**31. Ueber die Vertheilung der freien
Electricität im Innern einer Geissler'schen
Röhre; von Eduard Riecke.**

Wenn man die Messungen, durch welche Warburg den absoluten Werth des normalen Kathodengefälles festgestellt hat, mit den Beobachtungen Hittorf's über Potentialdifferenzen längs der Axe einer Geissler'schen Röhre verbindet, so kann man den Verlauf des Potentials in der Axe vollständig bestimmen. Die Ergebnisse der Rechnung sind in der beistehenden Figur graphisch dargestellt. Die horizontale Axe repräsentirt die Länge der Röhre von der Anode an gerechnet in mm; a ist die Stelle der Anode, c die der Kathode. Die Potentialdifferenzen gegen die Anode sind angegeben in Volt. Hittorf hat in einer willkürlichen Einheit die Potentialdifferenzen der Electroden, die Potentialdifferenzen der Stellen b , d , e gegenüber der Anode, endlich die Potentialdifferenz zwischen den Stellen f und g , den Grenzen des dunkeln Zwischenraumes, gemessen. Warburg hat nach absolutem Maasse das Kathodengefälle, die Potentialdifferenz zwischen g und c , bestimmt. Bei normaler Entladung sind die Kurven, abgesehen von der Neigung gegen die Oberfläche der Kathode, unabhängig von der Stromstärke; ihre Aenderung mit abnehmendem Drucke ergibt sich aus der Figur. Die Röhre war gefüllt mit Stickstoff. Bei einem Drucke von 0,6 mm Quecksilber betrug die Stromstärke 244—1282 Millionstel Amp., bei einem Drucke von 0,2 mm war sie 203—418 Millionstel Amp.¹⁾

Geht man aus von der Anode, so kann hier der Werth des Potentials V durch eine quadratische Function der von der Anode an gerechneten Röhrenlänge s dargestellt werden:

$$(1) \quad V = -\alpha_1 s + \alpha_2 s^2;$$

---

1) Riecke, Lehrbuch der Experimentalphysik, 2. p. 477.

Es wird dann:

$$(1) \quad \frac{dV}{ds} = -\alpha_1 + 2\alpha_2 s.$$

Setzt man voraus, dass der Werth von V in den Querschnitten der Röhre überall derselbe ist, so ergibt sich für die räumliche Dichte in der Nähe der Anode der Werth:

$$(2) \quad \epsilon_a = -\frac{\alpha_2}{2\pi}.$$

Die Dichtigkeit der an der Oberfläche der Anode befindlichen Electricität wird:

$$(3) \quad \sigma_a = \frac{\alpha_1}{4\pi}.$$

In der Nähe der Kathode benützen wir zur Darstellung des Potentials die Gleichung:

$$(4) \quad V + bV^2 = -\beta_1 s - \beta_2 s^2.$$

Hier bedeutet aber V die Potentialdifferenz gegenüber der Grenze des dunkeln Zwischenraumes, s den Abstand der betrachteten Stelle von dieser Grenze. Wir erhalten:

$$(5) \quad \frac{dV}{ds} = -\frac{\beta_1 + 2\beta_2 s}{1 + 2bV}$$

und

$$(6) \quad \frac{d^2V}{ds^2} = -\frac{2\beta_2}{1 + 2bV} - \frac{2b}{1 + 2bV} \left(\frac{dV}{ds} \right)^2.$$

Für $s = 0$ ist auch $V = 0$, also

$$(7) \quad \left(\frac{dV}{ds} \right)_0 = -\beta_1.$$

Nehmen wir an, dass das Potential von der Grenze des positiven Lichtes an bis zu der Kathode stetig verlaufe, so ist β_1 gleich dem negativen Werth des Potentialgefälles im dunkeln Zwischenraum. Die Dichtigkeit der an der Oberfläche der Kathode befindlichen Electricität ist:

$$(8) \quad \sigma_k = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{dV}{ds} \right)_k.$$

Die räumliche Dichte der Electricität in der Nähe der Kathode ist gegeben durch:

$$(9) \quad \varepsilon_k = -\frac{1}{4\pi} \frac{d^2V}{ds^2}.$$

Im Innern des positiven Lichtes, in einigem Abstand von der Anode und bis zu der Grenze des dunkeln Zwischenraumes, kann das Potential dargestellt werden durch:

$$(10) \quad V_1 = -\gamma_0 - \gamma_1 s;$$

im dunkeln Zwischenraume selbst durch:

$$(11) \quad V_2 = -\delta_0 - \delta_1 s.$$

Für die Grenze zwischen dem positiven Lichte und dem dunkeln Zwischenraum ergibt sich hieraus eine Flächenladung von der Dichte:

$$(12) \quad \sigma = \frac{\delta_1 - \gamma_1}{4\pi}.$$

Wenden wir uns zu der numerischen Auswerthung der im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Formeln, und zwar zuerst für die bei einem Druck von 0,2 mm geltenden Verhältnisse.

Der Endpunkt des parabolischen Theiles der Potentialcurve ist gegeben durch $V = -0,15 \text{ cm}^{1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$ und $s = 2,6 \text{ cm}$. Für denselben Punkt ist: $dV/ds = -0,0126$. Die Gleichungen 1 und 1' werden daher:

$$\begin{aligned} -0,15 &= -2,6 \cdot \alpha_1 + 2,6^2 \cdot \alpha_2, \\ -0,0126 &= -\alpha_1 + 2 \times 2,6 \cdot \alpha_2. \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt:

$$\alpha_1 = 0,1031, \quad \alpha_2 = 0,0174.$$

Die räumliche Dichte in der Nähe der Electrode wird nach Gleichung (2):

$$\varepsilon_a = -0,0028 \text{ cm}^{-3/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1},$$

die Dichte an der Oberfläche der Anode:

$$\sigma_a = 0,0082 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}.$$

Für das positive Licht ist an der Grenze des dunkeln Zwischenraumes $\gamma_1 = 0,0126$, im dunkeln Zwischenraum selbst ist $\delta_1 = 0,0021$, somit ist die Flächendichte an der Grenze zwischen dem positiven Lichte und dem dunkeln Zwischenraum nach Gleichung (12):

$$\sigma = -0,00083 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}.$$

Das Kathodengefälle hat den Werth $-0,667$, während die Länge des negativen Glimmlichtes $4,3 \text{ cm}$ beträgt Gleichung (4) wird daher:

$$-0,667 + 0,667^2 \times b = -4,3 \times \beta_1 - 4,3^2 \times \beta_2.$$

An der Grenze des Glimmlichtes mit $V = 0$ und $s = 0$ ist nach Gleichung (7):

$$\left(\frac{dV}{ds} \right)_0 = -\beta_1 = -0,002.$$

Der Werth des Differentialquotienten an der Oberfläche der Kathode, d. h. für $V = -0,667$ und $s = 4,3$, hängt ab von der Stromstärke. Die Werthe des Differentialquotienten, welche zu den in Betracht kommenden Stromstärken gehören, sind in der folgenden Tabelle angegeben.¹

Stromstärke in Millionstel Amp.	$\left(\frac{dV}{ds} \right)_k$
200	-1,127
690	-1,787
1510	-2,643

Für die drei verschiedenen Stromstärken ergeben sich daher die weiteren Gleichungen:

1) Riecke. Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. p. 478. Ich benutze die Gelegenheit, um einen Druckfehler in der auf der angegebenen Seite mitgetheilten Tabelle zu berichtigen. In der Ueberschrift der dritten Columnne sollte stehen, Volt $\times \text{cm}^{-1}$ an Stelle von Volt; dagegen in der Ueberschrift der fünften Columnne Volt an Stelle von Volt $\times \text{cm}^{-1}$.

$$1,127 = \frac{\beta_1 + 2 \times 4,3 \times \beta_2}{1 - 2 \times 0,667 \times b}$$

$$1,787 = \frac{\beta_1 + 2 \times 4,3 \times \beta_2}{1 - 2 \times 0,667 \times b}$$

$$2,643 = \frac{\beta_1 + 2 \times 4,3 \times \beta_2}{1 - 2 \times 0,667 \times b}.$$

Verbindet man diese Gleichungen der Reihe nach mit den beiden vorhergehenden, so erhält man, den drei verschiedenen Stromstärken entsprechend, die folgenden drei Werthsysteme der Constanten:

$$b = 0,631; \quad \beta_1 = 0,002; \quad \beta_2 = 0,023$$

$$b = 0,680; \quad \beta_1 = 0,002; \quad \beta_2 = 0,019$$

$$b = 0,705; \quad \beta_1 = 0,002; \quad \beta_2 = 0,019$$

Für die räumlichen Dichtigkeiten an der Kathode ergeben sich nun die Formeln:

$$\varepsilon_k = \frac{0,0037}{1 + 1,26 \sqrt{V}} + \frac{0,100 (0,002 + 0,047 \times s)^2}{(1 + 1,26 \sqrt{V})^3},$$

$$\varepsilon_k = \frac{0,0030}{1 + 1,36 \sqrt{V}} + \frac{0,108 (0,002 + 0,038 \times s)^2}{(1 + 1,36 \sqrt{V})^3},$$

$$\varepsilon_k = \frac{0,0030}{1 + 1,41 \sqrt{V}} + \frac{0,112 (0,002 + 0,038 \times s)^2}{(1 + 1,41 \sqrt{V})^3},$$

in welchen die Werthe von $\sqrt{V}$ und s miteinander durch die Beziehungen verbunden sind:

$$\sqrt{V} + 0,631 \sqrt{V}^2 = -0,002 s - 0,0235 s^2,$$

$$\sqrt{V} + 0,680 \sqrt{V}^2 = -0,002 s - 0,0190 s^2,$$

$$\sqrt{V} + 0,495 \sqrt{V}^2 = -0,002 s - 0,0190 s^2.$$

Bei dem höheren Druck von 0,6 mm bleiben die Verhältnisse an der Kathode unverändert; der Endpunkt des von der Anode ausgehenden parabolischen Theiles der Potentialcurve ist aber jetzt gegeben durch $\sqrt{V} = -0,30$ und $s = 2,6$ cm. Ferner ist in jenem Punkt: $d\sqrt{V}/ds = -0,0404$. Wir erhalten somit die Gleichungen:

$$-0,30 = -2,6 \times \alpha_1 + 2,6^2 \times \alpha_2 \text{ und}$$

$$-0,0404 = -\alpha_1 + 2 \times 2,6 \times \alpha_2.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_1 = 0,1898 \text{ und } \alpha_2 = 0,0287.$$

Tabelle I.
Electrische Dichte.

Stromstärke electrostatisch	Flächendichte an der Anode	Räumliche Dichte von $s = 0 - 2,6$	Flächendichte bei $s = 24,8$	Räumliche Dichte für $s =$			Flächen- dichte an der Kathode
				29,4	31,5	32,6	
			Druck 0,6 mm				
60×10^4	0,0151	— 0,0046	— 0,0029	0,0037	0,0080	0,0157	— 0,090
207×10^4	0,0151	— 0,0046	— 0,0029	0,0030	0,0047	0,0089	— 0,142
456×10^4	0,0151	— 0,0046	— 0,0029	0,0030	0,0045	0,0103	— 0,210
			Druck 0,2 mm				
60×10^4	0,0082	— 0,0028	— 0,0008	0,0037	0,0060	0,0157	— 0,090
207×10^4	0,0082	— 0,0028	— 0,0008	0,0030	0,0047	0,0089	— 0,142
456×10^4	0,0082	— 0,0028	— 0,0008	0,0030	0,0045	0,0103	— 0,210

Tabelle II.
Electrische Kraft.

Stromstärke electrostatisch	Anode 0	$s =$					Kathode 33,7
		1,3	2,6 — 24,8	24,8 — 29,4	31,5	32,6	
			Druck 0,6 mm				
60×10^4	0,190	0,152	0,0404	0,0038	0,125	0,248	1,127
207×10^4	0,190	0,152	0,0404	0,0038	0,098	0,178	1,787
456×10^4	0,190	0,152	0,0404	0,0038	0,097	0,188	2,643
			Druck 0,2 mm				
60×10^4	0,103	0,080	0,0126	0,0021	0,122	0,245	1,127
207×10^4	0,103	0,080	0,0126	0,0021	0,096	0,175	1,787
456×10^4	0,103	0,080	0,0126	0,0021	0,094	0,186	2,643

Die räumliche Dichte in der Nähe der Anode wird darnach:

$$\varepsilon_a = -0,0046 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1},$$

die Dichte an der Oberfläche der Anode:

$$\sigma_a = 0,0151 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}.$$

Für das positive Licht ist an der Grenze des dunkeln Zwischenraumes $\gamma_1 = 0,0404$, im dunkeln Zwischenraum selbst ist $\delta_1 = 0,0038$; somit ist die Flächendichte an der Grenze des positiven Lichtes:

$$\sigma = -0,0029 \text{ cm}^{-1/2} \text{ g}^{1/2} \text{ sec}^{-1}.$$

Mit Hülfe der im vorhergehenden erhaltenen Werthe ergeben sich die in den folgenden Tabellen enthaltenen Zusammenstellungen. Die erste Tabelle bezieht sich auf die Vertheilung der electrischen Dichtigkeit, die zweite auf die Vertheilung der electrischen Kraft in der Längsrichtung der Röhre. Die Zahlen beziehen sich auf absolutes Maass und cm, g, sec als Maasseinheiten.

An die zweite Tabelle schliessen wir noch eine dritte an, in welcher die Verhältnisse von Kraft und Stromdichte, die Widerstände eines Cubikcentimeters in electrostatischem Maasse angegeben sind. Um diese specifischen Widerstände in Ohm zu erhalten, müssen die Zahlen der Tabelle mit 9×10^{11} multiplicirt werden. Die Tabelle bezieht sich auf den Theil des positiven Lichtes, in welchem die electrische Kraft konstant ist, auf den dunkeln Zwischenraum und den Raum an der Oberfläche der Kathode.

Tabelle III.

Verhältniss von electrischer Kraft und von Stromdichte.

Stromdichte electrostatisch	s =		Kathode 33,7
	2,6 — 24,8	24,8 — 29,4	
Druck = 0,6			
2,52 × 10 ⁴	1,60 × 10 ⁻⁶	1,51 × 10 ⁻⁷	0,45 × 10 ⁻⁴
8,75 × 10 ⁴	0,46 × 10 ⁻⁶	0,43 × 10 ⁻⁷	0,20 × 10 ⁻⁴
19,25 × 10 ⁴	0,21 × 10 ⁻⁶	0,19 × 10 ⁻⁷	0,14 × 10 ⁻⁴
Druck = 0,2 mm			
2,52 × 10 ⁴	0,50 × 10 ⁻⁶	0,83 × 10 ⁻⁷	0,45 × 10 ⁻⁴
8,75 × 10 ⁴	0,144 × 10 ⁻⁶	0,24 × 10 ⁻⁷	0,20 × 10 ⁻⁴
19,25 × 10 ⁴	0,065 × 10 ⁻⁶	0,11 × 10 ⁻⁷	0,14 × 10 ⁻⁴

Die dritte Tabelle zeigt, dass der spezifische Widerstand mit wachsender Stromstärke abnimmt, und dass er in den verschiedenen Theilen der Röhre von sehr verschiedener Grösse ist. Wir machen nun die Annahme, dass die Leitung des Gases darauf beruhe, dass den unelectrischen Molecülen des Gases positive und negative, einwerthige Ionen in verhältnissmässig kleiner Zahl beigemischt sind. Wir können dann auf die convective Strömung der Electricität in dem Gase die Betrachtungen übertragen, welche ich zur Begründung einer molecularen Theorie der Electrolyse benutzt habe.¹⁾ Wir betrachten zuerst die Bewegung der positiven Ionen. Bezeichnen wir durch ϵ die electricische Ladung, durch μ_p die Masse eines einzelnen Ions, durch $\mathfrak{F}$ die electricische Kraft und durch τ_p die Zeit, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstössen eines positiven Ions mit einem Gasmolecül vergeht, so ist die mittlere Geschwindigkeit, welche einem Ion durch die electricische Kraft ertheilt wird, gegeben durch:

$$\overline{\zeta'_p} = \frac{\epsilon}{2\mu_p} \mathfrak{F} \tau_p.$$

Hier können wir an Stelle von ϵ auch die electricische Ladung η eines Grammions, an Stelle von μ_p das Grammmoleculargewicht γ_p setzen und erhalten

$$\overline{\zeta'_p} = \frac{\eta}{2\gamma_p} \cdot \mathfrak{F} \cdot \tau_p.$$

Die Zeit τ_0 , welche bei normalem Druck zwischen zwei Zusammenstössen vergeht, beträgt bei Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff bez. $2,03 \times 10^{-10}$, $1,81 \times 10^{-10}$, $0,93 \times 10^{-10}$ Sekunden. Wir setzen dementsprechend für unsere Ionen:

$$\tau_0 = n_p \times 10^{-10}.$$

Bei dem Druck p ergibt sich dann für die mittlere Geschwindigkeit der Ionen im Sinne der elektrischen Kraft:

$$\overline{\zeta'_p} = 380 \times n_p \times 10^{-10} \times \eta \frac{\mathfrak{F}}{p \gamma_p}.$$

Bezeichnen wir durch N_p die Anzahl der positiven Grammionen, die in einem Cubikcentimeter enthalten sind, so ist die Menge der positiven Electricität, welche von ihnen in einer

1) Zeitschr. f. phys. Chem. 6. p. 564.

Secunde durch die Fläche von 1 qcm hindurchgeführt wird, gegeben durch:

$$u_p = 380 \times n_p \times 10^{-10} \times \eta^2 N_p \frac{\mathfrak{F}}{p \gamma_p}.$$

Nun ist die Zahl der in 1 Grammion enthaltenen Einzelionen gleich $1,29 \times 10^{24}$; verstehen wir also unter N_p die Zahl der in 1 ccm enthaltenen positiven Einzelionen, so ist $N_p = 1,29 \times 10^{24} \times N_p$; ferner ist $\eta = 2,88 \times 10^{14}$.

Wir erhalten daher:

$$u_p = \frac{1}{409} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{p} \times N_p \cdot \frac{n_p}{\gamma_p}.$$

Ebenso ergibt sich für die Menge der negativen Electricität, welche entgegen der Richtung der electricischen Kraft in einer Secunde durch die Fläche von 1 qcm geführt wird:

$$u_n = \frac{1}{409} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{p} \cdot N_n \cdot \frac{n_n}{\gamma_n};$$

die Bedeutung der neu eingeführten Zeichen ergibt sich leicht aus der Analogie mit den bei den positiven Ionen benutzten. Bezeichnen wir durch u die ganze Stromdichte in electrostatischem Maasse, so wird:

$$u = \frac{1}{409} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{p} \left\{ N_p \frac{n_p}{\gamma_p} + N_n \frac{n_n}{\gamma_n} \right\}.$$

Ist endlich ρ der specifische Widerstand in electrostatischem Maasse, so wird:

$$N_p \frac{n_p}{\gamma_p} + N_n \frac{n_n}{\gamma_n} = 409 \times \frac{p}{\rho}.$$

Tabelle IV.

Werthe von $N_p \cdot \frac{n_p}{\gamma_p} + N_n \frac{n_n}{\gamma_n}$.

Stromdichte electrostatisch	s =		Kathode 33,7
	2,6—24,8	24,8—29,4	
Druck 0,6 mm			
2,52 × 10 ⁴	15,3 × 10 ⁷	162 × 10 ⁷	0,545 × 10 ⁷
8,75 × 10 ⁴	53,3 × 10 ⁷	570 × 10 ⁷	1,225 × 10 ⁷
19,25 × 10 ⁴	116,5 × 10 ⁷	1290 × 10 ⁷	1,750 × 10 ⁷
Druck 0,2 mm			
2,52 × 10 ⁴	16,4 × 10 ⁷	99 × 10 ⁷	0,182 × 10 ⁷
8,75 × 10 ⁴	57,0 × 10 ⁷	342 × 10 ⁷	0,408 × 10 ⁷
19,25 × 10 ⁴	126,0 × 10 ⁷	746 × 10 ⁷	0,583 × 10 ⁷

Die hiernach berechneten Werthe der auf der linken Seite stehenden Summe sind in der vierten Tabelle zusammengestellt.

Die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Gasmoleküle beträgt bei einem Druck von 0,4 mm $45,8 \times 10^{15}$, bei einem Druck von 0,2 mm $15,3 \times 10^{15}$. Solange also die Zahlen γ nicht zu gross und die Zahlen n nicht zu klein sind, ist die Zahl der im Cubikcentimeter der Röhre anzunehmenden Ionen in der That allenthalben klein gegenüber der Zahl der neutralen Gasmoleküle.

Aus der Mischung der positiven und der negativen Ionen ergibt sich eine räumliche electrische Ladung im Inneren der Röhre, deren Dichte gegeben ist durch:

$$\epsilon = 2,24 \times 10^{-10} \times (N_p - N_n).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der früheren:

$$409 \times \frac{p}{\varrho} = N_p \frac{n_p}{\gamma_p} + N_n \frac{n_n}{\gamma_n},$$

so kann man die Zahlen N_p und N_n berechnen, sobald die Zahlen n und γ bekannt sind. Ueberall da, wo die räumliche Ladung verschwindet, ist $N_p = N_n$. Setzen wir zur Abkürzung $n_p/\gamma_p = \alpha$ und $n_n/\gamma_n = \beta$, so wird allgemein:

$$N_p = \frac{409 \times \frac{p}{\varrho} + 0,45 \times 10^{10} \times \beta \epsilon}{\alpha + \beta},$$

$$N_n = \frac{409 \times \frac{p}{\varrho} - 0,45 \times 10^{10} \times \alpha \epsilon}{\alpha + \beta}.$$

Es ergibt sich also bei positivem ϵ ein positiver Werth für N_n nur so lange, als $409 p/\varrho > 0,45 \times 10^{10} \times \alpha \epsilon$ ist.

Nehmen wir als zusammengehörige Werthe von $409 p/\varrho$ und von ϵ die Zahlen $1,225 \times 10^7$ und $3,57$, so muss $\alpha = n_p/\gamma_p$ kleiner als $0,72 \times 10^{-3}$ sein. Setzen wir γ_p gleich dem Moleculargewicht des Stickstoffes, so ergibt sich $n_p < 0,01$. Die Zeit zwischen zwei Zusammenstössen wird hiernach an der Kathode für die angenommenen Ionen beträchtlich kleiner, als für die Moleküle neutraler Gase. Um die entsprechende Rechnung für die an die Anode grenzende Gasschicht durchzuführen, setzen wir $409(p/\varrho) = 10,3 \times 10^7$ und $\epsilon = -0,0046$. Als Bedingung für einen positiven Werth von N_p ergibt sich dann: $n_n < 5 \gamma_n$.