SULLO SVILUPPO DI ALCUNE SPECIALI FUNZIONI DI UNA VARIABILE IN SERIE DI FUNZIONI SFERICHE.

Nota di **Adolfo Viterbi** (Pavia).

Adunanza del 23 dicembre 1906.

1. In talune questioni di Analisi applicata si presenta il problema seguente, che riflette lo sviluppo di una funzione di una variabile reale x in serie di polinomi di LEGENDRE della variabile stessa:

Data una funzione $\varphi(x)$ della variabile (reale) x , la quale funzione sia per tutti i valori di x , compresi fra -1 e $+1$, rappresentabile mediante una serie di polinomi di LEGENDRE:

$$(1) \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n X_n,$$

ove designi X_n il polinomio di LEGENDRE (in x) *) d'ordine n ($n = 0, 1, 2, \dots$), dedurre dai coefficienti $b_0, b_1, b_2, \dots$ l'espressione dei coefficienti dello sviluppo, in serie di polinomi X_n , di una funzione della forma:

$$(2) \quad f(x) = \frac{\varphi(x)}{P(x)}$$

quando sia $P(x)$ un polinomio qualunque in x , soggetto all'unica condizione che nessuna delle sue radici sia compresa fra -1 e $+1$.

Così $f(x)$ è senza dubbio, in generale, rappresentabile, in tutto l'intervallo accennato, mediante una serie di polinomi di LEGENDRE. Diremo a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) i coefficienti dei singoli X_n nello sviluppo cercato.

Ora, come è noto, non esiste un metodo generale il quale permetta di porre in evidenza la legge di formazione dei coefficienti dello sviluppo di $f(x)$, facendo così riscontro al metodo dei coefficienti indeterminati, per la deduzione dello sviluppo di $f(x)$ in serie di potenze di x , dall'analogo sviluppo di $\varphi(x)$. Infatti un tale metodo dovrebbe

*) È quasi superfluo ricordare, poichè cosa universalmente nota, essere: $X_n = \frac{1}{2^n \Pi n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$, ove si usi il simbolo Π a rappresentare i fattoriali.

evidentemente essere fondato sopra la ben nota relazione ricorrente *):

$$(3) \quad (n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0,$$

fra tre polinomi consecutivi di LEGENDRE.

(Quando, in particolare, sia: $n=0$, la (3) si riduce alla:

$$(3') \quad X_1 = x$$

poichè: $X_0 = 1$).

Come è facile verificare, la (3) convenientemente applicata, permette di stabilire un sistema di relazioni ricorrenti, con le quali ciascuno dei coefficienti a_{2m+i} ($i=1, 2, \dots$) risulta espresso, mediante una combinazione lineare dei $2m$ coefficienti [ove m designi il grado di $P(x)$] che nello sviluppo di $f(x)$ immediatamente lo precedono e, ben s'intende, delle b_n . A sua volta ciascuno dei coefficienti: a_{m+j} ($j=0, 1, 2, \dots, m-1$) risulta espresso mediante una combinazione lineare degli $m+j$ coefficienti a_n che lo precedono e delle b_n .

Così appunto gli m coefficienti: $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ rimangono indeterminati. E questi si dovranno calcolare direttamente mercè la nota relazione:

$$(4) \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{P(x)} X_n dx \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

quando si voglia determinare completamente lo sviluppo di $f(x)$, in serie di polinomi di LEGENDRE.

Però non è difficile ottenere, con opportuni artifici, le cercate espressioni dei coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ sotto una forma generale e semplice, espressioni che, associate alle predette relazioni ricorrenti, pure opportunamente trasformate, permettono di porre in evidenza la legge di formazione di tutte le a_n .

A stabilire appunto l'algoritmo generale che conduce allo scopo indicato, vale a dire a risolvere la questione enunciata, è dedicata la presente Nota.

2. Per fissare le idee consideriamo prima il caso particolare semplicissimo, in cui sia:

$$P(x) = y - x,$$

detto y un numero, in modulo, > 1 , mentre siano soddisfatte le condizioni (molto late del resto **) a che sia: $\frac{1}{y-x}$, suscettibile, per: $|x| \leq 1$ dello sviluppo pure ben noto:

$$(5) \quad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Y_n X_n,$$

dove designino le Y_n ($n=0, 1, 2, \dots$) le singole funzioni sferiche di 2^a specie di y , di grado n . Ciò facciamo, sì perchè la discussione dettagliata di questo caso, frequentissimo a presentarsi, faciliterà poi l'esame del caso generale nel quale non sia

*) v. HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, vol. I, pag. 91. Siccome poi nel seguito si dovrà citare di sovente quest'opera e precisamente soltanto il suo I° volume, ci serviremo della semplice indicazione H , a designare appunto il volume in parola dell'opera accennata.

**) v. HEINE, §§ 17 e 45.

$P(x)$ sottoposto ad alcuna restrizione, all'infuori di quelle enunciate, sì perchè lo studio del caso in discorso dà occasione allo svolgimento di alcune particolari considerazioni.

Possiamo pertanto alla (2) dare, in questo caso particolare, la forma:

$$(2') \quad (y - x)f(x) = \varphi(x).$$

Allora, in virtù della (3), abbiamo fra i coefficienti designati rispettivamente con a_n , b_n , il seguente sistema di relazioni ricorrenti *):

$$(I) \quad \begin{cases} a_1 = 3(ya_0 - b_0), \\ a_{n+1} = \frac{2n+3}{n+1}(ya_n - b_n) - \frac{(2n+3)n}{(n+1)(2n-1)}a_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Le (I) permettono di dedurre il valore di ciascun coefficiente a_n dai due che immediatamente lo precedono, quando n sia > 1 , mentre naturalmente a_1 resta espresso in funzione di a_0 . Perciò i coefficienti in discorso potranno riguardarsi come noti, solo quando sia noto il coefficiente a_0 .

Ora, in virtù della (4):

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{y-x} dx,$$

dove, sostituendo a: $\frac{1}{y-x}$ il suo sviluppo (5) e, ricordando le ben note relazioni fondamentali:

$$(6) \quad \begin{cases} \int_{-1}^{+1} X_p X_n dx = 0 \quad \text{quando: } p \text{ sia } \leq n, \\ \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \end{cases}$$

le quali servono appunto a stabilire la (4), ricaveremo facilmente:

$$(II) \quad a_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n b_n.$$

Della convergenza della serie che figura in questa relazione è assai facile accertarsi. Infatti dalle nostre premesse risulta essere la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b_n X_n,$$

convergente in ugual grado nell'intervallo costituito dai valori di x , compresi fra -1 e $+1$. Di più, per ogni valore di questo intervallo è:

$$\left| \frac{1}{y-x} \right| < \left| \frac{1}{y-1} \right|$$

oppure:

$$\left| \frac{1}{y-x} \right| < \left| \frac{1}{y+1} \right|,$$

*) Queste relazioni si potrebbero dedurre direttamente anche da una formula dimostrata dall'HEINE nel § 20 dell'opera citata.

a seconda rispettivamente che y è > 0 o < 0 . Da tali considerazioni risulta evidente l'equiconvergenza e perciò l'integrabilità termine a termine (nell'intervallo in discorso) della serie:

$$\frac{1}{y-x} \sum_{n=0}^{\infty} b_n X_n \quad \text{C. D. D.}$$

3. Procediamo ora allo studio del caso generale, nel quale sia $P(x)$ un polinomio qualunque di grado m .

Per porre le formule che ora stabiliremo, sotto un aspetto tipico, generale converrà considerare l'espressione di $P(x)$, mediante una combinazione lineare dei polinomi $X_0 (= 1)$, X_1 , ... X_m . Sia:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{h=m} p_h X_h,$$

tale espressione, ove i coefficienti p_h si calcolano in modo di per sè evidente.

Indi pongasi la (2) sotto la forma:

$$(7) \quad \varphi(x) = f(x) \sum_{h=0}^{h=m} p_h X_h.$$

Di più consideriamo lo sviluppo, secondo i polinomi di LEGENDRE, dei singoli prodotti:

$$X_h X_n \quad \left(\begin{matrix} h = 0, 1, 2, \dots, m \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right).$$

La reiterata applicazione della (3) mostra senz'altro (come del resto si può dedurre, per altra via, dalla forma stessa dei polinomi X_n) che:

$$(8) \quad X_h X_n = \sum_{q=0}^{q=h} c_q^{(h,n)} X_{n+h-2q}.$$

Il calcolo dei coefficienti, $c_q^{(h,n)}$ si fa assai facilmente e può, come è chiaro essere eseguito con varii metodi diversi. Essi possono risguardarsi come parametri noti, molto più che del loro calcolo si occupò in modo particolare F. NEUMANN *).

Le (8) permettono allora di stabilire fra i coefficienti a_n il seguente sistema di relazioni ricorrenti:

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n+m} p_m c_m^{(n+m,m)} + a_{n+m-1} p_{m-1} c_{m-1}^{(n+m-1,m-1)} + a_{n+m-2} (p_m c_{m-1}^{(n+m-2,m)} + p_{m-2} c_{n-2}^{(n+m-2,m-2)}) + \dots \\ \dots + a_n (p_m c_{\frac{m}{2}}^{(n,m)} + p_{m-2} c_{\frac{m-2}{2}}^{(n,m-2)} + \dots + p_0) \\ + a_{n-1} (p_{m-1} c_{\frac{m-1}{2}}^{(n-1,m-1)} + p_{m-2} c_{\frac{m-3}{2}}^{(n-1,m-3)} + \dots + p_1 c_0^{(n-1,1)}) + \dots \\ \dots + a_{n-m+2} (p_{m-2} c_0^{(n-m+2,m-2)} + p_m c_1^{(n-m,m)}) + a_{n-m+1} p_{m-1} c_0^{(n-m+1,m-1)} + a_{n-m} p_m c_0^{(n-m,m)} \\ = b_n, \end{array} \right.$$

quando sia m un numero pari.

*) v. F. NEUMANN, *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen*. Lipsia, 1878 (II Parte).

Quando invece sia m un numero dispari avremo il sistema di relazioni:

$$(III_1) \left\{ \begin{aligned} & a_{n+m} p_m c_{m-1}^{(n+m, m)} + a_{n+m-1} p_{m-1} c_{m-2}^{(n+m-1, m-1)} + a_{n+m-2} (p_m c_{m-1}^{(n+m-2, m)} + p_{m-2} c_{m-2}^{(n+m-2, m)}) + \dots \\ & \dots + a_n (p_{m-1} c_{\frac{m-1}{2}}^{(n, m-1)} + p_{m-3} c_{\frac{m-3}{2}}^{(n, m-3)}) + \dots + p_0 \\ & + a_{n-1} (p_m c_{\frac{m-1}{2}}^{(n-1, m)} + p_{m-2} c_{\frac{m-3}{2}}^{(n-1, m-2)} + \dots + p_1 c_0^{(n-1, 1)}) + \dots \\ & \dots + a_{n-m+2} (p_{m-2} c_0^{(n+m-2, m-2)} + p_m c_1^{(n-m, m)}) + a_{n-m+1} p_{m-1} c_0^{(n+m-1, m-1)} + a_{n-m} p_m c_0^{(n-m, m)} \\ & = b_n. \end{aligned} \right.$$

Queste relazioni si potranno ritenere valide per tutti i valori di n , compresi quelli inferiori a m , purchè nelle relazioni corrispondenti a questi ultimi valori si stabilisca di ritenere nulli tutti i coefficienti a , che risulterebbero affetti da indice negativo.

Le (III), (III₁) mostrano all'evidenza che, come si era asserito, la completa determinazione dei coefficienti a_n richiede che si calcolino direttamente i primi m di questi. Vale a dire, una volta calcolati direttamente gli m integrali definiti:

$$(9) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x) X_h dx}{P(x)} \quad (h = 0, 1, 2, \dots, m-1),$$

le relazioni ricorrenti, testè considerate, permetteranno di ricavare l'espressione di tutti i coefficienti a_n .

Ora, per calcolare gli m integrali in parola, in guisa da ottenere formule semplici e generali ad un tempo, consideriamo lo sviluppo in serie di LEGENDRE di $\frac{1}{P(x)}$. A motivo delle condizioni alle quali, come fu presupposto, soddisfa $P(x)$, possiamo, in base a ben noti teoremi dovuti segnatamente al DINI, ammettere che la reciproca di tale polinomio sia effettivamente, in tutto l'intervallo che ha per estremi $-1, +1$, rappresentabile mediante una serie di funzioni X_n . Sia pertanto:

$$(10) \quad \frac{1}{P(x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} s_n X_n.$$

Da questa relazione possiamo, ricordando pure le (8), dedurre le altre:

$$(10') \quad \frac{X_h}{P(x)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} s_{h,n} X_n \quad (h = 1, 2, \dots, m-1),$$

ove si sia posto brevemente:

$$s_{h,n} = \sum_{q=0}^{q=h} c_{h-q}^{(n+h-2q, h)} s_{n+h-2q}.$$

Ed è evidente come la (10) rappresenti ciò, a cui si riduce la (10'), quando: $h = 0$, nel qual caso si potrà, ad ottenere maggiore simmetria nelle formule, porre:

$$s_{0,n} = s_n.$$

Si trasformino quindi gli integrali (9) col sostituire in essi a $\varphi(x)$, $\frac{1}{P(x)}$, $\frac{X_1}{P(x)}$, ..., $\frac{X_{m-1}}{P(x)}$ le loro espressioni offerte rispettivamente dalle (10), (10'). Tenendo presente

la (4) sarà allora facile ottenere le relazioni seguenti:

$$(IV) \quad a_h = \frac{2h+1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{X_h \varphi(x)}{P(x)} dx = (2h+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{hn} b_n}{2n+1} \quad (h=0, 1, 2, \dots, m-1).$$

La convergenza delle serie che figurano nei secondi membri di queste relazioni, è facile a stabilirsi, mercè considerazioni analoghe a quelle svolte alla fine del n° 2.

Le (IV) appunto, associate alle (III) [o eventualmente alle (III₁)] costituiscono evidentemente il cercato sistema di relazioni ricorrenti, atto a determinare i coefficienti incogniti a_n , in quanto questi coefficienti si ricavano da tale sistema, espressi mediante i coefficienti p_h , b_n , s_n , i quali sarebbero i dati del problema ed i coefficienti $c_q^{(nh)}$, i quali sono da riguardarsi come parametri fissi.

4. Quanto fu ora esposto si estende facilmente anche agli sviluppi in serie di funzioni sferiche:

$$\frac{2^n \Pi(n-v) \Pi n}{\Pi 2n} (\sqrt{x^2-1})^v \frac{d^v X_n}{dx^v} = \frac{\Pi(n-v)}{\Pi 2n} (\sqrt{x^2-1})^v \frac{d^{n+v}(x^2-1)^n}{dx^{n+v}},$$

dove v sia un numero intero fisso non $>$ di n . Tali sviluppi si presentano nella rappresentazione di funzioni di due variabili mediante serie di funzioni di LAPLACE.

Diremo brevemente $X_n^{(v)}$ le funzioni testè considerate.

Fra funzioni siffatte corrispondenti, ben s'intende, ad un medesimo indice v , sussistono relazioni ricorrenti ben note del tipo della (1) *).

Di più fra due di tali funzioni sussistono pure relazioni integrali caratteristiche di forma analoga a quelle che si hanno fra polinomi X_n .

Queste possono, come è noto, porsi sotto la forma **):

$$(II) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-v}(x^2-1)^n}{dx^{n-v}} \frac{d^{p+v}(x^2-1)^p}{dx^{p+v}} dx = \begin{cases} (-1)^v \frac{2}{2n+1} 4^n (\Pi n)^2 \\ \text{oppure} \\ 0 \end{cases}$$

a seconda rispettivamente che p è $= n$, oppure diverso da n .

Così, applicando in modo di per sé evidente tutte le relazioni accennate, sarà possibile, detta $\varphi(x)$ una funzione della forma: $(x^2-1)^{\frac{v}{2}} \psi(x)$ [ove sia $\psi(x)$ simbolo di una funzione uniforme di x] rappresentabile (per x compreso fra -1 e $+1$) mediante una serie della forma:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X_n^{(v)},$$

dedurre relazioni che esprimano la legge di formazione dei coefficienti a_n dello sviluppo in serie di funzioni $X_n^{(v)}$ della funzione:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{P(x)},$$

[$P(x)$ abbia sempre il medesimo significato sin qui attribuito a tale simbolo].

*) v. HEINE, § 63.

**) v. HEINE, § 62.

Cioè si potranno dedurre, in primo luogo, relazioni le quali esprimano ciascun coefficiente: a_{n+2m} ($n = \nu, \nu + 1, \dots$) mediante i $2m$ coefficienti che lo precedono immediatamente e i coefficienti $b_\nu, b_{\nu+1}, \dots$ e ciascun coefficiente: $a_{\nu+2m-i}$ ($i = 1, 2, \dots m$) mediante i $2m - i$ coefficienti che lo precedono e i coefficienti b_ν [a_ν designi il coefficiente che figura nel primo termine dello sviluppo di $f(x)$]. In secondo luogo si potrà dedurre direttamente dalle accennate proprietà integrali l'espressione di ciascuna delle $a_\nu, a_{\nu+1}, \dots a_{\nu+m-1}$.

Per ottenere allora espressioni possibilmente semplici e simmetriche converrà ricercare le rappresentazioni di $P(x)$ e di: $\frac{1}{P(x)}$ rispettivamente mediante una combinazione lineare di polinomi $\frac{d^{n+\nu}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+\nu}}$ ed una serie di polinomi:

$$\frac{1}{2^n \prod n} \frac{d^{n-\nu}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-\nu}} \quad (n = \nu, \nu + 1, \dots).$$

Ciò non presenta alcuna difficoltà sostanziale. Infatti, per $P(x)$ la rappresentazione in parola si ottiene in modo di per sè evidente.

L'accennato sviluppo di: $\frac{1}{P(x)}$ si ricaverà invece facilmente, considerando lo sviluppo, in serie di polinomi X_n , della funzione

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} \frac{1}{P(x)}.$$

Anche ora la natura del polinomio $P(x)$ mostra come la funzione in parola sia effettivamente suscettibile di un tale sviluppo e come la serie di LEGENDRE, che serve a rappresentarla, sia equiconvergente e perciò successivamente integrabile termine a termine per: $|x| < 1$.

Così, con semplici integrazioni (in numero di ν) dello sviluppo di: $\frac{d^\nu}{dx^\nu} \frac{1}{P(x)}$, in serie di polinomi X_n , si otterrà lo sviluppo cercato di: $\frac{1}{P(x)}$.

Ciò premesso, sarà facile, in primo luogo determinare gli sviluppi dei prodotti:

$$\frac{2^{n-h} \prod (n - \nu) \prod n}{1.3 \dots (2n - 1) \prod h} \frac{d^{n+\nu}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+\nu}} \frac{d^{h+\nu}(x^2 - 1)^h}{dx^{h+\nu}} \quad \left(\begin{matrix} n = \nu, \nu + 1, \dots \\ h = \nu, \nu + 1, \dots \nu + m \end{matrix} \right)$$

mediante combinazioni lineari di polinomi:

$$\frac{2^n \prod (n - \nu) \prod n}{\prod 2n} \frac{d^\nu X_n}{dx^\nu}.$$

Del pari le (II) permetteranno pure di calcolare facilmente le espressioni di $a_\nu, \dots, a_{\nu+m}$, in guisa da ottenere tutti gli elementi necessari a stabilire un sistema di relazioni che, per il caso ora in esame, faccia perfetto riscontro alle (III), (IV). E dopo quanto fu detto nei §§ precedenti sarebbe superfluo soffermarsi più oltre su questo punto.

Pavia, dicembre 1906.

ADOLFO VITERBI.