intero in p , q , r di grado 1°, 2° e 3° diverso da quelli conosciuti e se il corpo rigido è soggetto alla gravità esiste un solo integrale razionale intero del 4° grado in p , q , r che è quello dato dalla Kowalevski ¹⁾.

EQUAZIONE CARATTERISTICA E CAPACITÀ TERMICHE DEL VAPOR D'ACQUA

Nota del Dott. MANAIRA ALBERTO.

R. Clausius, nella memoria che ha per titolo « Ueber die theoretische Bestimmung des Dampfdruckes und der Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit » ²⁾, stabilisce la formola seguente:

$$(1) \quad \frac{p}{RT} = \frac{1}{v-\alpha} - \frac{27(\alpha+\beta)}{89(v+\beta)^2}$$

che lega la pressione p , il volume v e la temperatura assoluta T di un corpo qualsiasi allo stato liquido od aeriforme. In essa R è il solito numero che compare nell'equazione dei gaz perfetti, — $(pv = RT)$ — α e β sono delle costanti da determinarsi e ϑ è una funzione pure indeterminata della temperatura T per la quale il Clausius medesimo propone la forma seguente:

$$(2) \quad \frac{1}{\vartheta} = \frac{a}{T^n} - b$$

1) La Kowalevski, nell'ultimo § della sua Memoria nel 12° vol. degli Acta matem., mostra che si può realizzare su di un modello un caso di rotazione di un corpo solido attorno ad un punto fisso nel quale sono soddisfatte tutte le condizioni richieste affinché esista l'integrale da lei determinato.

Ella trova che se con A_1 , B_1 , C_1 si indicano i momenti centrali d'inerzia dev'essere

$$A_1 = 2(B_1 - C_1) \quad , \quad B_1 > 2C_1.$$

Ma è bene qui osservare che a queste condizioni bisogna aggiungere ancora l'altra

$$B_1 < 3C_1$$

poichè dev'essere pure

$$A_1 + B_1 > C_1 \quad , \quad B_1 + C_1 > A_1 \quad , \quad C_1 + A_1 > B_1$$

per cui si può dire che scelto C_1 ad arbitrio deve prendersi

$$2C_1 < B_1 < 3C_1 \quad , \quad A_1 = 2(B_1 - C_1).$$

2) « Die Mechanische Wärmetheorie », — Dritter Band, Seite 214 — Abhandlung VI.

dove a , b ed n sono delle altre costanti da determinare.

Io mi sono proposto di calcolare i coefficienti delle formole che precedono per l'acqua. Seguendo il metodo esposto nella già citata memoria e basandomi precipuamente sulle determinazioni sperimentali del prof. Angelo Battelli ¹⁾, vale a dire assumendo per la pressione critica e per la temperatura critica assoluta dell'acqua i valori:

$$P_c = \text{atmosfere} \quad 194,61$$

$$T_c = \text{gradi centigradi} \quad 637,3$$

ho trovato:

$$(3) \quad \begin{cases} a = 5467,15 \\ b = 0,71159 \\ n = 1,24962 \end{cases}$$

sicchè la funzione $\frac{1}{\vartheta}$ per l'acqua è la seguente:

$$(4) \quad \frac{1}{\vartheta} = \frac{5467,15}{T^{1,24962}} - 0,71159$$

Per mezzo della formola (4) e di una tabella calcolata dal Clausius nella quale, di fronte ai valori di ϑ , sono dati i valori del rapporto $\frac{PT_c}{P_c T}$, dove P è la tensione massima del vapore alla temperatura T , ho calcolato le tensioni del vapor saturo a diverse temperature. Ho riunito i risultati ottenuti nella colonna P_{calc} della Tabella I; pel confronto ho poi aggiunto altre tre colonne P_B , P_R e P_{CC} contenenti le pressioni massime del vapor d'acqua direttamente osservate dal Battelli, da Regnault e da Cailletet e Colardeau, esprimendo tutte queste pressioni in millimetri di mercurio e le temperature t in gradi centigradi.

1) Angelo Battelli — Sulle proprietà termiche dei vapori — Parte II, pag. 54.

TABELLA I.

t	P_{calc}	P_B	P_R	P_{cc}	t	P_{calc}	P_B	P_R	P_{cc}
0	4,41	4,41	4,57	—	120	1496,48	1503,44	1491,28	—
10	8,78	8,84	9,13	—	140	2725,09	2724,98	2717,63	—
20	17,11	16,87	17,36	—	160	4664,53	4633,91	4651,62	—
30	31,33	30,75	31,51	—	180	7567,39	7494,51	7546,39	—
40	54,08	53,23	54,87	—	200	11735,55	11625,00	11689,00	11680,00
50	91,89	90,45	91,98	—	225	19246,24	19123,76		19076,00
60	148,27	143,50	148,88	—	250	30037,65	29951,49		29792,00
70	233,34	230,84	233,31	—	275	44956,68	46815,82		45144,00
80	354,51	352,37	354,87	—	300	64986,21	67620,03		65512,00
90	527,07	523,74	525,47	—	325	91208,68	94111,74		92416,00
100	760,00	760,00	760,00	—	350	124825,76	126923,91		127300,00
					364,3	147900,00	147900,00		152380,00

Proseguendo nel calcolo, ho determinato i valori delle rimanenti costanti ed ho trovato:

$$R = 47,05$$

$$\gamma = \alpha + \beta = 0,0018635$$

$$\alpha = 0,000842156$$

$$\beta = 0,001021344$$

Osservando poi che, in virtù della (2), la formula (1) si può scrivere più semplicemente come segue:

$$(5) \quad \frac{p}{RT} = \frac{1}{v-\alpha} - \frac{AT^{-n}-B}{(v+\beta)^2}$$

purchè si ponga:

$$A = \frac{27\gamma}{8} a$$

$$B = \frac{27\gamma}{8} b$$

e che pei valori già trovati di a , b e γ risulta ancora:

$$A = 34,38$$

$$B = 0,004475$$

si ottiene in fine facilmente:

$$(6) \quad \frac{p}{47,05T} = \frac{1}{v - 0,000842156} - \frac{34,38T^{-1,24962} - 0,004465}{(v + 0,001021344)^2}$$

che è la formula che lega pressione, volume e temperatura assoluta dell' acqua sia allo stato liquido che a quello di vapore.

La (6) permette di calcolare la pressione di un volume qualunque di vapor d' acqua ad una data temperatura: io ho fatto questo calcolo sostituendo nella (6) parecchi volumi di vapore direttamente osservati dal Battelli nonchè le corrispondenti temperature assolute: nella colonna t della Tabella II sono segnate le temperature centigrade, nella v i volumi, nella P_{calc} le pressioni calcolate colla (6) e nella P_B le pressioni direttamente osservate dal Battelli.

TABELLA II.

t	v	P_{calc}	$P_{Battelli}$	t	v	P_{calc}	$P_{Batt.}$
— 6,16	426,153	2,17	2,16	+ 14,91	139,941	7,12	7,12
— 6,16	327,246	2,82	2,80	+ 14,91	80,3114	12,40	12,34
+ 1,32	315,662	3,00	3,01	+ 21,05	130,584	7,68	7,65
+ 1,32	197,853	4,80	4,77	+ 21,05	55,7464	18,00	18,07
+ 6,24	233,351	4,14	4,14	+ 27,15	114,725	9,05	8,98
+ 6,24	139,832	6,90	6,87	+ 27,15	39,5342	26,26	25,96
+ 9,72	203,452	4,81	4,81	+ 57,01	58,3353	19,57	19,48
+ 9,72	112,283	8,71	8,66	+ 57,01	8,73890	130,69	129,14

Continua la TABELLA II.

<i>t</i>	<i>v</i>	P _{calc}	P _{Battelli}	<i>t</i>	<i>v</i>	P _{calc}	P _{Batt.}
+ 78,52	17,8159	68,07	67,57	+ 231,41	1,621374	1070,5	1061,4
+ 78,52	3,63241	333,28	330,78	+ 231,41	0,072415	21170,9	21272,1
+ 99,60	7,98645	161,03	159,61	+ 311,2	0,021206	68486	70376
+ 99,60	1,69046	753,85	749,12	+ 311,2	0,015342	82611	79504
+ 130,32	3,897423	356,8	352,9	+ 333,6	0,021114	73677	74831
+ 130,32	0,661534	2075,7	2060,1	+ 333,6	0,009120	111245	105015
+ 144,21	3,620412	397,4	393,3	+ 358,7	0,018314	87649	87695
+ 144,21	0,457233	3069,0	3061,9	+ 358,7	0,005245	139736	139116
+ 182,90	2,204262	712,2	708,7	+ 361,9	0,015394	99294	99164
+ 182,90	0,187022	7939,5	7971,4	+ 361,9	0,005042	144225	143471
+ 202,21	1,725812	947,3	943,6	+ 363,1	0,009314	129718	130034
+ 202,21	0,125372	12069,8	12181,1	+ 363,1	0,004916	146045	146688

Finalmente, sempre coll'uso della formola (4) e di certe tabelle calcolate dal Clausius nelle quali in corrispondenza dei valori di ϑ sono dati i valori dei rapporti $\frac{s-\alpha}{2\gamma}$ e $\frac{\sigma-\alpha}{2\gamma}$, dove s e σ sono, rispettivamente, i volumi del vapor d'acqua e del liquido sotto la pressione massima P , si può per una qualsiasi temperatura calcolare il volume del vapore e del liquido sotto la pressione del vapor saturo: nella colonna s_c della Tabella III, ho trascritto i volumi così calcolati del vapor d'acqua alle temperature centigrade date nella colonna t : le colonne s_z e s_r contengono gli stessi volumi calcolati però con formole empiriche da Zeuner e dal Roiti rispettivamente; la s_e contiene i volumi stessi direttamente osservati da Fairbairn e Tate. Finalmente la σ contiene i volumi del liquido.

TABELLA III.

<i>t</i>	s_c	s_z	s_r	s_e	σ
20	61,4369	—	—	—	0,00101536
40	20,0357	—	—	—	0,00103750
58,20	8,5238	8,1639	8,38	8,2750	—
60	7,8522	7,7160	—	—	0,00106190
68,51	5,4378	5,4039	5,41	5,3340	—
70,75	4,9880	4,9438	4,95	4,9208	—
79,40	3,5401	3,4602	3,52	3,4330	—

Continua la TABELLA III.

t	S_C	S_Z	S_R	S_E	σ
80	3,4539	3,3275	—	—	0,00108889
92,65	2,1688	2,1230	2,18	2,1500	—
100	1,6822	1,6504	—	—	0,001118937
120	0,8997	0,8834	—	—	0,001152576
124,16	0,7908	0,7757	0,809	0,7593	—
130,67	0,6898	0,6438	0,674	0,6355	—
134,86	0,5868	0,5720	0,602	0,5849	—
139,21	0,5201	0,5099	0,537	0,4980	—
140	0,5046	0,4981	—	—	0,001190511
144,74	0,4518	0,4409	0,466	0,4512	—
160	0,30984	0,30750	—	—	0,001233677
180	0,19594	0,19112	—	—	0,001283284
200	0,12871	0,13744	—	—	0,001340903

Le formole precedenti possono essere impiegate utilmente nella *ricerca delle capacità termiche del vapor d'acqua* seguendo un metodo dovuto al prof. Morera ¹⁾.

Partendo dall'ipotesi che l'equazione caratteristica del vapore sia:

$$(7) \quad p = \frac{RT}{v-x} - \frac{\phi(T)}{(v+\beta)^2}$$

dove $\phi(T)$ è una funzione della temperatura e ritenendo che la (7) valga fino allo stato di saturazione, si ammetta che il vapore infinitamente sopra riscaldato abbia costanti le capacità termiche ρ e ξ a pressione e volume costante: allora misurandole in unità di calore, e dicendo I l'equivalente dinamico dell'unità di calore, si avrà:

$$(8) \quad \rho = \xi + \frac{R}{I}$$

Detta poi C_v la capacità termica del vapore a volume costante, il prof. Morera ha per essa ottenuto l'espressione seguente:

$$(9) \quad C_v = \xi + \frac{T\phi''(T)}{I(v+\beta)}$$

1) Giacinto Morera — Studi di termodinamica, Nota II, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. 7, Anno 1891; Secondo semestre, Fascicolo 4°.

e quindi, in virtù delle formole fondamentali della termodinamica, si avrà anche:

$$(10) \quad C_p - C_v = \frac{\left\{ \frac{R}{r-\alpha} - \frac{\Phi'(T)}{(r+\beta)^2} \right\}^2}{1 - \left\{ \frac{R}{(r-\alpha)^2} - \frac{2\Phi'(T)}{T(r+\beta)^3} \right\}}$$

quando con C_p si indichi la capacità termica del vapore a pressione costante;

Ora è chiaro che se fosse conosciuta la ξ , le formole (9) e (10) darebbero il modo di calcolare i valori di C_p e C_v . La determinazione della ξ si può fare in base alla seguente formola, pure ottenuta dal prof. Morera.

$$(11) \quad \xi \log T = \int_{273}^T \frac{CdT}{T} - \frac{1}{1} \left\{ R \log(\sigma - \alpha) + \frac{\Phi'(T)}{\sigma + \beta} \right\} + \Xi$$

nella quale Ξ è una costante d'integrazione, e C è la capacità termica dell'acqua in ebollizione.

Notando poi che nel caso attuale si deve prendere:

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= RT (AT^{-n} - B) \\ \Phi'(T) &= R [AT^{-n} (1-n) - B] \end{aligned}$$

ricordando i valori già trovati di R , A , B , α , β ed n ed infine assumendo:

$$I = 425 \quad C = 1 + 0,00004 (T-273) + 0,0000009 (T-273)^2$$

e sostituendo nella (11) tutti questi valori, è manifesto che si possono ottenere tante equazioni quante si vogliono tra ξ e Ξ , che è pure sconosciuta. Io ho stabilito 10 di queste equazioni, le quali, opportunamente combinate, mi hanno fornito il valor medio:

$$(12) \quad \xi = 0,2831$$

e quindi, in virtù della (8),

$$(13) \quad \rho = 0,3938$$

Veramente questo valore di ρ è di molto inferiore a quello sperimentalmente ottenuto da Regnault, che trovò $\rho = 0,475$: esso però risulta assai maggiore di quello che si ottiene quando si applichi al vapor d'acqua la formola dei gaz perfetti, che allora risulta $\rho = 0,305$. D'altra parte dalle (12) e (13) si ricava:

$$\frac{\rho}{\xi} = 1,39$$

valore che si accorda abbastanza bene col numero 1,41 che risulta dall'esperienza pel rapporto stesso.

Inoltre, detta Δ la densità del vapor d'acqua allo stato di gaz perfetto, e assunto quindi $\Delta = 0,00080449$, è noto che moltiplicando ρ e ξ per Δ si ottengono le capacità termiche del vapor d'acqua a pressione e volume costante riferite ai volumi anzichè ai pesi, capacità termiche che risultano approssimativamente uguali per tutti i gaz.

Dicendole ω_p ed ω_v si ha nel caso attuale:

$$\omega_p = 0,000316808 \quad \omega_v = 0,000227751$$

Questi valori si accordano bene con quelli degli altri gaz, poichè si ha per esempio:

Per l' Aria	$\omega_p = 0,00030714$	$\omega_v = 0,00021786$
» l' Azoto	$\omega_p = 0,00030625$	$\omega_v = 0,00021697$
» l' Ossigeno	$\omega_p = 0,00031099$	$\omega_v = 0,00022171$
» l' Idrogeno	$\omega_p = 0,00030533$	$\omega_v = 0,00021605$

Ora che è nota la costante ξ si possono, per mezzo delle formole (9) e (10), calcolare quanti valori si vuole di C_v e C_p ; ho fatto questo calcolo pel vapore saturo a diverse temperature da 20° a 200° centigradi: i risultati sono riuniti nella Tabella IV.

TABELLA IV.

t	C_v	C_p	t	C_v	C_p	t	C_v	C_p
20	0,283116	0,393941	80	0,283325	0,395849	140	0,284364	0,405762
40	0,283145	0,394111	100	0,283531	0,396838	160	0,285038	0,412606
60	0,283207	0,394750	120	0,283855	0,400810	180	0,285991	0,422850
						200	0,287258	0,437616

I risultati del calcolo diversificano, veramente, in modo piuttosto sensibile da quelli sperimentalmente ottenuti da Regnault: infatti egli ha trovato come valore di C_p tra i 128° e i 217° il numero 0,48051, mentre dal calcolo si rileva che a 200° è $C_p = 0,437616$. Però furono fatte altre determinazioni delle capacità termiche del vapor d'acqua, assai più recenti di quelle di Regnault; tra l'altre I. Mac-Farlane Gray ha ottenuto $C_p = 0,3787$ tra 100° e 125° : questo numero si accorda abbastanza bene coi risultati del calcolo, tanto più se si tiene conto del fatto che i numeri della Tabella IV corrispondono all'ipotesi che il vapor d'acqua sia infinitamente prossimo allo stato di saturazione, mentre è ben certo che il sig. Gray non avrà fatto le sue esperienze in prossimità del punto di condensazione del vapore.

Si può, in ultimo, notare che alla temperatura di 94° centigradi il sig. Jaeger ha sperimentalmente ottenuto:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1,33$$

e che dai numeri della Tabella IV si rileva che tra 80° e 100° si ha:

$$\frac{C_p}{C_v} = 1,39$$

numero che si accorda assai bene col precedente.

DI DUE METODI GRAFICI PER LA NUMERAZIONE DEI BATTIMENTI

E DI UNA CAPSULA MICROFONICA

Dottor FILIPPO CAMPANILE.

(Sunto di una Nota pubblicata negli Atti della R. Acc. delle Sc. fis. e mat. di Napoli, Vol. VII, Serie II, Num. 4 — 1894).

L'A. vista l'importanza che può avere la esatta conoscenza del numero di battimenti prodotti da due suoni, ha studiato la quistione allo scopo di trovare, eliminando l'apprezzamento ad orecchio, dei metodi atti a determinare con esattezza il numero dei battimenti, sieno essi rapidi, sieno essi lenti.