ma per la (4):

$$L'' = \pi M_1 \omega_0,$$

onde avremo:

$$\Delta \omega = \pi \omega_0,$$

cioè il decremento di ampiezza è proporzionale alla deformazione permanente del ciclo statico che gli corrisponde.

**STUDIO DELLE PROPRIETÀ ELASTICHE DEI CORPI FONDATA SULL'USO CONTEMPORANEO
DEI METODI STATICO E DINAMICO.**

Nota del Dott. M. CANTONE.

(Largo Sunto di una *Nota* inserita nei Rend. Acc. dei Lincei,
vol. IV, 1^a sem. p. 488, 1895).

Mantenendoci nell'ordine d'idee della *Nota* precedente sarà bene vedere a quali risultati si perviene ammettendo che nel caso delle oscillazioni la legge di dipendenza fra le M e le ω sia della stessa natura di quella che vale per i cicli statici. Porremo perciò, prendendo come origine dei tempi l'istante in cui il momento raggiunge il massimo valore dalla parte delle forze torcenti positive:

$$(1) \quad M = M_1 e^{-\frac{\gamma t}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad \omega = A e^{-\frac{\beta t}{T}} \cos \frac{2\pi (t - \lambda)}{T}$$

dove T denota la durata della oscillazione e le espressioni esponenziali costituiscono dei *fattori di smorzamento* che noi potremo assumere nella forma data salvo ad esaminare poi la natura delle costanti β e γ .

Cominceremo dal vedere a quali condizioni debbono soddisfare i parametri β , γ , λ e T . Servirà a tal uopo la relazione generale:

$$-\frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{M_1}{J} e^{-\frac{\gamma t}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T},$$

in cui J denota il momento d'inerzia della massa oscillante. Sostituendo per ω il valore dato dalla seconda delle (1) si avrà:

$$(2) \quad A e^{-\frac{\beta t}{T}} \left\{ \frac{4\pi^2 - \beta^2}{T^2} \cos \frac{2\pi(t-\lambda)}{T} - \frac{4\pi\beta}{T^2} \sin \frac{2\pi(t-\lambda)}{T} \right\} = \frac{M_1}{J} e^{-\frac{\gamma t}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Una prima equazione si ottiene ponendo nella (2) $t = \lambda$. Risulta allora:

$$(3) \quad A e^{-\frac{\beta \lambda}{T}} \frac{4\pi^2 - \beta^2}{T^2} = \frac{M_1}{J} e^{-\frac{\gamma \lambda}{T}} \cos \frac{2\pi \lambda}{T},$$

da cui si ricava:

$$(4) \quad T = \sqrt{\frac{J A e^{-\frac{\beta \lambda}{T}} \frac{4\pi^2 - \beta^2}{T^2}}{\frac{M_1}{\cos \frac{2\pi \lambda}{T}} e^{-\frac{\gamma \lambda}{T}}}}$$

Se poi facciamo nella (2) $t = T + \lambda$ si ha:

$$A e^{-\frac{\beta \lambda}{T}} e^{-\beta} \frac{4\pi^2 - \beta^2}{T^2} = \frac{M_1}{J} e^{-\frac{\gamma \lambda}{T}} e^{-\gamma} \cos \frac{2\pi \lambda}{T},$$

la quale relazione non può coesistere colla (3) a meno che non si abbia:

$$(5) \quad \beta = \gamma.$$

Se infine si pone nella (3) $t = \frac{1}{4}$ avremo:

$$A e^{-\frac{\beta}{4}} \left(\frac{4\pi^2 - \beta^2}{T^2} \sin \frac{2\pi \lambda}{T} - \frac{4\pi\beta}{T^2} \cos \frac{2\pi \lambda}{T} \right) = 0,$$

da cui, attesa la piccolezza di β e λ :

$$(6) \quad \frac{2\pi \lambda}{T} = \frac{\beta}{\pi}.$$

Perveniamo così ad una relazione che lega la differenza di fase col decremento logaritmico β determinabile sperimentalmente.

Per la conoscenza di T non ostante la forma complicata della espressione fornita dalla (4), non occorrono in realtà che pochissimi elementi. Se ricaviamo infatti la elongazione massima avremo per essa:

$$(8) \quad \omega_1 = A \frac{4\pi^2 - \beta^2}{4\pi^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{8\pi^2} \right),$$

onde, tenute presenti le (4), (5), (6) ed (8) si otterrà con grande approssimazione:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J \omega_1}{M_1}} \left(1 + \frac{\beta^2}{16\pi^2} \right).$$

La nuova espressione di T differisce apparentemente da quella ammessa nella ipotesi che si abbiano reazioni elastiche proporzionali agli spostamenti delle particelle solo per la introduzione del fattore $\left(1 + \frac{\beta^2}{16\pi^2} \right)$, il quale fu trovato sempre per i diversi fili tanto vicino all'unità da rendersi superfluo il tenerne conto, ma deve notarsi che nel radicale invece del noto rapporto $\frac{\omega}{M}$ compare il valore di questa espressione che corrisponde ai massimi di ω e di M relativi alla oscillazione che si considera; onde risulta la durata T uguale a quella che si avrebbe ammettendo lungo il ciclo dinamico una legge di proporzionalità fra le ω e le M con una costante uguale ad $\frac{\omega_1}{M_1}$.

Non restano in tal modo eliminate tutte le difficoltà per la nostra verifica, poichè il valore di questo rapporto non può aversi direttamente dalle esperienze. È da pensare però che il corpo oscillando colle successive elongazioni tenda allo stato iniziale presso a poco per la stessa via che avrebbe seguito arrivando alla deformazione massima con una serie di cicli le cui ampiezze aumentino man mano, e poichè sappiamo essere in tal caso i cicli rappresentati da cappi i quali fanno capo alla curva che dà l'andamento della deformazione per forze crescenti con continuità, siamo indotti a ritenere che anco in un filo oscillante per forze elastiche le curve relative ai vari

cicli facciano capo alla stessa linea. Ed a conferma di un tal modo di vedere sta il fatto che in un filo sottoposto a cicli tra le forze estreme 24, — 22, 20, — 18, 16, — 14, 12 etc . . . , le deformazioni avute per le forze 20, 16, 12 coincidevano sensibilmente con quelle relative agli stessi carichi quando si andava direttamente da zero a 24.

Prima di venire alle applicazioni osserverò che il momento d'inerzia fu dedotto con sufficiente approssimazione mediante una serie di esperienze fatte con un filo di nichel crudo ed operando fra limiti di ampiezza assai ristretti. Noterò ancora che i valori di T corrispondenti alle varie elongazioni si poterono avere coll' approssimazione di circa 0",01. Per quanto in ultimo riguarda i valori di $\frac{g_1}{M_1}$ dirò che essi furono ricavati dall' esperienze col metodo statico in guisa da aversi per ciascuna serie grande esattezza nei risultati relativi.

Ciò bastava per la nostra verifica, che fu assai soddisfacente essendosi trovato che per ciascuna serie i valori di T dedotti dall' esperienza differivano da quelli calcolati per mezzo dell' ultima formula per una quantità quasi sempre piccola e, quel che più importa, sensibilmente costante.

INTRODUZIONE ALLA TEORIA MATEMATICA DELLA ELASTICITÀ per ERNESTO CESÀRO.

(Torino, Fratelli Bocca editori, 1894).

Recensione di BENEDETTO CALÒ, assistente nella R. Università di Torino.

È questo libro una guida eccellente per un primo studio della teoria matematica della elasticità; esso è improntato su opere principalmente italiane, e soprattutto del Betti, del Beltrami e del Cerruti. Lo rendono pregevole la chiarezza e l'ordine dell'esposizione, la molteplicità delle applicazioni e degli esempi, e varie utili considerazioni sui rapporti che passano fra molti punti di questa teoria ed altre teorie della fisica matematica e della geometria.