V. Zeichnungsmethode für triklinometrische Krystalle; vom Prof. C. Naumann in Freiberg.

Da es am bequemsten ist, bei der Zeichnung triklinometrischer Combinationen die Axenprojection des Tesseralsystemes zu Grunde zu legen, so muß ich von der Projectionsmethode des letzteren ausgehen.

Die eigentliche Aufgabe besteht darin, das Bild dreier gleicher, sich rechtwinklig schneidender Linien, für eine gegebene Stellung des Auges und der Projectionsofläche zu einander und zu den Linien selbst, zu entwerfen. Man stelle das Axensystem nach einer seiner Axen aufrecht, lege eine Ebene durch diese verticale Axe, und denke das Auge in dieser Ebene (welche ich die *Gesichtsebene* nennen will) in unendlicher Ferne *). Eine zweite, gleichfalls durch die verticale Axe gehende und auf der Gesichtsebene rechtwinklige Ebene soll uns zur *Projectionsofläche* dienen; die Ebene durch beide horizontale Axen heiße die *Horizontalebene* schlechtbin, und eben so der Durchschnitt derselben mit der Projectionsofläche die *Horizontallinie*.

Zuvörderst gebe man nun dem, um seine verticale Axe beweglichen, Axensystem eine solche Lage, daß die eine seiner horizontalen Axen in die Gesichtsebene fällt, und versetze das in derselben Ebene auf- und abwärts bewegliche Auge in die Horizontalebene. Dann sind es folgende zwei, willkürlich bestimmbare Elemente, von welchen die mehr oder weniger vortheilhafte Darstellung des Bildes abhängen wird.

1) Die Größe des Drehungswinkels, oder die *Declination* δ des Axensystemes aus der Normalstellung.

*) Diese Annahme ist nothwendig, damit die in der Wirklichkeit parallelen Kanten auch im Bilde parallel bleiben.

2) Die Größe des Erhebungswinkels, oder die *Elevation* ϵ des Auges über die Horizontalebene.

Beide Winkel müssen aber der Bequemlichkeit und Genauigkeit wegen so gewählt werden, daß die durch sie bedingte Projection keiner unmittelbaren Winkelconstructionen bedarf; und dazu bietet sich folgende Methode dar.

1) Man lasse das Auge in der Horizontalebene, und drehe das Axensystem so lange von der Rechten nach der Linken, bis die Projection der vorderen horizontalen Halbaxe gleich einem willkürlichen aliquoten Theile $= \frac{1}{r}$ der Projection der seitlichen horizontalen Halbaxe erscheint, und setze den dadurch bestimmten Declinationswinkel $= \delta$. Aus der Bedingung

$$\cos \delta = r \sin \delta$$

folgt sogleich

$$\cot \delta = r.$$

2) Hierauf erhebe man das, beständig in der Gesichtsebene verharrende, Auge über die Horizontalebene; sogleich werden die, bis jetzt in der Horizontallinie projecirten, Endpunkte der horizontalen Halbaxen im Bilde eine Abweichung *unter* oder *über* dieselbe erfahren. Die absolute Größe dieser Abweichung ist, wenn wir sie als Function des noch unbestimmten Winkels ϵ ausdrücken, für die vordere Halbaxe $= \cos \delta \tan \epsilon$, für die seitliche Halbaxe $= \sin \delta \tan \epsilon$. In dem Momente nun, da die Abweichung der vorderen Halbaxe genau gleich einem willkürlichen aliquoten Theile, $= \frac{1}{s}$ ihrer eigenen *ersten* Projection, fixire man das Auge; aus der Bedingung

$$\cos \delta \tan \epsilon = \frac{1}{s} \sin \delta$$

folgt sogleich

$$\cot \epsilon = r s$$

für den entsprechenden Elevationswinkel des Auges.

Auf die geschickte Wahl von r und s kommt nun Alles an. So lange es sich um Zeichnung orthometrischer Gestalten handelt, scheint die Bestimmung $r=s=3$ sehr vortheilhaft; doch kann der Fall eintreten, dafs namentlich für s ein kleinerer Werth (z. B. 2 oder $\frac{3}{2}$) zu empfehlen; ein Fall, welcher jederzeit stattfindet, wenn man die Axenprojection des Tesseralsystems der Zeichnung mono- und triklinometrischer Gestalten zu Grunde legt. Wie aber auch die Werthe von r und s gewählt werden mögen, immer bleibt, sobald nur r eine ganze Zahl ist, die allgemeine Ausführung der Projection folgende:

Aufgabe. Das tesserale Axensystem für die gegebene Breite $2b$ des Bildes, und für gegebene Werthe von r und s zu construiren.

Auflösung. Ziehe zwei sich rechtwinklig schneidende Linien, und trage in die eine als Horizontallinien beiderseits vom Durchschnittspunkte M die Länge $b=MI=MZ$, Fig. 5. Taf. V., theile hierauf die IIZ in $2r$ gleiche Theile, lege durch ihre End- und beiden mittelsten Theilpunkte Hilfsverticalen, und trage in die äußerste Verticale linker Hand*) abwärts von H die Länge $\frac{1}{s}b$, wodurch sich ein Punkt R bestimmt. Ziehe nun die RM , und verlängere sie jenseits M , so ist ihr zwischen den beiden mittleren Hilfsverticalen enthaltener Theil BB' die Projection der einen (vorderen) horizontalen Axe. — Ziehe hierauf durch B die Horizontale BS , und dann die SM , so bestimmt sich der Punkt T' in der ersten Hilfsverticale; von ihm aus ziehe wieder die Horizontale TC , aus C die CM und verlängere solche jenseits M , so ist ihr zwischen den beiden äußersten Hilfsverticalen enthaltener Theil

*) Da hier vorausgesetzt wird, die Drehung des Axensystems sey von Rechts nach Links erfolgt; im entgegengesetzten Falle ist die $\frac{1}{s}b$ in die äußerste Verticale rechter Hand einzutragen.

CC die Projection der andern (seitlichen) horizontalen Axe. — Endlich trage man in die äußerste Verticale rechter Hand von Z aus ab- oder aufwärts einen der Theile ZP , in welchen die HZ getheilt worden, verbinde den dadurch bestimmten Punkt Q mit M , nehme $MA=MA'=MQ$, so ist AA' die Projection der verticalen Axe.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction ist so leicht, daß ich ihn hier übergehen zu können glaube. Es ist dieß übrigens die allgemeinere Auflösung desselben Problems, welches von Haidinger nach einer etwas andern Methode *) in den *Mem. of the Werner. Soc.*, (d. Ann. Bd. 81. S. 507.) und von mir in der *Isis* unter der Voraussetzung von $r=s=3$ gelöst worden ist, in welchem Falle $\delta=18^\circ 26'$, und $\varepsilon=6^\circ 20'$. So wie jetzt die drei Axen im Bilde erscheinen, können sie nur erscheinen, wenn sie in der Wirklichkeit gleich groß und rechtwinklig sind. Für eine triklinometrische Krystallreihe aber sind die drei Axen a, b, c ungleich, und schneiden sich unter schiefen Winkeln α, β und γ . Will man also die Axenprojection des Tesseralsystems bei der Projection einer triklinometrischen Combination zu Grunde legen, so müssen die Neigungswinkel sowohl als die Größen, unter welchen die Axen im Bilde erscheinen, eine angemessene Veränderung erleiden. Dazu gelangt man leicht auf folgende Weise.

*) Die Haidinger'sche und Mohs'sche Construction unterscheidet sich wesentlich nur dadurch von der hier gegebenen, daß sie eine orthographische Projection voraussetzt; mir scheint es aber rathsamer, die Gesichtsstrahlen unter den Winkel $90^\circ - \varepsilon$ gegen die Projectionsfläche treffen zu lassen, weil dann die gezeichnete Gestalt vor dem aufrechtstehenden Beobachter gleichfalls aufrecht steht, und weil ihre auf dem Papiere erscheinende Höhe der wirklichen Höhe genau gleich ist. Uebrigens ist nichts leichter, als diese klinographische Projection in eine orthographische zu verwandeln; nur werden die Resultate beider wenig verschieden seyn, so lange ε nicht 10° übersteigt.

Zuvörderst suche man den Neigungswinkel A des makrodiagonalen und brachydiagonalen Hauptschnittes nach der bekannten Formel:

$$\cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

Weil nun in Tesseralsysteme die diesen beiden Hauptschnitten entsprechenden verticalen Hauptschnitte durch BB' und CC' rechte Winkel bilden, so fragt es sich, welcher derselben seine ursprüngliche Lage behaupten, und welcher sie verlassen soll, um den Winkel A herzustellen. In den meisten Fällen scheint es vortheilhafter, den auf den Beobachter zulaufenden, also durch die Axe BB' gehenden Hauptschnitt in unveränderter Lage zu lassen, und den durch die Axe CC' gehenden Hauptschnitt so weit zu drehen, als erforderlich ist, damit seine neue Projection dem wirklichen Neigungswinkel A entspreche. Zu dem Ende trage man die vierten Glieder der Proportionen

$$1 : \sin A = MC : x$$

$$\text{und } 1 : \cos A = MB : y$$

von M aus, jenes in die MC , dieses in die MB , vollende das Parallelogramm über x und y , und ziehe dessen Diagonale aus M , so ist diese Diagonale, welche ich MD nennen will, die Projection einer der MB gleichen, und gegen selbige unter dem Winkel A geneigten Horizontallinie, und folglich die Ebene durch MD und AA' der gesuchte verticale Hauptschnitt, welcher mit dem verticalen Hauptschnitte durch MB den verlangten Winkel bildet.

Allein, so wie sie jetzt im Bilde erscheinen, wird vorausgesetzt, daß die MA auf der MD sowohl als auf der MB noch rechtwinklig ist, während sie doch in der Wirklichkeit mit jener den Winkel β , mit dieser den Winkel γ bildet. Man suche also zu den Proportionen

$$1 : \sin \beta = MD : x'$$

$$1 : \cos \beta = MA : y'$$

die vierten Glieder, trage die Linien x' und y' von M aus in MD und MA , vollende das Parallelogramm über beiden Linien, und ziehe dessen Diagonale aus M , die ich ME nennen will, so ist ME die Richtung der Makrodiagonale; auf gleiche Weise suche man die vierten Glieder der Proportionen

$$1:\sin\gamma = MB:x''$$

$$1:\cos\gamma = MA:y''$$

trage wiederum die Linie x'' und y'' in die MB und MA , vollende das Parallelogramm, und ziehe dessen Diagonale MF , so ist MF die Richtung der Brachydiagonale für das gegebene Axensystem. So wie jetzt die drei Halbaxen MA , ME und MF im Bilde erscheinen, müssen sie erscheinen, wenn sie in der Wirklichkeit die Winkel α , β und γ bilden; allein noch ist außerdem in ihrer jetzigen Erscheinungsweise die Voraussetzung durchgängiger Gleichheit enthalten, während sie doch für die Grundgestalt der gegebenen Krystallreihe das Verhältniß $a:b:c$ haben. Man verwandle dieß in $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}:1$, lasse darauf der Brachydiagonale ihren ursprünglichen Werth MF , und trage in die Axe und Makrodiagonale nach den Verhältnissen

$$1:\frac{a}{c} = MA:x'''$$

$$1:\frac{b}{c} = ME:y'''$$

die Linien x''' und y''' ein, so erhält man zwei neue Punkte A' und E' als Endpunkte der gesuchten Halbaxen, und die drei Linien MA' , MF und ME' stellen das mit mathematischer Genauigkeit projecirte Axensystem der Grundgestalt für die gegebene Krystallreihe dar.

Als Beispiel gebe ich beifolgend die Darstellung von vier Combinationen des Kupfervitriols. In der zu Grunde gelegten Axenprojection des Tesseralsystemes wurden wie in Fig. 5. Taf. V. $r=3$, $s=\frac{3}{2}$, also $\delta=18^\circ 26'$ und

$\varepsilon = 12^\circ 32'$, gewählt; die Abmessungen der Grundgestalt sind dieselben, welche sich in dem von mir bearbeiteten mineralogischen Theile der Encyclopädie der speciellen Naturgeschichte (Berlin 1828), S. 257., finden, und nach Kupffer's Messungen berechnet wurden; also:

$$a:b:c = 1:1,815:1,027$$

$$\text{Winkel } a:b = 82^\circ 22\frac{1}{2}'$$

$$- \quad b:c = 77^\circ 37\frac{1}{2}'$$

$$- \quad c:a = 73^\circ 11'$$

woraus folgt Winkel $A = 79^\circ 19'$.

Die in den Combinationen, Fig. 6. 7. 8. 9. Taf. V., enthaltenen Theilgestalten sind, nach der a. a. O. befolgten Methode bezeichnet und geordnet, folgende:

H. R.	Brachyd. Z. R.	Brachyd. N. R.
OP = o	2P'2 = s	P'∞ = p
P' = P	2'P'2 = i	P'∞ = q
∞ P' = T	∞ P'2 = m	2 P'∞ = v
∞'P = M	∞ P'3 = a	2'P'∞ = w
Makrod. N. R.	3P'3 = x	∞ P'∞ = r
∞ P'∞ = n		

VI. *Krystallographische Notiz; vom Prof. C Naumann in Freiberg.*

In der hiesigen academischen Sammlung finden sich unter andern folgende interessante Combinationen des Kalkspathes.

I. — 2R $\frac{1}{2}$. — 2R. — 3R. Fig. 10. Taf. V.

Die Polkanten von — 2R $\frac{1}{2}$ sind $159^\circ 19'$ und $88^\circ 18\frac{1}{2}'$; approximative Messungen gaben mir 159° und 88° . Die Krystalle sind klein, glänzend, röthlichweifs bis röthlichgrau, in Drusen versammelt. Merkwürdig wird diese