich in Budapest.

(Mitgetheilt in der Sitzung der Ung. Akad. den 22. Januar 1883.)

(Hierzu Taf. II Fig. 8.)

I. Uebersicht. — II. Coëfficienten der dynamometrischen Wirkung. — III. Combination der Wirkungen, Dynamometer, Inductionsstoss. — IV. Einfachste Methode, einmalige Schliessung und Ausschaltung; Multiplicationsmethode. — V. Andere Methoden, wenn der Widerstand beider Leiter gleich ist. — VI. Vollständige Lösung der Inductionsgleichungen. — VII. Berechnung von M und $\partial M / \partial \varphi$ für zwei parallele Rollen von endlichem Querschnitt. — VIII. Vorläufige Versuche.

I. Uebersicht.

§ 1. Wirkungen der inducirten electromotorischen Kraft. Die bei der galvanischen oder der Voltainduction auftretende electromotorische Kraft kann sich je nach dem Körper, in dem sie wirkt, auf verschiedene Weise äussern.

1) Fromme, Wied. Ann. 8. p. 326. 1879 u. 12. p. 399. 1881.

Ist der Körper ein Diëlectricum, so erzeugt diese Kraft diëlectrische Polarisirung; ist er ein ungeschlossener Leiter, so findet an seinen Enden Anhäufung von statischer Electricität statt, oder es entstehen ungeschlossene Ströme; ist er endlich ein geschlossener Leiter, so tritt in ihm ein geschlossener electricischer Strom auf.

Jede der angeführten Eigenschaften kann bei der Bestimmung der electromotorischen Kraft als Ausgangspunkt dienen.

Aus der electromotorischen Kraft bestimmt sich nach bekannten Regeln die absolute electricische Widerstandseinheit.

Indess ist unsere gegenwärtige Kenntniss der diëlectrischen Polarisirung, der ungeschlossenen Ströme und der Art der Anhäufung statischer Electricität durch Induction noch viel zu unvollständig und die statisch-electrometrischen Messungsmethoden sind zu ungenau, um ein Resultat erwarten zu lassen, das genauer als etwa bis auf 1 Proc. wäre.

Will man demnach auf Grundlage der Induction eine genaue absolute Widerstandsbestimmung machen, so wird man sich wohl nur an die inducirten geschlossenen Ströme zu halten haben.

Es ist nun nicht ohne Interesse, hervorzuheben, dass alle Methoden zur Bestimmung des Ohms, nach welchen bisher genaue Messungen ausgeführt wurden, und die auch von der Pariser Conferenz der Electriciker (October 1882) als besonders geeignet empfohlen wurden, auf der Messung der inducirten Ströme in immer geschlossenen Leitern beruhen.

§ 2. Galvanometrische Wirkung. Noch merkwürdiger aber ist es, dass alle diese Methoden auf einer und derselben Aeusserungsart dieser Ströme beruhen, nämlich auf deren galvanometrischer Wirkung.

Entweder ist es die stossartige Wirkung des Inductionstromes auf eine Galvanometernadel (Methoden von Kirchhoff¹⁾, Rowland²⁾, W. Weber³⁾ (Erdinductor), oder die Rückwirkung des Inductionstromes auf eine schwingende

1) Kirchhoff, Pogg. Ann. 76. p. 412. 1849.

2) Rowland, Amer. Journ. 15. p. 281. 1878.

3) W. Weber, Wied. Galv. (2) 2. p. 430—442. 1874.

Magnetnadel (W. Weber¹⁾ (Dämpfung), oder es erzeugt ein schnell variirender oder ein constanter Inductionsstrom eine dauernde Ablenkung einer Magnetnadel (British Association²⁾, Lorenz³⁾).

§ 3. Dynamometrische Wirkung. In vorliegender Arbeit soll nun theoretisch dargelegt werden, dass man auch die dynamometrische (ponderomotorische) Wirkung des inducirten und des inducirenden Stromes zur Bestimmung des Ohms verwenden kann, wenn man diese Wirkung auf einfache Weise combinirt; es entstehen so sehr einfache theoretische Ausdrücke, und es lassen sich die nöthigen experimentellen Vorgänge mit der grössten Leichtigkeit realisiren.

Die unter VIII, §§ 23, 24 angeführten vorläufigen Versuche sollen nur die einfachste Methode, bei welcher der Inductionsapparat zugleich das Dynamometer ist, praktisch illustriren und dabei zeigen, dass die nach diesem Vorgange zu erwartenden Ausschläge genügend gross sind, um genau gemessen zu werden.

II. Berechnung der Coëfficienten der dynamometrischen Wirkung.

§ 4. Die drei Coëfficienten. Im Folgenden sollen alle dynamometrischen Wirkungen des inducirenden und inducirten Stromes theoretisch untersucht und diejenigen ausgewählt werden, die zur Bestimmung des Ohms am vortheilhaftesten verwendet werden können.

Die einzelnen Fälle sind:

- a) dynamometrische Wirkung des inducirenden Stromes auf sich selbst; diese ist proportional $P = \int i_1^2 dt$
- b) dynamometrische Wirkung des inducirten Stromes auf sich selbst; diese ist proportional $R = \int i_2^2 dt$
- c) dynamometrische Wechselwirkung des inducirenden und des inducirten Stromes; diese ist proportional $Q = \int i_1 i_2 dt$

§ 5. Allgemeine Fälle. Es seien zwei geschlossene Leiter s_1, s_2 in welchen die constanten (von der Induction

1) W. Weber, Wied. Galv. (2) 2. p. 430—442. 1874.

2) Wied. Galv. (2) 2. p. 430—442. 1874.

3) Lorenz, Wied. Galv. (2) 2 p. 430—442. 1874.

unabhängigen) electromotorischen Kräfte E_1, E_2 wirken. Dieselben würden die Stromintensitäten:

$$(1) \quad J_1 = \frac{E_1}{w_1}, \quad J_2 = \frac{E_2}{w_2}.$$

erzeugen.

Wir setzen nun voraus: α) Gestalt und Widerstand der Leiter bleibe während der Dauer der Induction unverändert. β) Die relative Lage beider Leiter bleibe während der Dauer der Induction ebenfalls unverändert.

Es sind dann die simultanen Differentialgleichungen der gegenseitigen Induction:

$$(2) \quad E_1 = w_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad E_2 = w_2 i_2 + N \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt},$$

dabei bedeuten w_1, w_2 die Widerstände, L, N die Coefficienten der Induction (Potential) auf sich selbst für die beiden Leiter, M den Coefficienten (Potential) ihrer gegenseitigen Induction.

1) Man multiplicire (2) mit dt und integriere:

$$(3) \quad \begin{cases} E_1 [t] = w_1 \int i_1 dt + L [i_1^2] + M [i_2], \\ E_2 [t] = w_2 \int i_2 dt + N [i_2^2] + M [i_1]. \end{cases}$$

2) Man multiplicire beide Gleichungen mit $i_1 dt$ und $i_2 dt$ und integriere:

$$(4) \quad \begin{cases} E_1 \int i_1 dt = w_1 \int i_1^2 dt + \frac{1}{2} L [i_1^2] + M \int i_1 \frac{di_2}{dt} dt \\ E_1 \int i_2 dt = w_1 \int i_1 i_2 dt + L \int i_2 \frac{di_1}{dt} dt + \frac{1}{2} M [i_2^2] \\ E_2 \int i_1 dt = w_2 \int i_1 i_2 dt + N \int i_1 \frac{di_2}{dt} dt + \frac{1}{2} M [i_1^2] \\ E_2 \int i_2 dt = w_2 \int i_2^2 dt + \frac{1}{2} N [i_2^2] + M \int i_2 \frac{di_1}{dt} dt. \end{cases}$$

Hierzu kommt die Identität:

$$[i_1 i_2] = \int i_1 \frac{di_2}{dt} dt + \int i_2 \frac{di_1}{dt} dt.$$

Diese Gleichungen sollen auf die einfachsten Fälle der Induction, nämlich, wo im inducirten Leiter keine constante electromotive Kraft vorhanden ist, angewendet werden. Man hat also $E_2 = 0$.

§ 6. Schliessung des indcirenden Stromes. Verlegt man den Anfang der Zeitrechnung in den Moment der Schliessung, so sind die Anfangs- und Endbedingungen.

$$(5) \quad \begin{cases} E_2 = 0; & t = 0, & i_1 = 0, & i_2 = 0, \\ & t = \infty, & i_1 = J_1, & i_2 = 0. \end{cases}$$

Setzt man diese Grenzwerthe in (3) und (4) und bemerkt, dass:

$$\int_0^{\infty} i_1 dt \quad \text{und:} \quad \int_0^{\infty} i_1^2 dt$$

unendlich gross sind, und dass die sie enthaltenden ersten Gleichungen von (3) und (4) dann nur das Ohm'sche Gesetz ausdrücken, so kann man diese Gleichungen fortlassen, und es bleibt:

$$O = w_2 \int_0^{\infty} i_2 dt + MJ_1, \quad E_1 \int_0^{\infty} i_2 dt = w_1 \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt + L \int_0^{\infty} i_2 \frac{di_1}{dt} dt,$$

$$O = w_2 \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt + N \int_0^{\infty} i_1 \frac{di_2}{dt} dt + \frac{1}{2} MJ_1^2,$$

$$O = w_2 \int_0^{\infty} i_2^2 dt + M \int_0^{\infty} i_2 \frac{di_1}{dt} dt, \quad O = \int_0^{\infty} i_1 \frac{di_2}{dt} dt + \int_0^{\infty} i_2 \frac{di_1}{dt} dt.$$

Nach einigen Kürzungen findet man sofort:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} q_A &= \int_0^{\infty} i_2 dt = - \frac{MJ_1}{w_2}, \\ Q_A &= \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt = + MJ_1^2 \left\{ \frac{\frac{1}{2} L}{w_1 N + w_2 L} - \frac{1}{w_2} \right\}, \\ R_A &= \int_0^{\infty} i_2^2 dt = + MJ_1^2 \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{\frac{1}{2} M}{w_1 N + w_2 L}, \\ \int_0^{\infty} i_1 \frac{di_2}{dt} dt &= - \int_0^{\infty} i_2 \frac{di_1}{dt} dt = + MJ_1^2 \frac{\frac{1}{2} w_1}{w_1 N + w_2 L}. \end{aligned} \right.$$

§ 7. Ausschaltung der electromotorischen Kraft E_1 mittelst Brücke (Shunt). Die Ausschliessung geschehe auf solche Art, dass dabei der Widerstand w_1 und der Coëfficient L unverändert bleibe (§ 23). Die Operation muss ohne Funken geschehen.

Verlegt man wieder den Anfang der Zeit in den Moment der Ausschaltung, so wird:

$$(7) \quad \begin{cases} E_1 = 0, & t = 0, & i_1 = J_1, & i_2 = 0, \\ E_2 = 0, & t = \infty, & i_1 = 0, & i_2 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (3) und (4) werden:

$$O = w_1 \int_0^\infty i_1 dt - LJ_1, \quad O = w_2 \int_0^\infty i_2 dt - MJ_1,$$

$$O = w_1 \int_0^\infty i_1^2 dt - \frac{1}{2} LJ_1^2 + M \int_0^\infty i_1 \frac{di_2}{dt} dt,$$

$$O = w_1 \int_0^\infty i_1 i_2 dt + L \int_0^\infty i_2 \frac{di_1}{dt} dt,$$

$$O = w_2 \int_0^\infty i_1 i_2 dt + N \int_0^\infty i_1 \frac{di_2}{dt} dt - \frac{1}{2} MJ_1^2,$$

$$O = w_2 \int_0^\infty i_2^2 dt + M \int_0^\infty i_2 \frac{di_1}{dt} dt,$$

$$O = \int_0^\infty i_1 \frac{di_2}{dt} dt + \int_0^\infty i_2 \frac{di_1}{dt} dt.$$

Man findet sofort:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} p_B &= \int_0^\infty i_1 dt = + \frac{LJ_1}{w_1}, & q_B &= \int_0^\infty i_2 dt = + \frac{MJ_1}{w_2}, \\ P_B &= \int_0^\infty i_1^2 dt = - MJ_1^2 \frac{\frac{1}{2}M}{w_1 N + w_2 L} + \frac{1}{2} \frac{LJ_1^2}{w_1}, \\ R_B &= \int_0^\infty i_2^2 dt = + MJ_1^2 \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{\frac{1}{2}M}{w_1 N + w_2 L}, \\ Q_B &= \int_0^\infty i_1 i_2 dt = + MJ_1^2 \frac{\frac{1}{2}L}{w_1 N + w_2 L}, \\ \int_0^\infty i_1 \frac{di_2}{dt} dt &= - \int_0^\infty i_2 \frac{di_1}{dt} dt = + MJ_1^2 \frac{\frac{1}{2}w_1}{w_1 N + w_2 L}. \end{aligned} \right.$$

III. Combination der Wirkungen; geeignetes Dynamometer, Ausschlag durch einen Inductionstoss.

§ 8. Aufsuchen der geeigneten Wirkungen. Die beiden Gleichungssysteme (6) und (8) geben die Coëfficienten der galvanometrischen und dynamometrischen Wirkungen des inducirenden und des inducirten Stromes.

Man bemerkt indess sofort, dass in den Ausdrücken der galvanometrischen Wirkung z. B. des inducirten Stromes nur M, w_2 und J_1 auftreten; hingegen enthalten alle Ausdrücke der dynamometrischen Wirkung die Grössen $L, M, N; w_1, w_2$.

Dieser Umstand scheint die letztere Wirkung als im allgemeinen complicirter darzustellen. Es bietet nämlich die Berechnung von M für zwei Leiter von regelmässiger Form keine Schwierigkeiten; hingegen ist diejenige von L und N bei dicht aufeinandergewickelter, drahtförmigen Leiter in Rollenform wegen der grossen Nähe der einzelnen Windungen nur bei sehr roh angenäherten Annahmen möglich, und auch dann noch ungenau¹⁾.

Will man also diese Schwierigkeiten umgehen, so bleibt wohl kein anderer Ausweg, als entweder die Coëfficienten L und N auf experimentellem Wege zu bestimmen²⁾, oder die dynamometrischen Wirkungen auf solche Weise zu combiniren, dass die Coëfficienten L und N aus dem Resultat von selbst herausfallen.

Combinationen solcher Art zu finden, gelang mir nur bei der Wechselwirkung des inducirenden und des inducirten Stromes. Bildet man z. B. die Differenz der zugehörigen Coëfficienten Q_A und Q_B aus (6) und (8), so ergibt sich sofort:

$$(9) \quad Q_B - Q_A = \frac{MJ_1^2}{w_2},$$

ein Resultat, das eine ebenso grosse Einfachheit besitzt, wie die galvanometrische Wirkung des inducirten Stromes q_A und q_B .

Auch andere Combinationen geben ein einfaches Resultat.

1) Vgl. die Berechnung von M bei Kirchhoff, Pogg. Ann. 121. p. 551. 1864; ferner Maxwell, 2. p. 296, § 693. 1873.

2) Maxwell, l. c. p. 356, § 756.

tat, wenn man den Widerstand der beiden geschlossenen Leiter einander gleich gemacht hat, V, § 15.

§ 9. Das geeignetste Dynamometer. (Vergl. §§ 23, 24). Aus dem Vorhergehenden folgt von selbst, wie das Instrument beschaffen sein muss, das zur Messung von:

$$Q = \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt$$

dienen soll.

Den fixen Theil des Dynamometers bildet der eine Leiter (in dem der inducirende oder inducirte Strom stattfindet), den beweglichen Theil der andere Leiter (in dem der inducirte oder inducirende Strom stattfindet). Es ist also der Inductionsapparat zugleich das Dynamometer.

Beide Leiter bleiben während der Dauer der Induction, und zwar jeder für sich geschlossen.

Es ist übrigens vorthellhaft, wenn die Gestalt, der Widerstand und die Windungszahl beider Leiter nahezu gleich ist, da dann N und L , w_1 und w_2 nahezu gleich werden.

Um etwaige störende Einflüsse zu vermeiden, wird vorausgesetzt, dass die Windungsebene des inducirten Leiters während der Dauer der Induction senkrecht zur Ebene des erdmagnetischen Meridianes sei.

§ 10. Ausschlag, erzeugt durch die dynamometrische Wirkung der Induction. Die Bewegungsgleichung des beweglichen Theiles des Instrumentes ist:

$$(10) \quad K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial \varphi} - h^2 \varphi - k \frac{d\varphi}{dt},$$

dabei ist K das Trägheitsmoment des schwingenden Apparates, φ der variable Ausschlag von der Gleichgewichtslage, i_1 , i_2 die Intensität des inducirenden und des inducirten Stromes, h^2 eine positive Constante, deren Werth:

$$(11) \quad \alpha) \quad h^2 = \tau,$$

d. i. der Torsionscoëfficient, sammt dem vom Gewichte herührenden Coëfficienten, wenn der bewegliche Apparat aufgehängt ist und um eine verticale Axe schwingt,

$$(12) \quad \beta) \quad h^2 = mg\rho,$$

d. i. das Gewicht des schwingenden Theiles multiplicirt mit der Entfernung seines Schwerpunktes von der Drehungsaxe, wenn der bewegliche Theil pendelartig um eine horizontale Axe schwingt. Schliesslich ist k die Constante der Dämpfung.

Das Glied $h^2 q$ in (10) hat im allgemeinen nur für Schwingungen mit sehr kleiner Amplitude, die hier vorausgesetzt werden, Geltung.

Integrirt man (10) zwischen variablen Grenzen, so wird:

$$K \left[\frac{d\varphi}{dt} \right] = \int i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial \varphi} dt - h^2 \int q dt - k [\varphi].$$

Der Verlauf der Induction ist unter gewöhnlichen Umständen so schnell, dass $\partial M / \partial \varphi$ und q unterdessen als constant betrachtet werden kann, findet ferner die Induction in dem Augenblicke statt, wo sich der schwingende Theil in der Gleichgewichtslage befindet, in welcher $\varphi = 0$, so bleibt:

$$K \left[\frac{d\varphi}{dt} \right] = \frac{\partial M}{\partial \varphi} \int_0^\infty i_1 i_2 dt = \frac{\partial M}{\partial \varphi} Q. \quad \text{Setzt man:}$$

$$(13) \quad \left[\frac{d\varphi}{dt} \right] = \Omega_Q,$$

so bedeutet Ω_Q den infolge der Induction stossartig erlangten Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit des schwingenden Theiles, und man hat:

$$(14) \quad \Omega_Q = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} Q.$$

Befand sich der bewegliche Theil zuerst in Ruhe, so wird Ω_Q die Winkelgeschwindigkeit nach der Induction, und seine lebendige Kraft:

$$\frac{1}{2} K \Omega_Q^2.$$

Der bewegliche Theil erreicht seinen grössten Ausschlag q_Q , wenn seine Winkelgeschwindigkeit Null ist, und er gegen die Torsionskräfte und die Schwere, oder gegen die Schwere allein die Arbeit:

$$\frac{1}{2} K \Omega_Q^2 = + h^2 \int_0^{q_Q} q dq$$

geleistet hat. — Setzt man ferner:

$$(15) \quad T_0 = \pi \frac{V \bar{K}}{h}$$

für die Schwingungszeit ohne Dämpfung, so ist:

$$(16) \quad \eta_Q = \frac{T_0}{\pi} \Omega_Q = \frac{T_0 Q}{\pi K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi},$$

ohne Berücksichtigung der Dämpfung.

IV. Einfachste Beobachtungsmethode, Schliessung und Ausschaltung mittelst Brücke.

a) Ohne Berücksichtigung der Dämpfung.

§ 11. Einmalige Schliessung und Ausschaltung; Wiederholung. Der bewegliche Theil sei in Ruhe. Man schliesse den inducirenden Strom. Die erlangte Geschwindigkeit ist nach (14) und (6):

$$\Omega_A = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} \cdot Q_A.$$

Nach Verlauf der Zeit T_0 bewegt sich der schwingende Theil mit der Geschwindigkeit $-\Omega_A$ durch die Gleichgewichtslage. In diesem Moment werde die electromotorische Kraft des primären Stromes mittelst Brücke ausgeschlossen. Der Zuwachs beträgt nach (14) und (8):

$$\Omega_B = \frac{1}{K} \frac{\partial M}{\partial \pi} \cdot Q_B,$$

also die ganze Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage:

$$\Omega = -\Omega_A + \Omega_B = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} (Q_B - Q_A).$$

Demnach erreicht der grösste Ausschlag nach (9) und (16) den Werth:

$$(17) \quad \Psi = \frac{T_0}{\pi K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} \cdot \frac{M J_1^2}{w_2}.$$

Will man also auf diese Weise den absoluten Widerstand w_2 des inducirten Leiters bestimmen, so muss man kennen:

die Schwingungszeit des beweglichen Theiles	T_0
das Trägheitsmoment „ „ „	K
den Coëfficienten der wechselseitigen Induction	M
dessen Differentialquotienten nach φ	$\frac{\partial M}{\partial \varphi}$
die grösste Intensität des inducirenden Stromes	J_1
den Ausschlag des Dynamometers	Ψ .

Wiederholt man die soeben erwähnte Operation n mal, so wird auch Ψ n mal grösser.

b) Berücksichtigung der Dämpfung.

§ 12. Gedämpfte Bewegung. Man hat, mit Ausnahme der Zeiten, wo Induction stattfindet (10), die Bewegungsgleichung:

$$(18) \quad K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -h^2 \varphi - h \frac{d\varphi}{dt}.$$

Setzt man, wie gebräuchlich:

$$(19) \quad \frac{Tk}{2K} = \lambda, \quad \text{so wird:}$$

$$(20) \quad T = T_0 \frac{\pi^2 + \frac{1}{2}\lambda^2}{\pi^2}.$$

Bewegt sich der schwingende Theil zur Zeit $t = 0$ durch die Gleichgewichtslage, so hat man:

$$(21) \quad \varphi = \varphi_0 e^{-\frac{\lambda t}{T}} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right). \quad \text{und:}$$

$$(22) \quad \Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \Omega_0 e^{-\frac{\lambda t}{T}} \left\{ -\frac{\lambda}{\pi} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right\}$$

wobei:

$$(23) \quad \Omega_0 = \frac{\pi}{T} \varphi_0$$

die Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage zur Zeit $t = 0$.

Man schreibe ferner:

$$(24) \quad \frac{1}{\pi} \arctg \cdot \frac{\pi}{\lambda} = \nu,$$

und es wird die grösste Elongation nach der Zeit $T\nu$:

$$(25) \quad \varphi_{T\nu} = \Omega_0 \frac{T}{\pi} \cdot e^{-\lambda\nu} \sin(\pi\nu).$$

Die Grösse ν liegt zwischen $\frac{1}{2}$ und 0; bei kleiner Dämpfung sehr nahe an ersterem.

§ 13. Anwendung der Multiplicationsmethode. Es möge hier sofort der Fall der wiederholten Schliessung und Ausschaltung behandelt werden, da die einfacheren Fälle in demselben enthalten sind.

a) Beginn mit Schliessung, Ende mit Ausschaltung. Der Apparat befinde sich in Ruhe. Zur Zeit $t = 0$ schliesse man den inducirenden Strom. Der bewegliche Theil erlangt nach (14) und (6) die Geschwindigkeit:

$$\Omega_A = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} Q_A.$$

Nach der Zeit T geht der schwingende Theil mit der Geschwindigkeit (22):

$$-\Omega_A e^{-\lambda}$$

durch die Gleichgewichtslage. In diesem Moment schalte man die electromotorische Kraft der Batterie aus, es tritt nach (14) und (8) der Zuwachs:

$$\Omega_B = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} Q_B$$

hinzu, und daher die ganze Geschwindigkeit zur Zeit T :

$$\Omega_T = -\Omega_A e^{-\lambda} + \Omega_B.$$

Nach Verlauf von wieder T , d. i. zur Zeit $2T$ geht der Apparat mit der Geschwindigkeit:

$$-\Omega_T e^{-\lambda}$$

durch die Gleichgewichtslage; schliesst man in diesem Moment den inducirenden Strom, so tritt wieder Ω_A hinzu, und man hat:

$$\Omega_{2T} = -\Omega_T e^{-\lambda} + \Omega_A.$$

Zur Zeit $3T$ geht der Apparat mit der Geschwindigkeit:

$$-\Omega_{2T} e^{-\lambda} = \Omega_T e^{-2\lambda} - \Omega_A e^{-\lambda}$$

durch die Gleichgewichtslage; schaltet man in diesem Moment die electromotorische Kraft aus, so tritt dadurch Ω_B hinzu, und man hat:

$$\Omega_{3T} = \Omega_T e^{-2\lambda} - (\Omega_A e^{-\lambda} - \Omega_B),$$

für die Geschwindigkeit nach der zweiten Ausschaltung.

Setzt man die Operationen fort, so wird nach der dritten Ausschaltung:

$$\Omega_{5T} = \Omega_{3T} e^{-2\lambda} - (\Omega_A e^{-\lambda} - \Omega_B),$$

und nach der n ten Ausschaltung:

$$\Omega_{(2n-1)T} = \Omega_{(2n-3)T} e^{-2\lambda} - (\Omega_A e^{-\lambda} - \Omega_B),$$

oder, wenn man einsetzt:

$$(26) \Omega_{(2n-1)T} = (1 + e^{-2\lambda} + e^{-4\lambda} + \dots + e^{-2(n-1)\lambda}) (\Omega_B - \Omega_A e^{-\lambda}).$$

Der Ausschlag χ_n , den der Apparat nach der n . Ausschaltung zur Zeit $(2n-1)T + \nu T$ erreicht, ist nach (25):

$$\chi_n = \varphi_{(2n-1)T+\nu T} = \Omega_{(2n-1)T} \frac{T}{\pi} e^{-\lambda \nu} \sin(\pi \nu),$$

oder, wenn man Ω_A und Ω_B substituirt, der Ausschlag nach der n . Ausschaltung:

$$(27) \quad \chi_n = \frac{1 - e^{-2n\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}} \cdot \frac{T}{\pi K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} (Q_B - Q_A e^{-\lambda}) e^{-\lambda \nu} \sin(\pi \nu).$$

β) Beginn mit Ausschaltung, Ende mit Schliessung. In diesem Falle können die soeben gemachten Betrachtungen unmittelbar angewendet werden, man erhält den Ausschlag ψ_n nach der n . Schliessung, wenn man in (27) Q_A und Q_B mit einander vertauscht. Es wird:

$$(28) \quad \psi_n = \frac{1 - e^{-2n\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}} \cdot \frac{T}{\pi K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} (Q_A - Q_B e^{-\lambda}) e^{-\lambda \nu} \sin(\pi \nu).$$

Die Vorzeichen von χ_n und ψ_n sind entgegengesetzt.

γ) Verbindung beider Beobachtungen. Man bilde die Differenz von χ_n und ψ_n und setze den Werth von $(Q_B - Q_A)$ nach (9) ein, so wird:

$$(29) \quad \chi_n - \psi_n = \frac{1 - e^{-2n\lambda}}{1 - e^{-2\lambda}} (1 + e^{-\lambda}) \frac{T}{\pi K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} \cdot \frac{MJ_1^2}{w_2} e^{-\lambda \nu} \sin(\pi \nu).$$

Bei dieser Methode hat man ausser den in § 11 erwähnten Daten noch das logarithmische Decrement der Dämpfung, λ , zu bestimmen; nach (24) folgt daraus ν .

V. Andere Combinationen, wenn die Widerstände der beiden Leiter gleich sind.

§ 14. Werthe von Q , wenn der inducirende Strom einmal im ersten, ein anderesmal im zweiten Leiter stattfindet. Man setze $w_1 = w_2 = w$, was praktisch mit grosser Genauigkeit leicht erreicht werden kann. Es gibt dann ausser den unter IV erwähnten Combinationen noch andere, bei welchen die Werthe von L und N von selbst fortfallen.

Im Folgenden fügen wir zu den Zeichen Q_A und Q_B noch den Index $_1$, oder $_2$ hinzu, je nachdem der inducirende Strom im ersten oder zweiten Leiter stattfindet.

Man hat aus (6) und (8):

$$(30) \quad \alpha) \quad Q_{1A} = \frac{MJ_1^2}{w} \left\{ \frac{\frac{1}{2}L}{L+N} - 1 \right\}, \quad Q_{1B} = \frac{MJ_1^2}{w} \cdot \frac{\frac{1}{2}L}{L+N},$$

ebenso:

$$(31) \quad \beta) \quad Q_{2A} = \frac{MJ_1^2}{w} \left\{ \frac{\frac{1}{2}N}{L+N} - 1 \right\}, \quad Q_{2B} = \frac{MJ_1^2}{w} \cdot \frac{\frac{1}{2}N}{L+N}.$$

Und daraus:

$$(32) \quad Q_{1A} + Q_{2A} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{MJ_1^2}{4c}, \quad Q_{1B} + Q_{2B} = +\frac{1}{2} \cdot \frac{MJ_1^2}{w},$$

$$\text{und: } (33) \quad (Q_{1A} + Q_{1B}) + (Q_{2A} + Q_{2B}) = -\frac{MJ_1^2}{w}.$$

Man kann jede der drei Combinationen verwerthen, hier soll nur die letzte betrachtet werden.

§ 75. Anwendung der Multiplicationsmethode. In den im Folgenden zu betrachtenden Methoden sei das Intervall zweier aufeinander folgenden Inductionen $2T$.

a. Der inducirende Strom findet im ersten Leiter statt.

α) Beginn mit Schliessung, Ende mit Ausschaltung. Das schwingende System erhält bei der Schliessung zur Zeit $t = 0$ nach (14) und (16) die Geschwindigkeit:

$$\Omega_{1A} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} Q_{1A},$$

nach der Zeit $2T$ wird dieselbe, (22):

$$+ \Omega_{1A} e^{-2\lambda};$$

findet in diesem Momente Ausschaltung statt, so tritt nach (14) und (8) hinzu:

$$\Omega_{1B} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} Q_{1B},$$

und daher die ganze Geschwindigkeit zur Zeit $2T$:

$$\Omega_{2T} = \Omega_{1A} e^{-2\lambda} + \Omega_{1B}.$$

Nach Verlauf von wieder $2T$, also zur Zeit $4T$ wird sie:

$$\Omega_{2T} e^{-2\lambda},$$

und durch gleichzeitiges Schliessen also:

$$\Omega_{4T} = \Omega_{2T} e^{-2\lambda} + \Omega_{1A}.$$

Nach Verlauf von wieder $2T$, also zur Zeit $6T$, und nach dem zweiten Ausschalten:

$$\Omega_{6T} = \Omega_{2T} e^{-4\lambda} + (\Omega_{1A} e^{-2\lambda} + \Omega_{1B}),$$

nach dem dritten Ausschalten:

$$\Omega_{10T} = \Omega_{6T} e^{-4\lambda} + (\Omega_{1A} e^{-2\lambda} + \Omega_{1B});$$

nach dem n . Ausschalten:

$$(34) \quad \Omega_{(2n-1)2T} = (1 + e^{-4\lambda} + e^{-8\lambda} + \dots + e^{-4(n-1)\lambda}) (\Omega_{1A} e^{-2\lambda} + \Omega_{1B}).$$

Es ist also der nach dem n . Ausschalten zur Zeit $(2n-1)2T + T\nu$ eintretende grösste Ausschlag $\chi_{n,1}$ nach (25):

$$(35) \quad \chi_{n,1} = \frac{1 - e^{-4n\lambda}}{1 - e^{-4\lambda}} \cdot \frac{T}{\pi K} \cdot \frac{\partial M}{\partial q} \cdot e^{-\lambda\nu} \sin(\pi\nu) \{Q_{1A} e^{-2\lambda} + Q_{1B}\}.$$

β) Beginn mit Ausschaltung, Ende mit Schliessung. Der nach der n . Schliessung eintretende grösste Ausschlag $\psi_{n,1}$ ergibt sich aus (35), wenn man Q_{1A} und Q_{1B} miteinander vertauscht, also:

$$(36) \quad \psi_{n,1} = \chi_{n,1} \frac{Q_{1A} + Q_{1B} e^{-2\lambda}}{Q_{1A} e^{-2\lambda} + Q_{1B}}.$$

γ) Summierung. Es ist:

$$(37) \quad \chi_{n,1} + \psi_{n,1} = \frac{1 - e^{-4n\lambda}}{1 - e^{-4\lambda}} \cdot \frac{T}{\pi K} \cdot \frac{\partial M}{\partial q} \cdot e^{-\lambda\nu} \sin(\pi\nu) (1 + e^{-2\lambda})(Q_{1A} + Q_{1B}),$$

dabei haben $\chi_{n,1}$ und $\psi_{n,1}$ dasselbe Vorzeichen.

b. Der inducirende Strom findet im zweiten Leiter statt. Man führe die soeben unter α), β), γ) angedeuteten Operationen in diesem Falle aus, und man findet die entsprechende Summe $(\chi_{n,2} + \psi_{n,2})$ aus (37), indem man statt Q_1 überall Q_2 setzt. Es ist also:

$$(38) \quad \chi_{n,2} + \psi_{n,2} = (\chi_{n,1} + \psi_{n,1}) \frac{Q_{2A} + Q_{2B}}{Q_{1A} + Q_{1B}}.$$

c. Combination der Beobachtungen. Die Summe von (37) und (38) ergibt nach (33):

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_{n,1} + \psi_{n,1} + \chi_{n,2} + \psi_{n,2} \\ = - \frac{1 - e^{-4n\lambda}}{1 - e^{-4\lambda}} (1 + e^{-2\lambda}) \frac{T}{\pi K} \cdot \frac{\partial M}{\partial q} \cdot \frac{M J_1^2}{w} e^{-\lambda\nu} \sin(\pi\nu). \end{array} \right.$$

Zur Bestimmung von w braucht man dieselben Daten wie im § 13.

§ 16. Constante Ablenkung durch schnell aufeinanderfolgende Inductionsstösse. Folgen die Inductionen in so kurzen Intervallen aufeinander, dass dieselben zur Schwingungszeit des Apparates sehr klein sind, so erhält das Dynamometer eine neue, von der alten um einen bestimmten Winkel q abgelenkte Gleichgewichtslage. Man kann dieselbe als durch die constanten Ströme j_1 und j_2 hervorgerufen betrachten, deren Product nach (6) und (8) durch die Relation:

$$(40) \quad j_1 j_2 1' = m \left[(A) \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt + (B) \int_0^{\infty} i_1 i_2 dt \right] = m (Q_A + Q_B)$$

bestimmt ist. m bedeutet die Anzahl der Schliessungen und Ausschaltungen in der Secunde.

Hingegen ist in diesem Falle die galvanometrische Wirkung des inducirten Stromes Null, da nach (6) und (8):

$$(41) \quad m \left[(A) \int_0^{\infty} i_2 dt + (B) \int_0^{\infty} i_2 dt \right] = m (q_A + q_B) = 0.$$

Die Bewegungsgleichung des schwingenden Theiles ist:

$$(42) \quad K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = j_1 j_2 \frac{\partial M}{\partial \varphi} - h^2 \varphi - k \frac{d\varphi}{dt};$$

ist Gleichgewicht eingetreten, so wird:

$$\varphi = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} \cdot j_1 j_2, \text{ oder, nach (40) und (15):}$$

$$(43) \quad \varphi = \frac{T_0^2}{\pi^2 K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} m (Q_A + Q_B).$$

Bedeutet φ_1 den constanten Ausschlag, wenn der inducirende Strom durch den ersten Leiter geht, φ_2 dasselbe für den zweiten Leiter, so wird:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{T_0^2}{\pi^2 K} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} m (Q_{1A} + Q_{1B} + Q_{2A} + Q_{2B}),$$

oder nach (33):

$$(44) \quad \varphi_1 + \varphi_2 = - \frac{T_0^2}{\pi^2 K} m \frac{\partial M}{\partial \varphi} \cdot \frac{M J_1^2}{w}.$$

Auch dies ist ein sehr einfacher Ausdruck; die nöthigen Daten sind dieselben wie in § 11, nur kommt m hinzu.

Es möge bemerkt werden, dass man die Intervalle zwischen den aufeinander folgenden Inductionen nicht beliebig klein machen darf, sondern es muss darauf geachtet werden, dass immer die vorhergehende Induction schon vollständig aufgehört habe, und der stationäre Zustand eingetreten sei, bevor die nächste Induction beginnt.

VI. Vollständige Lösung der Inductionsgleichungen.

§ 17. Da es bei den bisher betrachteten Versuchen von Interesse, für die in § 16 angeführten aber nothwendig ist, den vollständigen Verlauf der Induction zu kennen, so

sei es gestattet, die vollständige Lösung der Simultan-Differentialgleichungen:

$$(2) \quad E_1 = i_1 w_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad E_2 = i_2 w_2 + N \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

im allgemeinen und für die besonderen Fälle der Schliessung und der Ausschaltung hier auszuschreiben.

a) Allgemeiner Fall. Setzt man zur Abkürzung:

$$(45) \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{w_1 N + w_2 L}{LN - M^2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{V(w_1 N - w_2 L)^2 + 4 w_1 w_2 M}{LN - M^2},$$

so ist die allgemeine Lösung der Gleichungen (2):

$$(46) \quad \begin{cases} i_1 = J_1 + e^{-\alpha t} \{s_1' e^{+\beta t} + s_1'' e^{-\beta t}\}, \\ i_2 = J_2 - \frac{e^{-\alpha t}}{M} \left\{ s_1' \left(L - \frac{w_1}{\alpha - \beta} \right) e^{+\beta t} + s_1'' \left(L - \frac{w_1}{\alpha + \beta} \right) e^{-\beta t} \right\}. \end{cases}$$

Hier gilt, wie in (1) $E_1 = J_1 w_1$, $E_2 = J_2 w_2$, und sind J_1 und J_2 die von der Induction unabhängigen Theile der Stromintensitäten.

Ferner sind s_1' und s_1'' Constante, die durch die Anfangsbedingungen der Induction bestimmt werden.

Da schliesslich β (45), immer reell ist, können die Exponentialausdrücke hier keine goniometrischen Functionen bedeuten, und können demnach auch keine electrischen Schwingungen stattfinden.

In unseren betrachteten Fällen, §§ 6, 7, ist immer $E_2 = 0$, also auch $J_2 = 0$, und insbesondere

b) bei Schliessung des Inductionsstromes sind die Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \quad i_1 = 0, \quad i_2 = 0,$$

und daraus findet man:

$$(47) \quad \begin{cases} i_1 = J_1 - \frac{J_1}{2} \cdot \frac{e^{-\alpha t}}{\beta w_1} \left\{ (L(\alpha + \beta) - w_1)(\alpha - \beta) e^{+\beta t} - (L(\alpha - \beta) - w_1)(\alpha + \beta) e^{-\beta t} \right\}, \\ i_2 = + \frac{J_1}{2} \cdot \frac{e^{-\alpha t}}{M \beta w_1} \left\{ L^2 (\alpha^2 - \beta^2) - 4 L \alpha w_1 + w_1^2 \right\} (e^{+\beta t} - e^{-\beta t}). \end{cases}$$

c) Bei Ausschaltung der electromotorischen Kraft E_1 mittels Brücke sind die Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \quad i_1 = J_1, \quad i_2 = 0,$$

ferner ist $E_1 = 0$, daraus ergibt sich:

$$(48) \quad \begin{cases} i_1 = + \frac{J_1}{2} \frac{e^{-\alpha t}}{\beta w_1} \cdot \left\{ (L(\alpha + \beta) - w_1) (\alpha - \beta) e^{+\beta t} - (L(\alpha - \beta) - w_1) (\alpha + \beta) e^{-\beta t} \right\}, \\ i_2 = - \frac{J_1}{2} \frac{e^{-\alpha t}}{M \beta w_1} \left\{ L^2 (\alpha^2 - \beta^2) - 4 L \alpha w_1 + w_1^2 \right\} (e^{+\beta t} - e^{-\beta t}). \end{cases}$$

Die variablen Theile der Gleichungen (47) und (48) unterscheiden sich nur durch ihr Vorzeichen voneinander.

Diese Ausdrücke stellen den zeitlichen Verlauf der beiden Fälle der Induction vollständig dar. Je grösser α (45), desto schneller nehmen die Intensitäten ab.

VII. Berechnung von M und $\partial M / \partial \varphi$ für zwei parallele, conaxiale Rollen von endlichem Querschnitte.

§ 18. Zwei Kreise. Es gilt allgemein:

$$(49) \quad \begin{cases} M = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2, & \text{und daraus:} \\ \frac{\partial M}{\partial \varphi} = \iint \left\{ \frac{\partial (\cos \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r} \cos \varepsilon \right\} ds_1 ds_2. \end{cases}$$

Das Dynamometer (§§ 23, 24) bestehe aus zwei parallelen Rollen, die in der Gleichgewichtslage einander parallel und conaxial sind. Die bewegliche Rolle sei um eine ausserhalb ihren Mittelpunkt liegende Axe, Mitte von $\overline{00}$, drehbar, die Drehungsebene senkrecht zu den Rollenebenen (Fig. 8).

Man betrachte die Rollen in erster Annäherung als Kreise von unendlich kleinem Querschnitt, die sich auf der halben Länge der Rollen befinden.

Es sei h der Abstand der beiden Kreise in der Gleichgewichtslage, R_1 , R_2 ihre Radien, l der Abstand des Mittelpunktes des drehbaren Kreises von der Drehungsaxe, ferner ω_1 und ω_2 die Winkel, welche die zu den Leiterelementen ds_1 und ds_2 gezogenen Radien R_1 und R_2 mit der Drehungsebene bilden; schliesslich φ der Ausschlag, d. i. der Winkel, den die beiden Kreisebenen miteinander bilden.

Man findet:

$$(50) \quad \begin{cases} r^2 = R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2 R_1 R_2 \cos (\omega_2 - \omega_1), \\ + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (R_1 R_2 \cos \omega_1 \cos \omega_2 + l (l + R_1 \cos \omega_1 + R_2 \cos \omega_2)) \\ + 2 h (l + R_2 \cos \omega_2) \sin \varphi, \\ \cos \varepsilon = \cos (\omega_2 - \omega_1) - 2 \sin \omega_1 \sin \omega_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r} &= -\frac{1}{r^3} \left\{ \sin \varphi \left\{ R_1 R_2 \cos \omega_1 \cos \omega_2 + l(l + R_1 \cos \omega_1 + R_2 \cos \omega_2) \right\} \right. \\ &\quad \left. + h(l + R_2 \cos \omega_2) \cos \varphi \right\}, \\ \frac{\partial (\cos \varepsilon)}{\partial \varphi} &= -\sin \omega_1 \sin \omega_2 \sin \varphi. \end{aligned} \right.$$

Findet die Induction nur dann statt, wenn beide Kreise einander parallel sind, so hat man in obigen Ausdrücken $\varphi = 0$ zu setzen; es bleibt:

$$(52) \quad \varphi = 0: \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{r} = -\frac{h}{r^3} (l + R_2 \cos \omega_2); \quad \frac{\partial (\cos \varepsilon)}{\partial \varphi} = 0.$$

Setzt man ferner:

$$(53) \quad \omega_2 - \omega_1 = \omega,$$

wobei nur ω_2 und ω als Veränderliche betrachtet werden, so findet man, nachdem sich einige Glieder von $\partial M / \partial \varphi$ auf Null reduciren:

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= R_1 R_2 \int_0^{2\pi} d\omega_1 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega \, d\omega}{(R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2 R_1 R_2 \cos \omega)^{1/2}}, \\ \frac{\partial M}{\partial \varphi} &= -R_1 R_2 h l \int_0^{2\pi} d\omega_1 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \omega \, d\omega}{(R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2 R_1 R_2 \cos \omega)^{3/2}}. \end{aligned} \right.$$

Schreibt man:

$$(55) \quad c = \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + h^2}},$$

so wird:

$$(56^1) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= 4\pi \sqrt{R_1 R_2} \left\{ \left(\frac{2}{c} - c \right) F(c) - \frac{2}{c} E(c) \right\}, \\ \frac{\partial M}{\partial \varphi} &= -\frac{\pi c h l}{\sqrt{R_1 R_2}} \left\{ \frac{2 - c^2}{1 - c^2} E(c) - 2 F(c) \right\}. \end{aligned} \right.$$

§ 19. Ausdehnung auf zwei Rollen von endlichem Querschnitt. Nach Maxwell's Vorgang²⁾ hat man den Mittelwerth der Function P so zu bestimmen, dass:

1) Den Werth von M gibt schon Maxwell 2. p. 306; auch der von $\partial M / \partial \varphi$ findet sich sofort aus der dort für dM/db gegebenen Formel, wenn man beachtet, dass $b = h$, und aus (54):

$$\partial M / \partial \varphi = l (dM/dh).$$

2) Maxwell, l. c. p. 304.

$$(57) \quad \overline{P} \xi_1 \eta_1 \xi_2 \eta_2 = \int_{-\frac{\eta_2}{2}}^{+\frac{\eta_2}{2}} \int_{-\frac{\xi_2}{2}}^{+\frac{\xi_2}{2}} \int_{-\frac{\eta_1}{2}}^{+\frac{\eta_1}{2}} \int_{-\frac{\xi_1}{2}}^{+\frac{\xi_1}{2}} P d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2,$$

wo ξ_1, ξ_2 die Dicke der Rollen in der Richtung des Radius, η_1, η_2 die Breiten derselben in der Richtung der h bedeuten. Im gegenwärtigen Falle von vier Variablen hat man:

$$\begin{aligned} \overline{P} = P_0 &+ \frac{1}{24} \left\{ \xi_1^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi_1^2} + \dots + \eta_2^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \eta_2^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{960} \left\{ \xi_1^4 \frac{\partial^4 P_0}{\partial \xi_1^4} + \dots + \eta_2^4 \frac{\partial^4 P_0}{\partial \eta_2^4} \right\} \\ &+ \frac{1}{576} \left(\xi_1^2 \eta_1^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi_1^2 \partial \eta_1^2} + \dots + \xi_1^2 \eta_2^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi_1^2 \partial \eta_2^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Sind beide Rollen sehr nahe gleich, so kann gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_2 = \xi, \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta, \quad R_1 = R_2 = R, \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2}{\partial h^2}, \quad c^2 = \frac{4R^2}{4R^2 + h^2} \end{aligned} \quad \text{und:}$$

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{P} = P_0 &+ \frac{1}{12} \left\{ \xi^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial R^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial h^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{480} \left(\xi^4 \frac{\partial^4 P_0}{\partial R^4} + \eta^4 \frac{\partial^4 P_0}{\partial h^4} \right) + \frac{1}{144} \xi^2 \eta^2 \frac{\partial^4 P_0}{\partial R^2 \partial h^2} + \dots \end{aligned} \right.$$

Es muss bemerkt werden, dass die Quotienten nach R vorerst nach R_1 oder nach R_2 zu bilden sind, und erst nach erfolgter Bildung $R_1 = R_2 = R$ zu setzen ist.

Man wende nun Gleichung (58) zur genaueren Berechnung von M und $\partial M / \partial \varphi$ an; doch möge die Entwicklung nur bis zu den quadratischen Gliedern geschehen.¹⁾

§ 20. Quotienten für M . Man schreibe abgekürzt:

$$(59) \quad M_0 = 4\pi \sqrt{R_1 R_2} \{ \dots \},$$

und es wird:

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 M_0}{\partial R^2} &= -\frac{\pi}{R} \{ \dots \} + 4\pi \left(\frac{\partial c}{\partial R} + R \frac{\partial^2 c}{\partial R^2} \right) \frac{d[\dots]}{dc} + 4\pi R \frac{d^2[\dots]}{dc^2} \left(\frac{\partial c}{\partial R} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 M_0}{dh^2} &= +4\pi R \left\{ \frac{d[\dots]}{dc} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial h^2} + \frac{d^2[\dots]}{dc^2} \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial h} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

1) Für M gibt Rowland, Amer. Journ. 15. p. 331. 1878 die Entwicklung; indess stimmt nur ein Ausdruck und zwar der für $\partial^2 M_0 / \partial h^2$ gegebene, (68) mit meiner mehrfach wiederholten Rechnung überein.

Es ist nun:

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{\partial c}{\partial R} = \frac{h^2 c^3}{8R}, & \frac{\partial^2 c}{\partial R^2} = -\frac{c}{4R^2} - \frac{3h^2 c^5}{16R^4}, \\ \frac{\partial c}{\partial h} = -\frac{hc^3}{4R^2}, & \frac{\partial^2 c}{\partial h^2} = -\frac{c^3}{4R^2} + \frac{3h^2 c^5}{16R^4}. \end{cases}$$

Ferner:

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{d[...]}{dc} = \left(\frac{2}{c^2} - 1\right) \frac{E(c)}{1-c^2} - \frac{2}{c^2} F(c), \\ \frac{d^2[...]}{dc^2} = -\frac{4+7c^2-c^4}{c^3(1-c^2)^2} E(c) + \frac{4-5c^2}{c^3(1-c^2)} (Fc). \end{cases}$$

§ 21. Quotienten für $\partial M / \partial q$. Man setze:

$$(63) \quad \frac{c}{\sqrt{R_1 R_2}} = \gamma \quad \text{und zur Abkürzung:}$$

$$(64) \quad \left(\frac{\partial M}{\partial q}\right)_0 = -\pi h l \gamma \{ \dots \} \quad \text{Es wird:}$$

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial M}{\partial q}\right)_0}{\partial R^2} &= -\pi h l \left\{ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial R^2} \{ \dots \} + \left(2 \frac{\partial \gamma}{\partial R} \cdot \frac{\partial c}{\partial R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma \frac{\partial^2 c}{\partial R^2} \right) \frac{d[...]}{dc} + \gamma \frac{d^2[...]}{dc^2} \left(\frac{\partial c}{\partial R} \right)^2 \right\}, \\ \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial M}{\partial q}\right)_0}{\partial h^2} &= -\frac{\pi h l}{R} \left\{ \left(\frac{1}{h} \frac{\partial c}{\partial h} + \frac{\partial^2 c}{\partial h^2} \right) \{ \dots \} + \left(\frac{c}{h} \frac{\partial c}{\partial h} + 2 \left(\frac{\partial c}{\partial h} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c \frac{\partial^2 c}{\partial h^2} \right) \frac{d[...]}{dc} + c \frac{d^2[...]}{dc^2} \left(\frac{\partial c}{\partial h} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$(66) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -\frac{c^3}{2R^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial R^2} = +\frac{c^3}{4R^3} (3c^2 - 1).$$

$$(67) \quad \begin{cases} \frac{d[...]}{dc} = \frac{c(1+c^2)}{(1-c^2)^2} E(c) - \frac{c}{1-c^2} F(c), \\ \frac{d^2[...]}{dc^2} = \frac{1+7c^2}{(1-c^2)^3} E(c) - \frac{1+3c^2}{(1-c^2)^2} F(c). \end{cases}$$

§ 22. Werthe der Entwicklung. Setzt man ein, und kürzt man ab, so ergibt sich:

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 M_0}{\partial R^2} &= -\frac{\pi c}{R} \left\{ \frac{E(c)}{1-c^2} \left[1 - \frac{h^2}{4R^2} (4-8c^2+3c^4) + \frac{h^4}{16R^4} \cdot \frac{c^2}{1-c^2} (-4+7c^2-c^4) \right] \right. \\ &\quad \left. - F(c) \left[1 - \frac{h^2}{4R^2} (4-6c^2) + \frac{h^4}{16R^4} \cdot \frac{c^2}{1-c^2} (4-5c^2) \right] \right\}, \\ \frac{\partial^2 M_0}{\partial h^2} &= -\frac{\pi c}{R(1-c^2)} \left\{ E(c) \left[(2-c^2) - \frac{h^2}{4R^2} \cdot \frac{c^2}{1-c^2} \cdot 2(1-c^2+c^4) \right] \right. \\ &\quad \left. - F(c) \left[2(1-c^2) - \frac{h^2}{4R^2} c^2 (2-c^2) \right] \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(68) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_0}{\partial R^2} &= - \frac{\pi h l c^3}{4 R^3} \left\{ \frac{E(c)}{(1-c^2)^2} \left[(-3 + 8c^2 - 10c^4 + 3c^6) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 5 \frac{h^2}{4 R^2} c^4 (1 + c^2) + \frac{h^4}{16 R^4} c^4 \frac{1 + 7c^2}{1 - c^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{F(c)}{(1-c^2)} \left[(-3 + 8c^2 - 6c^4) - 5 \frac{h^2}{4 R^2} c^4 + \frac{h^4}{16 R^4} c^4 \frac{1 + 3c^2}{1 - c^2} \right] \right\}, \\ \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_0}{\partial h^2} &= + \frac{\pi h l c^3}{4 R^3} \left\{ \frac{E(c)}{(1-c^2)^2} \left[4(1 - c^2) - \frac{h^2 c^2}{4 R^2} (6 - 4c^2 + 8c^4 + \frac{c^2(1+7c^2)}{1-c^2}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{F(c)}{1-c^2} \left[2(2 - c^2) - \frac{h^2 c^2}{4 R^2} \left(6 + \frac{4c^2}{1-c^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Anmerkung. Die beiden letzten Quotienten können auch bei der Berechnung der wechselseitigen ponderomotorischen Anziehung der zwei conaxialen Rollen in Richtung ihrer Axe verwendet werden, man hat dann nur den Factor l fortzulassen.

VIII. Vorläufige Versuche.

§ 23. Art der Schliessung und Ausschaltung. Die im Nachstehenden angeführten Versuche hatten lediglich den Zweck, nachzuweisen, dass man mittelst der betrachteten Methoden schon bei gewöhnlichen Verhältnissen sehr gut messbare Ausschläge bekommt.

Vorher bleibt jedoch noch ein im § 7 erwähnter Punkt aufzuklären, nämlich wie man die Ausschaltung der electromotorischen Kraft E_1 vorzunehmen habe, sodass dabei die Constante L und der Widerstand w_1 des Leiters ungeändert bleibe.

Es sei (Fig. 8) die Horizontalprojection der ganzen benutzten Anordnung, R_2 die bewegliche, R_1 die fixe Rolle. Verbindet man d mit e , so hat man den einfach geschlossenen Leiter $ambcdefa$, dessen Widerstand w_1 ist, und der die Inductionsconstante L besitzt. Im Moment der Schliessung bei de beginnt die Induction der Schliessung (§ 6, § 17, b). Die stationäre Intensität sei $J_1 = E_1/w_1$. Man schliesse nun bei h , und man hat einen zweiten geschlossenen Leiter $deg hnd$ vom Widerstand w_1' , der mit der ersten Leitung das Stück de , dessen Widerstand verschwindend ist, gemeinsam hat. Es sei nun w_1' nach E_1' so regulirt, dass man habe:

$$(69) \quad J_1 = \frac{E_1}{w_1} = \frac{E_1'}{w_1'},$$

was immer mit Leichtigkeit erreicht werden kann.

Nun trenne man d und e , es tritt dabei, wie auch der Versuch zeigte, kein Funke auf; man hat dann einen einzigen unverzweigten Leiter $ambcdnhgefa$, vom Widerstande $w_1 + w_1'$, in dem die electromotorische Kraft $E_1 + E_1'$ wirkt, und in welchem nach (69) die Intensität:

$$(70) \quad J = \frac{E_1 + E_1'}{w_1 + w_1'} = J_1,$$

also dieselbe, wie vorhin, auftritt.

Man wähle nun an den Leiterstücken ab und dg zwei Punkte m und n in solcher Weise, dass der Widerstand des Stückes $mabcdn$ gleich w_1 sei, und verbinde sie mittelst einer Brücke mpn von verschwindendem Widerstande.

Es ist dann im geschlossenen Leiter $mabcdnmpm$ im Momente der Ausschaltung von E_1 und E_1' die Stromintensität J_1 vorhanden, sein Widerstand ist w_1 , und seine Inductionsconstante mit ganz ausserordentlicher Annäherung gleich L . Denn die Leitertheile ausserhalb der Rolle R_1 haben auf den Werth von L verschwindenden Einfluss, weil ihre Theile sehr vielemal kürzer sind und weit voneinander abstehen, während für die Leitertheile der Rolle gerade das Umgekehrte gilt.

Es wird also auf diese Weise im Momente der Ausschaltung diejenige Bedingung erreicht, die der Rechnung im § 7 zu Grunde gelegt ist; im Momente, wo die Brücke m und n verbindet, beginnt die Induction der Ausschaltung, (§ 7, § 17, c). Um wieder im Leiter $ambcdefa$ eine Schliessung hervorzubringen, öffne man, während die Brücke bei mpn geschlossen bleibt, bei h , öffne sodann die Brücke bei p und schliesse bei de . In diesem Momente beginnt wieder die Induction der Schliessung (§ 6, § 17, b). Man vermeidet auf diese Weise jede Funkenbildung im inducirenden Leiter, ausgenommen den Fall, wo die electromotive Kraft E_1 sehr gross ist, und bei der Schliessung Funken überspringen, bevor die Leiterenden einander berühren.

Das Schema des soeben betrachteten Vorganges ist das folgende:

Der Anfangszustand ist der durch Fig. 8 dargestellte.

1. Niederdrücken des Tasters bei *de*. Es entsteht die Induction der Schliessung.

2. Niederdrücken des Tasters bei *h*.

3. Loslassen des Tasters bei *de*. Kein Funke.

4. Verbindung von *mn* mittelst Brücke durch Niederdrücken des Tasters bei *p*. Es entsteht die Induction der Ausschaltung.

5. Loslassen des Tasters bei *h*. Funke, aber ausserhalb des geschlossenen inducirenden Leiters *m b c d n p m*.

6. Lösung der Verbindung *mn* durch Loslassen des Tasters bei *p*. Kein Funke, kein Strom.

7. Niederdrücken des Tasters bei *de*. Es entsteht die Induction der Schliessung wie unter 1 u. s. f.

§ 24. Das Dynamometer (Fig. 8) und die erreichten Ausschläge. Die eine von zwei gleichen Rollen R_2 ruhte mit verticaler Windungsfläche auf einem horizontalen Arm, welcher auf den Kupferdrähten 00 bifilar und senkrecht zum erdmagnetischen Meridian aufgehängt war, die Ebene dieser Drähte war senkrecht zur Windungsebene, um pendelartige Schwingungen um den Ort der Aufhängung zu vermeiden; das Gegengewicht Q hielt den Arm horizontal. Die andere Rolle R_1 war der aufgehängten fest gegenüber gestellt und parallel und conaxial der Ruhelage der beweglichen Rolle.

Jede der Rollen hatte 34 Lagen eines im Durchschnitt etwa 0,33 mm dicken isolirten Kupferdrahtes; die erste 1056, die zweite 1058 Windungen, ihre Widerstände (nämlich 1. der inducirenden Rolle + Batterie, und 2. der inducirten Rolle) waren auf 115 Ohm abgeglichen. Ferner war für den mittleren Querschnitt beider Rollen $R = 5,2$ cm, $h = \frac{3}{4} R$. Die Entfernung der Drehungsaxe vom Mittelpunkt der beweglichen Rolle: $l = 6,8$ cm, die Schwingungszeit $T = 15,03$ (Sec.), die Masse des aufgehängten Apparates 1380,0 g, sein Trägheitsmoment $K = 48600$ g(cm)². Ausserdem:

$$M \frac{\partial M}{\partial \varphi} = 2977,6 \text{ (cm)}^2 (1056)^2 (1058)^2 \text{ und } w_1 = w_2 = 115 \cdot 10^9 \frac{(\text{cm})}{(\text{Sec})}.$$

Bei dem einfachsten Fall der einmaligen Schliessung und Ausschaltung (§ 11 (17)) ist der erreichte Ausschlag:

$$(17) \quad \Phi = \frac{T}{\pi K} \cdot M \frac{\partial M}{\partial \varphi} \frac{J_1^2}{w_2},$$

oder, bei den angeführten Werthen:

$$\Phi = 3,267 \frac{(\text{sec})^2}{(\text{g})(\text{cm})} \cdot J_1^2 (\text{Ampère}) \cdot \frac{1}{100}.$$

Während eines Versuches war $J_1 = 0,209$ (Ampère), es war demnach zu erwarten $\Phi = 0,00143$, die Beobachtung ergab $\Phi = 0,00221$, ein für so rohe qualitative Bestimmung hinreichend übereinstimmendes Resultat, insbesondere, wenn bemerkt wird, dass in unmittelbarer Nähe der Rollen, in einer Entfernung von wenigen Decimetern, im Mauerwerke, sich die sehr bedeutenden Eisenmassen von Heizröhren befinden.

Gegenwärtige Arbeit entstand infolge der Ueberlegung, dass man bei Benutzung der ponderomotorischen Wirkungen des inducirten Stromes zur Bestimmung des Ohms sich nicht nur, wie bisher, nur auf eine Aeusserungsart derselben beschränken möge.

Vorstehende Betrachtungen sollen die theoretische Möglichkeit der dynamometrischen Messungsmethode nachweisen, und die einfachsten diesbezüglichen Verhältnisse, und zwar ohne Behandlung der Correctionen darlegen.

Ueber die wirkliche Brauchbarkeit der angedeuteten Methoden werden nur genaue Versuche entscheiden.

Ich hoffe, demnächst solche Untersuchungen ausführen zu können.

Physikal. Inst. d. Univ. Budapest, im Januar 1883.

XIII. Ueber die Messung localer Variationen der erdmagnetischen Horizontalintensität; von F. Kohlrausch.

(Aus den Sitzungsber. der math. phys. Classe d. k. bayr. Akad. d. Wiss. 1883. Heft 1, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Während zeitliche Aenderungen der horizontalen Componente des Erdmagnetismus, wenigstens über kürzere Zeiträume, mit fast beliebiger Schärfe gemessen werden können, fehlt es bis jetzt an einem entsprechenden Messungsmittel