unter theilweiser Ausscheidung des Jods und Entwicklung von Jodwasserstoffgas. In einem Proberöhrchen erhitzt, zersetzen sich die Verbindungen mit fixer alkalischer Basis vollständig, indem Jodantimon sublimirt und das betreffende positive Jodmetall zurückbleibt. Die ammoniumhaltigen Salze sublimiren vollständig unter partieller Zersetzung und Auftreten von Joddämpfen.

VI. Eine einfache Bestimmung der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen; von A. Wüllner.

1.

Bekanntlich gelangt man bei Bestimmung der Beugungserscheinungen nach dem Vorgange Fresnel's durch Anwendung der Interferenzgesetze auf das Huyghens'sche Princip der Fortpflanzung des Lichtes auf zwei bestimmte Integrale, so daß die Summe ihrer Quadrate die Intensität des Lichtes in irgend einem Punkte des Schirmes giebt, auf welchem die Beugungsbilder betrachtet werden. Die gesuchte Lichtintensität ist darnach

$$J = K^2 \left\{ \left(\int dr \cos q r^2 \right)^2 + \left(\int dr \sin q r^2 \right)^2 \right\}$$

Die Grenzen, zwischen denen integrirt wird, richten sich nach der Gestalt der Oeffnung, durch welche das Licht an dem beugenden Schirm vorübergeht. Ist es ein breiter Schirm an dessen einer Seite das Licht vorbei streift, so ist die eine Gränze endlich, die andere unendlich; ist es ein schmaler Körper an dessen beiden Seiten Licht vorübergeht, so zerfällt jedes der beiden Integrale in zwei, dessen Grenzen den vorigen analog sind; und strahlt endlich das Licht durch eine rings begränzte Oeffnung, so sind beide Gränzen endlich.

Die Fresnel'schen Rechnungen sind jedoch nicht anwendbar zur Bestimmung der Intensität der gebeugten Strahlen, wenn die Erscheinungen nach der Fraunhofer'schen Methode beobachtet werden. Denn da bei der Fresnel'schen Beobachtungsweise die Lichterscheinung in einer endlichen Entfernung von der beugenden Oeffnung aufgefangen wird, so ist die in einem Punkte beobachtete Lichtintensität die resultirende oder von allen Punkten der Oeffnung nach diesem Punkte convergirenden Strahlen; bei der Fraunhofer'schen Methode, bei der die gebeugten Strahlen von dem Objectiv eines Fernrohrs aufgenommen und dann im Focus vereinigt werden, interferiren die von allen Punkten nach ein und derselben Richtung ausgehenden Strahlen, da nur die unter sich parallelen Strahlen in einem und demselben Punkte des Focus vereinigt werden. Deshalb ändern sich die Fresnel'schen Beugungserscheinungen mit dem Abstände des auffangenden Schirmes von der beugenden Oeffnung, die Fraunhofer'schen sind davon unabhängig, sie zeigen die Erscheinungen wie Hr. Schwerd in der Vorrede seines klassischen Werkes über die Beugungserscheinungen sagt, als wenn die Lichterscheinungen nach Fresnel's Methode in unendlicher Entfernung von dem beugenden Schirme aufgefangen werden.

Die Fraunhofer'schen Diffractionerscheinungen wurden zuerst analytisch behandelt und vollständig aus den Principien der Undulationstheorie entwickelt von Schwerd. Derselbe schlug aber einen anderen Weg ein als Fresnel und suchte nicht das Problem allgemein zu lösen, einen allgemeinen Ausdruck für die Lichtintensität der gebeugten Strahlen für eine irgendwie gestaltete Oeffnung zu finden, und aus diesem dann durch Specialisiren die Erscheinung für bestimmte Oeffnungen zu erhalten, sondern er behandelte jede Oeffnung gesondert. Der Grund war wohl der, daß er um die resultirende Intensität der gebeugten Strahlen zu erhalten, anstatt wie Fresnel Integrationen zu benutzen, Summationen anwandte, und um diese ausführen zu können, durch für jede Oeffnung besondere Construc-

tionen die Phasen der gebeugten Strahlen in Form von Reihen darstellen mußte.

Einige Jahre später behandelte Hr. Knochenhauer in seiner »Undulationstheorie des Lichtes« (Berlin 1839) die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen. Er umging den Summationscalcul und wandte anstatt Summationen Integrationen an. Dazu bestimmte er die Phase eines beliebigen durch die Oeffnung tretenden Strahls als Function der Stelle, an welcher er durch die Oeffnung getreten ist, und war dadurch in den Stand gesetzt anstatt wie Schwerd die einzelnen Strahlen summiren zu müssen durch zwei über die Oeffnung ausgedehnte Integrale die resultirende Intensität zu erhalten. Im Uebrigen schloß er sich genau an Schwerd an und wandte, um zu den Elementarfactoren seiner Integrale zu gelangen, genau dieselben Constructionen an wie jener. Deshalb erhielt er auch keinen für alle Oeffnungen gemeinsamen Ausdruck.

Zugleich mit Hrn. Knochenhauer gab Littrow in dem Artikel Undulation von Gehler's physikalischem Wörterbuch (2. Aufl. Bd. IX, 2. Abth., S. 1422) eine Ableitung der Beugungserscheinungen, und es gelang ihm allgemein das Problem zu lösen, die Intensität des durch eine Sammelinse und durch eine kleine Oeffnung gehenden Lichtes zu bestimmen. Er dachte sich den die Erscheinung auffangenden Schirm im Brennpunkt der Linse, in welchem er auch den Anfangspunkt der Coordinaten annimmt, senkrecht gegen die ungebeugten Strahlen aufgestellt und erhielt dann als Ausdruck für die Intensität irgend eines Punktes des Schirmes

$$J = R^2 (P^2 + Q^2)$$

worin

$$P = \iint dx dy \sin \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y)$$

$$Q = \iint dx dy \cos \frac{2\pi}{b\lambda} (\xi x + v y)$$

worin x, y die Coordinaten eines Punktes der Oeffnung, ξ, v die Coordinaten eines Punktes M des Schirmes und b die Brennweite der Linse, also auch, da die Linse unmit-

telbar vor der beugenden Oeffnung angebracht ist, der Abstand des Schirmes von der beugenden Oeffnung bedeutet.

Die angedeuteten Integrationen sind auszudehnen über die ganze Oeffnung, deren Gestalt also die Gränzen der Integrale bestimmt.

Anwendungen giebt Littrow für das Rechteck und das gleichzeitige Dreieck.

Die Littrow'sche Ableitung dieser Beugungserscheinungen scheint jedoch nicht viel Anklang gefunden zu haben, denn trotz der großen Vorzüge, welche die Differential- und Integralrechnung wegen ihrer größeren Einfachheit vor dem Summationscalcül voraus hat, sind stets zur Bestimmung der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen die Schwerd'schen Rechnungen angewandt. Ja noch vor 10 Jahren hat Wilde ¹⁾ dieselben in abgekürzter Form reproducirt.

Der Grund davon kann wohl nur darin liegen, daß die Littrow'sche Ableitung jener allgemeinen Gleichung und ihr Gebrauch in der dort angegebenen Form noch ziemlich unbequem ist, sowie darin, daß das Bedingende der ganzen Erscheinung nicht so klar hervortritt, wie bei der Schwerd'schen Behandlung.

Ich wurde nun kürzlich auf eine andere äußerst einfache Methode geführt, um die Beugungserscheinungen nach Fraunhofer's Methode durch dieselben zwei bestimmten Doppelintegrale allgemein für alle Oeffnungen zu bestimmen, bei der die physikalische Bedeutung dieser Ausdrücke zugleich unmittelbar vorliegt. Es sey mir gestattet eben ihrer großen Einfachheit wegen dieselbe mitzutheilen.

2.

Wir nehmen an, es falle ein Bündel paralleler Lichtstrahlen auf einen Schirm, in welchem sich eine irgendwie gestaltete Oeffnung befinde. Die Wellenebene der einfallenden Strahlen bilde mit der Ebene des Schirmes den Winkel φ . Es wird gesucht die Intensität des Lichtes der ge-

1) Diese Ann. Bd. 79, S. 75 ff.

beugten Strahlen, deren Wellenebene mit der des Schirmes den Winkel w bildet. Sey nun BB' ein Durchschnitt der Oeffnung, M ein Punkt derselben, in welchem sich das

Element dm der Oeffnung befinde. AB, AB' sey das einfallende Bündel paralleler Lichtstrahlen, BD, BD' die Richtung der gebeugten Lichtstrahlen. Um nun die Lichtintensität der nach BD gebeugten Strahlen zu erhalten, haben wir nur die resultierende Aetherbewegung nach dem Interferenzgesetz in einer zu den gebeugten Strahlen normalen Ebene DD' zu bestimmen, da die Lichtstrahlen von da an sich mit constanter Phasendifferenz weiter bewegen.

Nach dem Huyghen'schen Principe betrachtet man nun jedes Element der Oeffnung als einen neuen Vibrationsmittelpunkt, welcher die erhaltenen Oscillationen nach allen Richtungen hin weiter verbreitet. Das in M befindliche Element des die Oeffnung erfüllenden Aethers dm wird nun in der Ebene DD' eine Lichtbewegung veranlassen, welche sich ausdrücken läßt durch

$$\eta = k dm \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AM + MN}{\lambda} \right) \quad (1)$$

wenn η den Abstand des in N befindlichen Aethertheilchens von der Gleichgewichtslage zur Zeit t , k die Amplitude der Schwingung, welche die von der Flächeneinheit ausgehende Wirkung in N erzeugen würde, T die Oscilla-

tionsdauer und λ die Wellenlänge des angewendeten Lichtes bedeutet.

Legen wir nun durch B' die Wellenebene der einfallenden Strahlen $B'C$ durch B die der gebeugten Strahlen BC' , so haben wir

$$AM = AP - MP = AB' - MP$$

$$MN = NQ + QM = DB + QM$$

und setzen wir das in (1) ein, so wird:

$$\eta = k dm \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB' + DB}{\lambda} - \frac{QM - MP}{\lambda} \right) \quad (2)$$

Um nun die Gesamtintensität der nach der Richtung BD gebeugten Strahlen zu erhalten, haben wir die Summe der von allen Elementen der Oeffnung nach der gleichen Richtung ausgehenden Strahlen zu bilden, jeden mit seiner Phase genommen, mit welcher derselbe in die Ebene $D'D$ eintritt. Oder mit anderen Worten, wir haben die rechte Seite des Ausdrucks (2) nach m zu integrieren über die ganze Oeffnung hin, wobei dann QM und MP mit der Lage des Punktes M in der Oeffnung immer andere werden.

Bedenken wir nun, daß MP die senkrechten Abstände der Punkte der Oeffnung von der einfallenden Wellenebene, MQ dieselben von der gebeugten Wellenebene bedeuten, so ist es leicht dm , QM , MP als Functionen derselben Veränderlichen darzustellen.

Zu dem Ende legen wir irgendwo in der Ebene des Schirmes den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen xy Ebene mit der Ebene des Schirmes zusammenfällt. Die Winkel, welche die einfallenden Strahlen mit den Axen bilden, seyen α, β, γ , diejenigen, welchen die gebeugten Strahlen bilden, seyen α', β', γ' .

Wir haben dann als Gleichung der einfallenden Wellenebene, wenn wir die Coordinaten eines Punktes derselben mit x, y, z bezeichnen

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p,$$

worin p den senkrechten Abstand der in Rede stehenden Ebene vom Coordinaten-Anfangspunkt bezeichnet. Nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie im Raume,

hat man nun für den senkrechten Abstand D eines Punktes mit Coordinaten x', y', z' von jener Ebene

$$D = x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma - p.$$

Für den Punkt M der Oeffnung seyen nun die Coordinaten x', y' , die z Coordinate ist $= 0$, da der Punkt in der xy Ebene liegt. Wir haben daher

$$MP = x' \cos \alpha + y' \cos \beta - p.$$

Ist nun die Gleichung der gebeugten Wellenebene

$$x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma' = p',$$

so haben wir analog

$$MQ = x' \cos \alpha' + y' \cos \beta' - p'.$$

Setzen wir das in (2) ein, und zugleich

$$dm = dx dy,$$

so wird

$$\eta = k dx dy \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB + DB}{\lambda} - \frac{x'(\cos \alpha' - \cos \alpha) + y'(\cos \beta' - \cos \beta) + p - p'}{\lambda} \right) \quad (3)$$

oder

$$\begin{aligned} \eta = & k dx dy \cos \frac{2\pi}{\lambda} [x'(\cos \alpha' - \cos \alpha) + y'(\cos \beta' - \cos \beta)] \\ & \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB' + DB + p - p'}{\lambda} \right) \\ & - k dx dy \sin \frac{2\pi}{\lambda} [x'(\cos \alpha' - \cos \alpha) + y'(\cos \beta' - \cos \beta)] \\ & \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB' + DB + p - p'}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Und nehmen wir nun die Summe aller Strahlen, wobei wir um durch x und y alle Punkte der Oeffnung nach und nach zu erhalten, für x' wieder x , für y' wieder y einsetzen, so wird

$$\begin{aligned} H = & k \iint dx dy \cos \frac{2\pi}{\lambda} [x(\cos \alpha' - \cos \alpha) \\ & + y(\cos \beta' - \cos \beta)] \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB' + DB + p - p'}{\lambda} \right) \\ & - k \iint dx dy \sin \frac{2\pi}{\lambda} [y(\cos \alpha' - \cos \alpha) \\ & + y(\cos \beta' - \cos \beta)] \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{AB' + DB + p - p'}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

woraus nach bekannten Interferenzgesetzen für die resultierende Intensität der nach der gleichen Richtung gebeugten Strahlen folgt:

$$J = k^2 \left[\left(\iint dx dy \cos \frac{2\pi}{\lambda} [x(\cos \alpha' - \cos \alpha) + y \cos \beta' - \cos \beta] \right)^2 + \left(\iint dx dy \sin \frac{2\pi}{\lambda} x(\cos \alpha' - \cos \alpha) + y(\cos \beta' - \cos \beta) \right)^2 \right] \quad (4)$$

wo die Integrationen über alle x und y , welche der Oeffnung angehören, auszuführen sind ¹⁾.

Dieser Ausdruck für J ist bis jetzt nur auf rechtwinklige Coordinaten bezogen. Um ihn zu verallgemeinern und für die Anwendung bequemer zu machen, wollen wir nun annehmen, daß die y Axe nicht senkrecht auf der x Axe stehe, sondern mit ihr den Winkel ϑ einschliesse. Die Axe der z bleibe senkrecht auf der xy Ebene. Bezeichnen wir die neuen Coordinaten zunächst mit x' und y' , so werden die alten Coordinaten in diesen neuen ausgedrückt

$$x = x' \quad y = y' \sin \vartheta.$$

Dadurch tritt dann auch an die Stelle des rechtwinkligen Flächenelements $dx dy$ das unendlich kleine Parallelogramm

1) Ich muß hier bemerken, daß ich vor einigen Jahren in Berlin aus einem nach Vorträgen des Hrn. Neumann über theoretische Optik bearbeiteten Hefte erschen habe, daß Hr. Neumann sich des gleichen allgemeinen Ausdrucks bedient, um die Fraunhofer'schen Diffractionserscheinungen zu erhalten. Der Weg, auf welchem derselbe dazu gelangt, ist aber ein ganz anderer. Hr. Neumann zieht den angesehenen Punkt, auf den das Fernrohr eingestellt ist, in die Behandlung des Problems hinein und gelangt dadurch zu einem Ausdruck für die Phasen der gebeugten Strahlen, welchen er dann nach Einführung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systemes durch Umformungen, auf obige Form bringt. Die große Einfachheit, mit der sich, wenn einmal jener allgemeine Ausdruck festgestellt ist, die Beugungserscheinungen ergeben, liefs es mir wünschenswerth erscheinen, denselben auf möglichst einfache Weise zu erhalten. Das war die Veranlassung dieser Arbeit, und da ich glaubte wirklich den einfachsten Weg gefunden zu haben, wollte ich es mir nicht versagen, ihn den Physikern vorzulegen, in der Hoffnung, daß er einem oder dem andern vielleicht zum Zwecke der Vorlesungen willkommen sey.

$$dx' dy' \sin \vartheta.$$

Führen wir dies in unsern Ausdruck für

$$J = k^2 (P^2 + Q^2)$$

ein, so wird

$$P = \sin \vartheta \iint dx' dy' \cos \frac{2\pi}{\lambda} [x' (\cos \alpha' - \cos \alpha) + y' \sin \vartheta (\cos \beta' - \cos \beta)].$$

$$Q = \sin \vartheta \iint dx' dy' \sin \frac{2\pi}{\lambda} [x' (\cos \alpha' - \cos \alpha) + y' \sin \vartheta (\cos \beta' - \cos \beta)]$$

β und β' waren die Winkel, welche die einfallenden und gebeugten Strahlen mit der früheren y Axe bildeten, und da ϑ der Winkel ist, welcher die neue Axe der y mit der Axe der x bildet, so ist ϑ das Complement des Winkels η , welchen die neue Axe der y mit der frühern Axe der y bildet. Deshalb sind die Producte

$$\sin \vartheta \cos \beta' = \cos \eta \cdot \cos \beta'$$

$$\sin \vartheta \cos \beta = \cos \eta \cdot \cos \beta$$

gleich den Cosinus des Winkels, welchen die gebeugten respective die einfallenden Strahlen mit der neuen Axe der y bilden. Bezeichnen wir diese Winkel wieder mit β' und β , und lassen wir bei x' und y' die Accente weg, so wird

$$\left. \begin{aligned} P &= \sin \vartheta \iint dx dy \cos \frac{2\pi}{\lambda} [x (\cos \alpha' - \cos \alpha) + y (\cos \beta' - \cos \beta)] \\ Q &= \sin \vartheta \iint dx dy \sin \frac{2\pi}{\lambda} [x (\cos \alpha' - \cos \alpha) + y (\cos \beta' - \cos \beta)] \end{aligned} \right\} (4a)$$

Unsere früheren Ausdrücke gelten also auch, wenn die Axe der y nicht senkrecht auf der Axe der x steht, wenn wir sie mit dem Sinus des Winkels, welchen die beiden Axen einschließen, multipliciren. Letztere Ausdrücke als die allgemeineren, aus denen durch $\vartheta = 90^\circ$ die ersteren hervorgehen, sind in der Anwendung die bequemsten.

3.

Es sey gestattet an einem speciellen Falle zu zeigen, mit wie geringer Mühe man mit Zugrundelegung dieser Ausdrücke zu den Resultaten gelangt, welche nach der Schwerd'schen Methode sehr weitläufige Rechnungen erfordern. Es werde die Intensität der durch eine trapezförmige Oeffnung gebeugter Strahlen bestimmt.

Seyen die vier Seiten des Trapezes $ABDC$

$$AC = b$$

$$AB = a$$

$$BD = c$$

$$CD = d$$

Die Seiten a und b bilden mit einander den Winkel ϑ . Da wir den Anfangspunkt der Coordinaten und die Richtung der x und y beliebig wählen können, so sey A der Anfangspunkt der Coordinaten, die Axe der x falle mit a , die der y mit b zusammen.

Wir haben dann die beiden Integrale zu nehmen

nach y von $y = 0$ bis $y = y$,

wo y eine Function von x die Ordinaten von CD darstellt,

nach x von $x = 0$ bis $x = a$.

Würde die Linie CD die Axe der x in einem Abstände $= \alpha$ schneiden, so ist

$$y = b \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)$$

Nun ist aber

$$\alpha : a = b : b - c$$

$$\alpha = \frac{ab}{b - c}$$

also

$$y = b \left(1 - \frac{(b - c)x}{ab} \right).$$

Bezeichnen wir nun in unsern beiden Integralen (4a)

$$\frac{2\pi}{\lambda} (\cos \alpha' - \cos \alpha) = m$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} (\cos \beta' - \cos \beta) = n$$

so haben wir für das Trapez

$$P = \sin \vartheta \int_0^a \int_0^b \cos(mx + ny) dy dx,$$

$$Q = \sin \vartheta \int_0^a \int_0^b \sin(mx + ny) dy dx$$

Daraus

$$\begin{aligned} P + Qi &= \sin \vartheta \int_0^a \int_0^b [\cos(mx + ny) + i \sin(mx + ny)] dy dx \\ &= \sin \vartheta \int_0^a \int_0^b e^{(mx + ny)i} dy dx \end{aligned}$$

worin $i = \sqrt{-1}$.

Führen wir die beiden angedeuteten Integrationen aus, so wird

$$P + Qi = -\frac{a \sin \vartheta}{n(ma - nb + nc)} \left\{ e^{(ma + nc)i} - e^{nb i} \right\} + \frac{1}{mn} \left\{ e^{mai} - 1 \right\}$$

oder

$$\begin{aligned} P + Qi &= -\frac{\sin \vartheta}{mn(ma - nb + nc)} \left\{ ma (e^{(ma + nc)i} - e^{nb i}) \right. \\ &\quad \left. - (ma - nb + nc) (e^{mai} - 1) \right\} \end{aligned}$$

oder wenn wir wieder trigonometrische Functionen einführen und reelles und imaginäres trennen.

$$\begin{aligned} P + Qi &= -\frac{\sin \vartheta}{mn(ma - nb + nc)} \left\{ ma (\cos(ma + nc) - \cos nb) \right. \\ &\quad \left. - (ma - nb + nc) (\cos ma - 1) + i [ma (\sin(ma + nc) - \sin nb) \right. \\ &\quad \left. - (ma - nb + nc) \sin ma] \right\} \end{aligned}$$

Woraus man unmittelbar erhält

$$P = - \frac{\sin \vartheta}{mn(ma - nb + nc)} \left\{ nb(\cos ma - 1) - nc(\cos ma - 1) \right. \\ \left. - ma(\cos nb - 1) + ma(\cos[ma + nc] - \cos ma) \right\} \\ Q = - \frac{\sin \vartheta}{mn(ma - nb + nc)} \left\{ nb \sin ma - nc \sin ma - ma \sin nb \right. \\ \left. - ma[\sin ma - \sin(ma + nc)] \right\}$$

oder

$$P = \frac{ab \sin \vartheta}{(ma - nb + nc)} \left\{ \left(1 - \frac{c}{b}\right) \frac{\sin^2 \frac{ma}{2}}{\frac{ma}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{nb}{2}}{\frac{nb}{2}} \right. \\ \left. + \frac{2}{nb} \sin\left(ma + \frac{nc}{2}\right) \sin \frac{nc}{2} \right\} \\ Q = - \frac{ab \sin \vartheta}{(ma - nb + nc)} \left\{ \left(1 - \frac{c}{b}\right) \frac{\sin ma}{ma} - \frac{\sin nb}{nb} \right. \\ \left. + \frac{2}{nb} \cos\left(ma + \frac{nc}{2}\right) \sin \frac{nc}{2} \right\}$$

Quadriren wir beide Ausdrücke, addiren wir sie und multipliciren wir sie mit k^2 , so wird nach einigen leicht zu übersehenden Reductionen

$$J = k^2 (P^2 + Q^2) \\ = k^2 \frac{a^2 b^2 \sin^2 \vartheta}{(ma - nb + nc)^2} \left\{ \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{ma}{2}}{\frac{ma}{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{nb}{2}}{\frac{nb}{2}}\right)^2 \right. \\ - 2 \left(1 - \frac{c}{b}\right) \frac{\sin \frac{ma}{2}}{\frac{ma}{2}} \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\frac{nb}{2}} \cos\left(\frac{ma}{2} - \frac{nb}{2}\right) + \frac{c}{b} \left[\frac{c}{b} \left(\frac{\sin \frac{nc}{2}}{\frac{nc}{2}}\right)^2 \right. \\ \left. + 2 \frac{\sin \frac{nc}{2}}{\frac{nc}{2}} \left(\left(1 - \frac{c}{b}\right) \frac{\sin \frac{ma}{2}}{\frac{ma}{2}} \cos\left(\frac{ma}{2} - \frac{nc}{2}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\frac{nb}{2}} \cos\left(ma - \frac{nb}{2} + \frac{nc}{2}\right) \right) \right] \right\}$$

Dieser durch seine Symmetrie ziemlich übersichtliche Ausdruck zeichnet sich dadurch aus, daß aus ihm sich unmittelbar und auf die einfachste Weise die Intensität der durch ein Dreieck oder ein Parallelogramm gebeugten Strahlen ergibt. Dadurch wird auch seine Richtigkeit bestätigt, indem wir die bekannten durch den Versuch geprüften Ausdrücke erhalten.

Für das Dreieck wird

$$c = 0$$

$$J = k^2 \frac{a^2 b^2 \sin^2 \vartheta}{(ma - nb)^2} \left\{ \left(\frac{\sin \frac{ma}{2}}{\frac{ma}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sin \frac{nb}{2}}{\frac{nb}{2}} \right)^2 - 2 \frac{\sin \frac{ma}{2}}{\frac{ma}{2}} \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\frac{nb}{2}} \cos \left(\frac{ma}{2} - \frac{nb}{2} \right) \right\}$$

ein Ausdruck, der mit dem Schwerd'schen (*vide* S. 61 dessen Schrift) zusammenfällt.

Für das Parallelogramm wird

$$c = b$$

$$J = k^2 \frac{a^2 b^2 \sin^2 \vartheta}{(ma)^2} \left\{ 2 \left(\frac{\sin \frac{nb}{2}}{\frac{nb}{2}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sin \frac{nb}{2}}{\frac{nb}{2}} \right)^2 \cos ma \right\}$$

$$= k^2 a^2 b^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{\sin \frac{ma}{2}}{\frac{ma}{2}} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{nb}{2}}{\frac{nb}{2}} \right)^2$$

der bekannte Ausdruck für die durch ein Parallelogramm gebeugten Strahlen.

Beide Ausdrücke wären übrigens auch leicht durch directe Integration erhalten, wenn wir in die obere Gränze der Integration nach y entweder $c=0$ oder $c=b$ eingesetzt hätten.

Wie durch Zerlegung der beugenden Oeffnung, bei geradliniger Begränzung derselben, auch die Beugungserscheinungen anderer Oeffnungen erhalten werden können, sieht

man sofort. Die Rechnungen sind nicht schwieriger wenn auch weitläufiger.

Sind die Oeffnungen jedoch nicht geradlinig begrenzt, so lassen sich die Integrale nicht in geschlossener Form darstellen, sie führen auf Integrale, welche bisher noch nicht bestimmt sind. Man muß dann zu Reihenentwicklungen seine Zuflucht nehmen wie es Hr. Knochenhauer bereits gethan hat ¹⁾).

Marburg d. 15. Februar 1860.

VII. *Geometrische Methode, um das Potential der, von einer Kugel auf innere oder äußere Punkte ausgeübten, Wirkung zu bestimmen; von C. Neumann in Halle.*

Für den Satz, daß eine unendlich dünne, von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte, Schaale auf einen äußeren Punkt eine Kraft ausübe, deren Richtung durch die Axe des von diesem Punkte an die Schaale gelegten Tangenten-Kegels dargestellt wird, hat Steiner einen äußerst einfachen, auf rein geometrischen Betrachtungen beruhenden, Beweis gegeben ²⁾). Jene geometrischen Betrachtungen von Steiner führten mich zu einer neuen und einfachen Methode, um das Potential einer Kugel auf innere oder äußere Punkte zu bestimmen. Ich werde mich hier bei Auseinandersetzung dieser Methode auf die Feststellung folgenden Satzes beschränken.

» Bezeichnet M die Masse einer unendlich dünnen, von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Schaale; bezeichnet ferner a den Radius der Schaale, und e die Ent-

1) Knochenhauer, Undulationstheorie etc. S. 22.

2) Crelle's Journal, Bd. 12, S. 141.