IV. *Ueber die Dämpfung schneller electrischer Schwingungen;* *von V. Bjerknes aus Christiania.*

(Hierzu Taf. I Fig. 6–10.)

1. Die schnellen electrischen Schwingungen, welche in Folge eines wirksamen Funkens erst im primären, dann im secundären Stromkreise auftreten, sind nach kurzer Zeit wieder vollständig verschwunden. Ehe das Inductorium Zeit hat, einen neuen Funken zu erzeugen, muss schon längst Gleichgewicht eingetreten sein. Einfache Ueberlegungen machen dies jedenfalls sehr wahrscheinlich. So beträgt in den folgenden Versuchen die Schwingungszahl etwa 30 Millionen in der Secunde: der Unterbrecher bewirkt in derselben Zeit 42 Contacte. Zwischen zwei Funken können also mehr als 700 000 Schwingungen ohne neue Energiezufuhr ablaufen. Bei Pendeln oder Stimmgabeln genügt dies zum vollständigen Absterben der Bewegung, selbst wenn man jeden Widerstand möglichst entfernt. Bei den electrischen Schwingungen liegen in der Energieausstrahlung und dem Widerstande kräftigere Ursachen der Dämpfung vor, und das Gleichgewicht muss sich in beiden Stromkreisen nach einer viel geringeren Anzahl von Schwingungen herstellen.

Die Kenntniss der Gesetze für das Absterben der electrischen Schwingungen ist in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Denn erstens lassen sich aus der Annahme einer hinlänglich starken Dämpfung der primären Schwingungen die bekannten Resultate der Herren Sarasin und de la Rive, die sogenannte multiple Resonanz, theoretisch ableiten, was ich in einer folgenden Abhandlung zeigen werde. Andererseits können Untersuchungen über die Dämpfung ein Licht werfen auf die Frage von der Energieausstrahlung und weiter können sie die Berechnung des Widerstandes gegen diese schnell wechselnden, nur in den äusseren Schichten kreisenden Ströme ermöglichen.

2. In dem Folgenden mache ich den Versuch, einen Werth für die Dämpfung im primären Stromleiter aus der

Schärfe der Resonanzerscheinung abzuleiten. Je mehr Schwingungen nämlich im primären Leiter einander folgen, desto mehr derselben werden auch bei vorhandener Resonanz ihre Wirkung im secundären Leiter verstärken können. Aus dem Maasse also, in welchem die Wirkung bei vorhandener Resonanz die Wirkung bei nicht vorhandener Resonanz übertrifft, ist ein Rückschluss auf die Zahl der Schwingungen des primären Leiters möglich. Vorausgesetzt ist dabei allerdings, dass die Dämpfung des secundären Leiters verhältnissmässig klein sei. Dies wird aus verschiedenen Betrachtungen und Versuchsergebnissen wahrscheinlich gemacht.

Für solche Leser, welche sich für die Einzelheiten weniger interessiren, möchte ich schon hier das Ergebniss meiner Versuche mittheilen. Ich finde, dass unter den üblichen Verhältnissen die Dämpfung des primären Leiters sehr stark ist. Jede Elongation beträgt höchstens 0,77 der vorhergehenden Elongation nach derselben Seite. Für den bestimmten Fall, auf welchen sich meine besten Versuche beziehen, gibt die Fig. 9 ein Bild des zeitlichen Ablaufs der Schwingungen in der üblichen Weise. Die Figuren 10_a und 10_b veranschaulichen in derselben Weise die Schwingungen im secundären Stromkreise. wenn die Eigenschwingungen derselben gleich schnell (*a*) oder um $\frac{1}{10}$ schneller (*b*) als die des primären Leiters ablaufen.

Die Arbeit wurde im Laufe des Wintersemesters in dem hiesigen physikalischen Institut ausgeführt. Die Grundzüge der Methode, sowie viele werthvolle Winke bei den Einzelheiten der Ausführung verdanke ich Hrn. Prof. Hertz. Auch will ich nicht unterlassen, zu erwähnen, dass ich bei diesen Arbeiten viel Nutzen aus den Vorlesungen des Hrn. Poincaré über Electrodynamik gezogen habe. Diese Vorlesungen, die ich im Sommersemester 1890 hörte, sind jetzt in Druck erschienen.¹⁾ Mit den in der nachträglich hinzugefügten Note V l. c. p. 247 ausgesprochenen Gedanken wird man wesentliche Uebereinstimmungen finden.

1) H. Poincaré, *Electricité et Optique II*. Paris 1891. Georges Carré, Editeur.

I. Die Instrumente und die Vorversuche.

3. Ein vollständiges Bild der Resonanzerscheinungen erhält man durch eine *Messung der Intensität der secundären Schwingungen bei verschiedenen bekannten Verhältnissen zwischen der Schwingungsdauer der beiden Stromkreise*. Diese Intensität lässt sich aus der Länge des secundären Funkens abschätzen, aber vortheilhafter ist die Anwendung eines neuen Hilfsmittels: der durch die electrischen Schwingungen hervorgerufenen mechanischen Kräfte.¹⁾

4. Die allgemeine Aufstellung bei dieser Intensitätsmessung ersieht man aus Fig. 6.

Der primäre Stromleiter CC' ist, abgesehen vom Inductorium, ein Umdrehungskörper. Jede der Capacitäten CC' ist eine kreisförmige Scheibe aus Zinkblech, 40 cm im Durchmesser, auf einem hölzernen Fusse festgenagelt und im Mittelpunkte mit einer Polschraube zum Einklemmen der Leitungsdrähte versehen. Diese bestehen aus 2 mm starken Kupferdrähten von verschiedener Länge, je nach der gewünschten Schwingungsdauer. Die Funken springen über zwischen Messingkugeln von 2 cm Radius, oder zwischen kleinen Kugelschalen von 1 cm Radius. Meistens wurde ein kleines, durch zwei kleine Accumulatoren gespeistes Inductorium benutzt. Einige Versuche wurden auch mit einem grossen Ruhmkorff mit Quecksilberunterbrecher gemacht, welcher durch fünf Accumulatoren erregt wurde. Das Inductorium wurde immer möglichst nahe gestellt, die Zuleitungsdrähte waren kurz und dünn und in kleinen Löchern auf der Rückseite der Kugeln befestigt.

Der secundäre Stromkreis bestand aus 2 mm starkem Kupferdraht, welcher ein Quadrat von 60 cm Seitenlänge bildete und war genau in einer Meridianebene des primären Leiters aufgestellt, 50 cm von demselben entfernt. Die Seite a konnte zur Aenderung der Schwingungsdauer durch andere ersetzt werden. Bei E war der secundäre Kreis unterbrochen; hier war eine Art von Electrometer für die erwähnte Intensitätsmessung eingeschaltet.

1) H. Hertz, Wied. Ann. 42. p. 407. 1891.

5. Infolge der Electricitätsbewegung ist der eine Pol positiv, der andere negativ, oder umgekehrt. Ein in dem Zwischenraum aufgehängter kleiner Leiter wird durch Influenz in einer entsprechend wechselnden Weise electricisirt und also von beiden Polen angezogen. Sehr zweckmässig ist es, den Polen die Gestalt von Quadranten, die diametral einander gegenüber liegen, zu geben, und den kleinen Leiter in der bekannten Sektorenform einer Electrometernadel herzustellen. (Siehe Fig. 7.)

Die Quadranten hatten, inwendig gemessen, 3 cm Radius und 1,6 cm Höhe, der kleinste Abstand zwischen Nadel und Quadrant betrug 0,8 cm. Bei diesem Abstand sprangen nie sichtbare Funken über, doch trat bisweilen Electricisirung der Nadel ein, was sich sogleich durch eine Verlegung des Nullpunktes zu erkennen gab. Die Beobachtung wurde dann verworfen und die Nadel durch Berührung entladen. Zum Aufhängen diente ein 2 cm langer Quarzfaden, die Nadel selbst war aus dünn ausgewalztem Aluminium und hatte einen Spiegel, dessen Ablenkung mit Fernrohr und Scala beobachtet wurde. Vom Platz am Fernrohr aus liess sich mittelst Fäden das Inductorium in Gang setzen. Es wurde immer der erste Ausschlag beobachtet, da sich dieser als ziemlich constant erwies, während bei fortgesetztem Gange des Inductoriums eine dauernde Ruhelage nicht erreicht wurde. Der Ausschlag betrug bei Resonanz meistens 30—40 Scalentheile. Zum Vergleich kann dienen, dass der Ausschlag für 20 Daniell-Elemente 19 Scalentheile war.

Das Electrometer steht, wie man aus Fig. 6 sieht, in der gemeinschaftlichen neutralen Ebene der zwei Stromkreise. Bei dieser Aufstellung konnte ich keine Ablenkung durch electrostatische Influenz beobachten; als Controle wurden die Kugeln so weit auseinander gezogen, dass keine Funken mehr übersprangen, es trat dann keine Ablenkung ein. Nur bei sehr schiefer Aufstellung zeigten sich diese Ausschläge; die Anwendung von Schutznetz war deshalb überflüssig.

6. Zur Veränderung der Schwingungsdauer des secundären Kreises wurden neun verschiedene Drähte *a* hergestellt. Der erste war gerade, die folgenden hatten in der Mitte eine gleichmässig zunehmende Anzahl Spiralwindungen; der mitt-

lere (Nr. 5) 10, der letzte (Nr. 9) 20. Alle waren aus 2 mm starkem Kupferdraht, Radius und Ganghöhe der Spiralen betrug etwa 2 cm. Die Gesamtlängen der secundären Kreise Nr. 1, 5 und 9 waren 240, 320 und 400 cm.

Durch Einschalten von geraden Drähten verschiedener Länge zwischen die Capacitäten und die Kugeln konnte der primäre Leiter in Resonanz mit irgend einem dieser neun secundären Kreise gebracht werden. Mittelst der Ausschläge im Electrometer konnten die entsprechenden Drahtlängen bis auf 1 cm genau bestimmt werden. Abstimmung nach den Kreisen 1, 5 und 9 wurde vorgenommen und die entsprechenden Längen L des primären Leiters, wenn von C bis C' gemessen, gleich 164, 204 und 246 cm gefunden. Auf den mittleren von diesen Werthen, $L = 204$ cm, bezieht sich die Untersuchung.

7. Die einzelne Schwingungsdauer wurde durch Messen von Drahtwellen ermittelt. Da es nur auf die Verhältnisszahlen ankommt, ist die vielleicht noch nicht entschiedene Frage von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs Drähten hier von keinem Einfluss.

Der secundäre Kreis mit dem Electrometer war nicht leicht an einem Draht entlang zu verschieben. Es wurde deshalb ein zweiter beweglicher Kreis verfertigt, hierin die Spirale Nr. 5 eingeschaltet, und die Resonanz mit dem principalen primären Leiter durch Aenderung der Capacitäten an den Drahtenden hergestellt. Die Abstimmung geschah in gewöhnlicher Weise durch Beobachtung der secundären Funken; diese Methode gewährt zwar keine grosse Genauigkeit, doch ist auch hier ein Fehler nur für die absoluten Wellenlängen von merkbarem Einfluss, nicht für die Verhältnisszahlen. In diesem beweglichen Secundärkreise wurden nacheinander die Drähte Nr. 1, 5 und 9 eingeschaltet, und die von dem entsprechenden primären Leiter, $L = 164, 204, 246$ cm erzeugten Wellen gemessen. Die Messung wurde also immer bei Resonanz vorgenommen; hierdurch eliminiren sich die Fehler, die durch die Erscheinung der „multiplen Resonanz“¹⁾ eintreten können, und man findet die gemein-

1) Sarasin u. de la Rive, Arch. des scienc. phys. et nat. 23. p. 113. 1890.

schaftlichen Wellenlängen λ des benutzten primären und secundären Kreises. Die Resultate aus einer grösseren Anzahl Messungen waren:

Secundär Nr.	1	5	9
Primär	$L_1 = 164$	$L_5 = 204$	$L_9 = 246$
Wellenlänge	$\lambda_1 = 385,7$	$\lambda_5 = 443,0$	$\lambda_9 = 499,5$

Die gemeinschaftliche Schwingungsdauer T_5 des mittleren primären Leiters und des entsprechenden secundären wähle ich als Zeiteinheit. Dann wurden für die Kreise 1 und 9:

$$x_1 = \frac{T_1}{T_5} = \frac{\lambda_1}{\lambda_5} = 0,873, \quad x_9 = \frac{T_9}{T_5} = \frac{\lambda_9}{\lambda_5} = 1,128.$$

Hieraus wurde durch Interpolation folgende Tabelle (I) der relativen Schwingungsdauer $x = T_n/T_5$ für sämtliche neun secundäre Kreise berechnet:

(I)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x =$	0,873	0,904	0,936	0,968	1	1,032	1,064	1,096	1,128

II. Versuchsergebnisse.

8. Für die Intensität der secundären Schwingungen hat man ein relatives Maass in den Electrometerausschlägen E_n . Diese können jetzt bei den oben bestimmten neun Werthen der relativen Schwingungsdauer x_n beobachtet werden, indem man den mittleren primären Leiter, $L = 204$ cm, unverändert lässt und die neun verschiedenen Drähte a in den secundären Kreis einschaltet. Als Beispiel kann folgende Beobachtungsreihe angeführt werden:

$x_n =$	0,873	0,904	0,936	0,968	1	1,032	1,064	1,096	1,128
$E_n =$	5	7,3	11,7	22,0	39,9	23,3	8,6	4,8	2,1

Trägt man die Schwingungsdauern als Abscissen, die Electrometerausschläge als Ordinaten auf, so erhält man eine Curve, die für die Abscisse 1, also bei gleicher Schwingungsdauer, ein sehr hervortretendes Maximum hat.

Zwei gleich nacheinander genommene Beobachtungsreihen gaben meistens bis auf ein paar Procent dieselben Zahlen. Aber bei verschiedener Anordnung schwankte die Intensität. Um dann die verschiedenen Curven miteinander vergleichen zu können, habe ich alle Ordinaten so reducirt, dass das Maximum die Höhe 1 erhielt, was einfach durch Division sämtlicher Electrometerausschläge durch den Ausschlag

bei Resonanz geschieht. Diese Zahlen, $y = E_n/E_t$ sind in den folgenden Tabellen aufgeführt.

9. Mit dem kleinen Inductorium und Funken von 1 bis 2 mm Länge zwischen Messingkugeln wurden folgende Zahlen gefunden als Mittel aus acht Beobachtungsreihen:

(II)	$x = 0,873$	0,904	0,936	0,968	1	1,032	1,064	1,096	1,128
	$y = 0,116$	0,186	0,306	0,583	1	0,60	0,224	0,128	0,062

Diese Curve ist in Fig. 8 stark aufgetragen, aber mit sämtlichen Ordinaten auf die Hälfte reducirt, da sonst die Curve zu scharf wird.

Viel grössere Funkenlängen waren bei dieser Anordnung nicht zu erreichen. Dagegen gelang es, als die Kugeln durch kleine Kugelschalen von 1 cm Radius ersetzt wurden. Jede Zeile in der folgenden Tabelle ist Mittel aus vier Beobachtungsreihen. In der ersten Verticalcolumnne stehen die Längen des primären Funkens in Millimetern.

(III).

	0,873	0,904	0,936	0,968	1	1,032	1,064	1,096	1,128
1	0,14	0,20	0,30	0,59	1	0,68	0,27	0,13	0,076
2	0,15	0,21	0,34	0,65	1	0,71	0,33	0,15	0,087
3	0,16	0,23	0,34	0,69	1	0,75	0,35	0,17	0,096
4	0,19	0,25	0,37	0,70	1	0,74	0,37	0,20	0,103
5	0,24	0,31	0,47	0,78	1	0,82	0,43	0,22	0,124

Diese Curven stimmen im allgemeinen Verlauf gut mit der in Fig. 8 aufgetragenen überein, nur werden sie bei wachsender Funkenlänge allmählich stumpfer. Letzteres setzt sich bei weiterem Steigen der Funkenlänge über 5 mm fort, aber die Erscheinungen wurden hier an der Grenze der Leistungsfähigkeit des Inductoriums sehr unregelmässig.

10. Mit dem grossen Inductorium erhielt ich Resultate, die im allgemeinen mit den obigen übereinstimmten, nur waren die Erscheinungen bei weitem unregelmässiger. Die Curven erschienen meistens etwas weniger scharf, aber die Abnahme der Schärfe bei wachsender Funkenlänge war auch langsamer. Noch bei 8 mm habe ich gelegentlich sehr deutlich ausgebildete Resonanzcurven erhalten, ungefähr wie die letzte in der Tabelle III.

III. Zur Theorie des secundären Kreises.

11. Zur Darstellung des Vorgangs im secundären Kreise benutze ich die Gleichung für das gedämpfte Pendel, welches durch eine gedämpfte periodische Kraft in Bewegung gesetzt wird. Es sei φ der Parameter, durch welchen der Abstand vom Gleichgewicht angegeben wird, sagen wir der Potentialunterschied zwischen den zwei Polen. Dann ist:

$$(1) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\varphi}{dt} + (b^2 + \beta^2) \varphi = \mathfrak{A} e^{-\alpha t} \cos at.$$

Die Kraft auf der rechten Seite rührt von dem primären Stromkreise her. Wie gewöhnlich ist:

$$(1') \quad a = \frac{2\pi}{T}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{T},$$

wo T die Schwingungsdauer und γ das logarithmische Decrement der primären Schwingungen bedeutet. Die Wahl des Cosinus ist so begründet: die Schwingungen sollen zur Zeit $t = 0$ anfangen; in diesem Augenblicke besteht im umgebenden Raume eine electrostatische Kraftvertheilung. Die erste Schwankung fängt damit an, dass in der Nähe vom primären Leiter diese Kraft abfällt, was durch den Cosinus ausgedrückt ist. In grossen Entfernungen wird das Verhältniss dagegen ein anderes, indem die electrostatische Kraftvertheilung umgekehrt wie die dritte, die sich fortpflanzende Welle umgekehrt wie die zweite Potenz der Entfernung abnimmt.

Der Form nach ist (1) identisch mit der bekannten von Thomson für electrische Schwingungen aufgestellten Gleichung. Aber wir verzichten hier auf die Darstellung der Coëfficienten durch Capacität, Selbstpotential und Widerstand des Stromkreises. Vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie aus sind Capacität und Selbstpotential nur für statische und stationäre Zustände streng definirte Begriffe. Erfahrungsmässig sind sie auch zur Darstellung hinlänglich langsamer dynamischer Vorgänge brauchbar, aber bis zu welcher Grenze ist bisher weder theoretisch noch experimentell festgestellt worden.

Es sei zuletzt noch bemerkt, dass die Gleichung (1) nicht ein vollständiges Bild der Electricitätsbewegung im secun-

dären Stromkreise geben soll. Dies kann nur eine partielle Differentialgleichung leisten, in welcher zugleich eine oder mehrere Coordinaten als unabhängige Variable vorkommen. Die Gleichung (1) beruht deshalb auf der Hypothese, dass die Bewegung im secundären Kreise hinlänglich einfach ist, um in Bezug auf Schwingungsdauer und Dämpfung durch die Bewegung eines Einzeltheilchens repräsentirt werden zu können.

12. Das allgemeine Integral dieser Gleichung findet man nach allgemein bekannten Methoden:

$$(2) \quad \varphi = Ae^{-\alpha t} \sin (at + a') + Be^{-\beta t} \sin (bt + b'), \quad \text{wo:}$$

$$(2_1) \quad A = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{(b^2 + (\alpha - \beta)^2 - a^2)^2 + 4a^2(\alpha - \beta)^2}}, \quad a' = \arctg \frac{a^2 - (\alpha - \beta)^2 - b^2}{2a(\alpha - \beta)}.$$

Vorzeichen und Quadranten können auf folgende Weise bestimmt werden: A hat dasselbe Vorzeichen wie $\beta - \alpha$; a' liegt zwischen $+\pi/2$ und $-\pi/2$.

Gleichung (2) zeigt, dass die Bewegung im secundären Stromkreise sich darstellen lässt als eine Superposition von zwei Schwingungen.

Die ersteren sind gewissermaassen *gezwungene Schwingungen*; die entsprechende Schwingungsdauer und Dämpfung ist die des primären Leiters; die Amplitude A und die Epoche a' sind direct durch die Constanten der Differentialgleichung gegeben.

Die zweiten sind *freie Eigenschwingungen*, die mit der dem secundären Kreise eigenen Schwingungsdauer und Dämpfung ablaufen. Die Amplitude B und die Epoche b' dieser Schwingungen sind Integrationsconstanten, die erst durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

Im Anfangs Augenblicke befindet sich der secundäre Kreis im Gleichgewicht. Dies gibt:

$$t = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(2_2) \quad \begin{cases} B = \frac{\mathfrak{A} \sqrt{b^2 + (\alpha - \beta)^2}}{b \sqrt{(b^2 + (\alpha - \beta)^2 - a^2)^2 + 4a^2(\alpha - \beta)^2}}, \\ b' = \arctg \frac{b}{\alpha - \beta} \frac{a^2 - (\alpha - \beta)^2 - b^2}{a^2 + (\alpha - \beta)^2 + b^2}, \end{cases}$$

wo B im Vorzeichen A entgegengesetzt ist und b' zwischen $\pi/2$ und $-\pi/2$ liegt.

IV. Berechnung der Resonanzcurve in erster Annäherung.

13. Ich benutze von jetzt an die in der Einleitung erwähnte Voraussetzung, dass die Schwingungen im primären Stromkreise bedeutend stärker gedämpft sind als diejenigen im secundären. Mehrere Gründe machen diese Annahme sehr wahrscheinlich.

Im primären Kreise liegen, soweit wir es übersehen können, die kräftigsten Ursachen der Dämpfung vor. Erstens muss die daselbst vorhandene Funkenstrecke einen bedeutenden Zuschlag zu dem Widerstand geben. Freilich darf diese Ursache nicht überschätzt werden. Gewöhnlichen Strömen gegenüber wäre der Widerstand in den kurzen Kupferdrähten ganz gegen denjenigen in der Funkenstrecke zu vernachlässigen; aber dies ist vielleicht hier nicht mehr der Fall, wo die Ströme nur in dünnen Oberflächenschichten kreisen. Zweitens muss die Energieausstrahlung von einem offenen Leiter wie dem primären grösser ausfallen, als von einem fast geschlossenen wie dem secundären; in welchem Maasse kann allerdings erst eine vollständige Durchführung der Aufgabe nach der Maxwell'schen Theorie entscheiden.

Andererseits erlaubt diese Hypothese, wenn einmal zugelassen, eine Bestimmung der Dämpfung in beiden Stromkreisen, wie ich es in dem Folgenden zeigen werde. Für den secundären Kreis hat die Messung allerdings keinen grossen quantitativen Werth, aber sie bestätigt doch durchaus unsere Annahme.

In mathematischer Form besagt diese Hypothese, dass in unseren Formeln (2) α gross gegen β sei.

14. Mit den Schwingungen im primären Leiter sterben die gezwungenen Schwingungen im secundären hin; die Eigenschwingungen bleiben dagegen, und die Gl. (2) reducirt sich nach kurzer Zeit auf:

$$(3) \quad \varphi = B e^{-\alpha t} \sin (b t + b'),$$

wo B , durch Vernachlässigung von β neben α , sich reducirt auf:

$$(3_1) \quad B = \frac{\Re \sqrt{b^2 + a^2}}{b \sqrt{(b^2 + a^2 - a^2)^2 + 4a^2 a^2}}.$$

Diese Formel erlaubt gleich eine obere Grenze für α zu finden. Die Resonanzerscheinung beruht darauf, dass die Grösse unter der Wurzel im Nenner ein Minimum hat. Dies findet statt, wenn:

$$b = \sqrt{a^2 - \alpha^2} \quad \text{oder} \quad a = \sqrt{b^2 - \alpha^2}.$$

Dieses Minimum, und also jede Spur von Resonanz, verschwindet, wenn $\alpha > a$ oder $\alpha > b$. In den Versuchen haben wir implicite vorausgesetzt, dass die grösste Resonanz bei gleicher Schwingungsdauer, $b = a$, stattfindet. Hiernach darf α^2 neben a^2 oder b^2 vernachlässigt werden. Benutzt man dies in der Gl. (3₁), so erhält man etwas vereinfacht:

$$(3_2) \quad B = \frac{\Re}{\sqrt{(b^2 - a^2)^2 + 2a^2(b^2 + a^2)}}.$$

Eine beliebig grosse Dämpfung kann also nach unserer Methode nicht ohne weiteres gefunden werden. Die Vernachlässigung von α^2 gegen a^2 entspricht nach den Relationen (1') der Vernachlässigung von γ^2 gegen $4\pi^2$. Für $\gamma = 1$ steigert sich der entsprechende Fehler zu etwas mehr als 2 Proc. Dies entspricht Schwingungen, in denen das Verhältniss zweier aufeinander folgenden Elongationen nach derselben Seite $1/e = 0,37$ beträgt.

15. Auf die Electrometernadel wirkt jederzeit eine Kraft proportional φ^2 . Im Zeitelement gibt dies einen Impuls $\varphi^2 dt$. Bei der Berechnung der totalen Impulse J können wir ohne merklichen Fehler die Integration bis $t = \infty$ erstrecken. Denn, wie in der Einleitung bemerkt, können, ehe das Inductorium wieder neue Schwingungen erzeugt, hunderttausende von Schwingungen ablaufen, und dies genügt zu einem vollständigen Absterben der Bewegung. Also:

$$(4) \quad J = \int_0^{\infty} \varphi^2 dt.$$

Nach jedem wirksamen Funken im primären Stromkreise erhält also die Nadel einen solchen Impuls, und die Electrometerausschläge E werden proportional J .

Setzt man hier den Werth (3) von φ ein und integrirt,

so erhält man mit Nichtberücksichtigung eines Correctionsgliedes, das sich nur bei extrem grossen Werthen der Dämpfung β geltend macht:

$$(4_1) \quad J = \frac{B^2}{4\beta}.$$

Diese Formel wird später zur Bestimmung von β benutzt. Um die Resonanzcurve zu berechnen, führen wir den Werth (3_2) von B ein:

$$(4_2) \quad J = \frac{B^2}{4\beta} \cdot \frac{1}{(b^2 - a^2)^2 + 2a^2(b^2 + a^2)}.$$

Für $a = b$ hat J seinen Maximalwerth:

$$(4_3) \quad J_m = \frac{B^2}{4\beta} \cdot \frac{1}{4a^2a^2}.$$

Wegen der Proportionalität zwischen den Impulsen J und den Electrometerausschlägen E ist:

$$y = \frac{E_n}{E_s} = \frac{J}{J_m}, \quad \text{das heisst:} \quad y = \frac{4a^2a^2}{(b^2 - a^2)^2 + 2a^2(b^2 + a^2)}.$$

Als Abscisse für die experimentellen Resonanzcurven haben wir $x = T_n/T_s = a/b$ benutzt. Weiter führen wir ein das logarithmische Decrement γ , $\gamma = \alpha/T = 2\pi \cdot a/a$. Dann kommt als Gleichung für die Resonanzcurve:

$$(5) \quad y = \frac{2\gamma^2 x^4}{2\pi^2(1 - x^2)^2 + \gamma^2(1 + x^2)x^2}.$$

Man sieht gleich, dass diese Curve für $x = 1$ ein Maximum $y = 1$ hat, wie es mit der experimentellen Curve der Fall war. Die Gleichung enthält einen Parameter, das logarithmische Decrement γ ; mit abnehmendem Werthe desselben tritt das Maximum immer schärfer hervor.

Auflösung nach γ^2 ergibt:

$$(5_1) \quad \gamma^2 = \frac{2\pi^2(1 - x^2)^2 y}{2x^4 - (1 + x^2)x^2 y}.$$

V. Die Dämpfung der primären Schwingungen.

16. Aus den Tabellen (II) und (III) kann man x und das entsprechende y in die obige Formel (5_1) einsetzen und den entsprechenden Werth von γ berechnen.

Als Mittelwerth aus der Tabelle (II), die aus den besten Versuchen hervorgegangen ist, ergibt sich:

$$(IV) \quad \gamma = 0,26.$$

Dies ist überhaupt der kleinste gefundene Werth des logarithmischen Decrementes. Folgendes veranschaulicht die entsprechenden Schwingungen: die erste Elongation sei 1; dann ist die zweite Elongation nach derselben Seite 0,77, die zehnte 0,07. Nach 30 Schwingungen, das heisst nach dem Verlaufe von einer Milliontel Secunde, sind die Elongationen auf etwa 0,0₃4 herabgesunken. Graphisch ist diese Schwingung in Fig. (9) für den Zeitraum einer halben Milliontelsecunde dargestellt.

17. Aus der Tabelle (III) ergeben sich bei den entsprechenden Längen l des primären Funkens folgende Mittelwerthe für das logarithmische Decrement:

(V)	$l = 1$	2	3	4	5 mm
	$\gamma = 0,27$	0,30	0,31	0,33	0,39

Diese Zahlen bezeugen eine allmählich steigende Dämpfung, ohne Zweifel eine Folge des grösseren Widerstandes der langen Funken. Schon bei 1 und 2 mm Funkenlänge scheint die Dämpfung etwas grösser als in den obigen Versuchen, vielleicht ein Zeugniss dafür, dass die etwas kräftigeren Funken zwischen den Kugeln bessere Leiter waren, als die etwas schwächeren zwischen den kleinen Kugelschalen. Eine einfache Relation zwischen der Länge des primären Funkens und der Dämpfung scheint nicht zu bestehen. Mit kräftigen, 8 mm langen Funken von dem grossen Ruhmkorff fanden sich noch logarithmische Decremente von etwa 0,4, aber die Erscheinungen waren hier, wie erwähnt, sehr unregelmässig.

Das grösste mit Sicherheit constatirte logarithmische Decrement, $\gamma = 0,39$, entspricht Schwingungen, wo die erste, zweite und zehnte Elongation nach derselben Seite 1, 0,68 und 0,02 betragen.

18. Einer eigenthümlichen Abweichung zwischen den Ergebnissen der Theorie und der Versuche ist noch zu erwähnen. Die einzelnen Zahlen, aus denen die obigen Mittelwerthe des logarithmischen Decrementes berechnet sind, weichen in systematischer Weise voneinander ab. Aus der Tabelle II findet man zum Beispiel folgende acht einzelne Werthe:

$x = 0,873$	0,904	0,936	0,968	1,032	1,064	1,096	1,128
$\gamma = 0,36$	0,34	0,30	0,26	0,23	0,20	0,20	0,18

Mit wachsendem x erhält man also ziemlich gleichmässig abnehmende Werthe des logarithmischen Decrementes. Von dem Mittelwerthe weichen die äussersten um fast 40 Proc. ab. Die dem Mittel 0,26 entsprechende theoretische Curve ist in Fig. 8 punktirt. Wie man sieht, folgen sich die Curven in der Nähe vom Resonanzpunkte ziemlich genau. Aber links steigen in allmählichem Fortschreiten die Ordinaten der experimentellen Curve über diejenigen der theoretischen Curve hinaus, rechts dagegen sinken sie in demselben Verhältniss. Diese Erscheinung hat sich mit grosser Regelmässigkeit bei sämmtlichen Beobachtungsreihen wiederholt.

Qualitativ lässt sich die Erscheinung erklären durch den zunehmenden Widerstand und die entsprechend zunehmende Dämpfung im secundären Kreise, wenn man die Spirale einschaltet. In der Rechnung haben wir implicite $\beta = \text{const.}$ vorausgesetzt, und deshalb ist $+\beta$ bei Division der Gleichungen (4₂) und (4₃) ausgefallen. Man überzeugt sich in der That leicht davon, dass die Electrometerausschläge empfindlich sind gegen das Einschalten von Widerständen, die nicht gleichzeitig die Schwingungsdauer beeinflussen. Aber erst eine quantitative Untersuchung kann die Frage vollständig erledigen.

Ist jedoch diese Erklärung richtig, so muss wegen der Symmetrie sich der Fehler eliminiren, wenn man das Mittel nimmt, und die oben angegebenen Mittelwerthe bleiben richtig.

VI. Ueber die Schwingungen im secundären Stromkreise.

19. Sofern man aus der Länge des secundären Funkens auf den zwischen den Polen des secundären Kreises vorhandenen absoluten Potentialunterschied schliessen darf, so gestattet die Formel (4₁) eine einfache Schätzung der Dämpfung der secundären Schwingungen.

In der Secunde kommen p Impulse J , je einer für jeden Contact des Unterbrechers; der entsprechende Electrometerausschlag sei E . Andererseits gibt ein constanter Potentialunterschied V einen Ausschlag E' . Für die Ablenkung der Nadel ist also ein Impuls J gleichwerthig mit $EV^2/E'p$. Führt man dies in die Formel (4₁) ein und löst man nach β auf, so erhält man:

$$(6) \quad \beta = \frac{p E' B^2}{4 E V^2}.$$

Wie früher schon erwähnt, entspricht $V=20$ Volt dem Electrometerausschlag $E'=19$; weiterhin war $p=42$. Also:

$$\beta = 0,5 \frac{B^2}{E}.$$

Die Electrometerausschläge E wurden in der üblichen Weise genommen, nur wurde immer bei Resonanz, also mit dem secundären Kreis Nr. 5 gearbeitet. Sonst entsprach die Anordnung vollständig derjenigen bei den Versuchen zur Tabelle (II). E wurde im Mittel gleich 30 gefunden. Die entsprechenden Funkenlängen wurden mittelst eines kleinen, zwischen die Quadranten eingeschalteten Funkenmikrometers, mit Kugeln von 0,25 cm Radius, gemessen.

Diese Messung wurde immer bei möglichst kurzer Beobachtungszeit vorgenommen. Wartet man länger, so erscheinen dann und wann lange Funken, die besonders wirksamen primären Funken entsprechen. Sehr gross wird diese Ungleichmässigkeit, wenn man eine grosse primäre Funkenstrecke benutzt. Diese einzelnen langen Funken übersteigen sehr den Mittelwerth und würden deshalb den vom Mittelwerthe abhängigen Electrometerausschlägen schlecht entsprechen. Im Mittel wurde eine Funkenlänge von 0,3 mm gefunden, und der entsprechende Potentialunterschied ist nach den Beobachtungen von Paschen¹⁾ $B=2080$ Volt. Hieraus ergibt sich:

$$\beta = 70000.$$

Das logarithmische Decrement ist $\delta = \beta T$. Aus der halben Wellenlänge, $\lambda_5 = 443$ cm, findet man, unter Voraussetzung von Lichtgeschwindigkeit, $T = 3 \cdot 10^{-8}$, woraus:

$$\delta = 0,002.$$

Die Dämpfung wäre hiernach mehr als hundertmal kleiner als im primären Stromkreise, und die Vernachlässigung der gezwungenen Schwingungen in Gleichung (2) wäre durchaus zulässig. Die entsprechende Verhältnisszahl zweier Elongationen nach derselben Seite ist 0,998. Erst nach mehr als 1000 Schwingungen sind die Ausschläge auf ein Zehntel herabgesunken. Zum Vergleich diene, dass man bei guten

1) F. Paschen, Wied. Ann. 37. p. 79. 1889.

Secundenpendeln noch ein zehn oder zwanzig Mal kleineres Decrement findet.

Aber, selbst abgesehen von der Unvollkommenheit der Methode in quantitativer Hinsicht, ist es sehr zweifelhaft, welchen Werth man diesem Resultate beilegen darf. Die unter gewöhnlichen Verhältnissen gemessenen Funkenpotentiale sind in einem Fall benutzt worden, wo der zur Funkenbildung nöthige Potentialunterschied nur während eines Bruchtheils einer Schwingung, also jedesmal nur während einiger Tausendmilliontel Secunden besteht. Es fragt sich, ob die Funkenbildung unter so verschiedenen Verhältnissen bei demselben Potentialunterschied vor sich geht. Hierauf wäre ein Rückschluss möglich, wenn man nach einer anderen Methode die Dämpfung der secundären Schwingungen gemessen hat.

20. Wie unvollkommen auch hiernach unsere Kenntniss dieser Dämpfung ist, so können wir uns doch ein ganz anschauliches Bild von den Schwingungen im secundären Kreise machen; denn von der grössten Dämpfung, derjenigen im primären Leiter, hängen die Eigenthümlichkeiten hauptsächlich ab.

Die Figuren 10_a und 10_b stellen diese Schwingungen graphisch dar, so wie man sie nach den allgemeinen Formeln (2) erhält als Superposition der gezwungenen und der freien Schwingungen, wenn man die logarithmischen Decremente $\gamma = 0,26$ und $\delta = 0,002$ einführt. Die erste Curve (a) entspricht der Resonanz. Die Ausschläge steigen so lange, als die primären Schwingungen noch merkbar sind. Nach neunzehn derselben wird das Maximum erreicht, und die Abnahme fängt an, indem die Dämpfung der secundären die Wirkung der noch vorhandenen primären Schwingungen überwiegt.

Die zweite Curve entspricht dem Fall, dass der secundäre Kreis zehn Schwingungen macht, während der andere nur neun. Die Ausschläge betragen im Mittel ungefähr blos ein Drittel desjenigen bei Resonanz. Die primären Schwingungen wirken jetzt abwechselnd additiv und subtractiv; es treten deshalb Schwebungen ein, die indessen mit den primären Schwingungen absterben. Eine eigenthümliche Wir-

kung dieser Schwebungen ist, dass der grösste Ausschlag um so früher eintritt, je mehr man sich von der Resonanz entfernt, in dem vorliegenden Fall z. B. schon bei der fünften Schwingung.

Entfernt man sich noch mehr vom Resonanzpunkte, so hören auch die regelmässigen Schwebungen auf; die Curven erhalten mehr zackige und unregelmässige Wellen von verschiedenen Höhen, aber hier bleiben, wie immer, nach etwa zwanzig Schwingungen nur die regelmässigen und langsam abnehmenden Eigenschwingungen des secundären Kreises zurück.

Zusatz.

21. Bei den Untersuchungen über die Abhängigkeit der Dämpfung von der Länge l des primären Funkens hat sich gezeigt, dass die Electrometerausschläge bei wachsender Funkenstrecke abnehmen. Dies geht aus der Tabelle III nicht hervor, weil dort alle Zahlen so reducirt sind, dass das Maximum die Höhe 1 erhält. Die Mittelwerthe der direct beobachteten maximalen Ausschläge E_g waren:

$l =$	1	2	3	4	5 mm
$E_g =$	35	32,2	25,0	18,3	10,8

Die Erscheinung hat sich in einer grossen Anzahl Controlbeobachtungen wiederholt. Für E_g zeigte sich im allgemeinen ein Maximum zwischen 1 und 2 mm Funkenstrecke. Bei dem grossen Inductorium zeigte sich dies Maximum etwas mehr nach aussen verschoben, etwa bei 3 mm Funkenstrecke. Bei einer wie oben stets bei kurzer Beobachtungszeit vorgenommenen Messung der secundären Funken zeigten sich ungefähr dieselben Maxima.

Es liegt nahe, die Ursache davon in der oben erwiesenen steigenden Dämpfung zu suchen. Dies ergibt indessen keine Uebereinstimmung, wenn man anders aus der Funkenlänge auf den Potentialunterschied nach dem gewöhnlichen angenäherten Proportionalgesetz schliessen darf. Nach der Formel (4₃) ist der maximale Electrometerausschlag E_g proportional $\mathfrak{A}^2/\alpha^2$. Hier kann dann $\mathfrak{A}$ durch l , und, da die Schwingungsdauer constant ist, α durch γ ersetzt werden. Es soll also E_g proportional l^2/γ^2 sein. Setzt man indessen nach (V) die Werthe von l und γ ein, so findet man stark

anwachsende Zahlen statt der abnehmenden E_s . Zu bemerken ist aber, dass das erwähnte Proportionalitätsgesetz in diesem Falle noch nicht durch directe Versuche geprüft ist. Vielleicht steigt wegen der Schnelligkeit der Ladung vermittelt des Inductionsstromes der Potentialunterschied bei allen Funkenstrecken um einen gewissen Betrag über den erwarteten Werth hinaus. Ein solches Verhältniss dürfte wieder Uebereinstimmung herstellen.

Es sind jedoch auch andere Erklärungen möglich. Damit Schwingungen zu Stande kommen, ist nicht nur nothwendig, dass der Funke eine genügende Leitungsfähigkeit habe; es ist auch unerlässlich, dass der Zeitverlauf von dem Augenblicke an, wo die erste Spur von Leitungsfähigkeit anfängt, bis zu demjenigen, wo der für Schwingungen nöthige Werth vorliegt, kurz ist in Vergleich mit der Dauer einer Schwingung. In dieser Frist findet ein Abströmen der Electricität ohne Schwingungen statt, und die Annahme, dass diese Zeit mit der Länge des Funkens, wenn auch nur um wenige Tausendmilliontel Secunden wächst, möchte die Erscheinung erklären.

Ist es hiernach im allgemeinen nothwendig, die wechselnde Leitungsfähigkeit des Funkens mit in Betracht zu ziehen, so ist man auch berechtigt daran zu zweifeln, ob die Annahme erlaubt sei, dass die primären Schwingungen nach einem einfachen Exponentialgesetz abnehmen, so wie wir es vom Anfang an vorausgesetzt haben. Indessen verliert das gewonnene Resultat deshalb nicht seine Bedeutung. Fig. 9 stellt unter allen Umständen eine regelmässig gedämpfte Schwingung dar, die in Bezug auf die Resonanzerscheinung mit den wirklichen Schwingungen gleichwerthig ist.

Bonn, 4. Juni 1891.