VIII. *Beobachtungen von Adolf Rosencranz über den Einfluss der Temperatur auf die innere Reibung von Flüssigkeiten; mitgetheilt von Oskar Emil Meyer.*

I. Poiseuille's Versuche mit Wasser.

Die Versuche, welche Poiseuille¹⁾ über die Bewegung des Wassers in engen Röhren angestellt hat, bilden freilich das genaueste und zuverlässigste Mittel, den Werth des Reibungscoefficienten des Wassers zu bestimmen; doch besitzt die Formel, die Poiseuille aus der Gesammtheit seiner Beobachtungen abgeleitet hat, für diesen Zweck nicht die geeignetste Gestalt. Jene Formel bestimmt nämlich die Wassermenge, welche durch eine Röhre in einer Secunde hindurchfließt, durch ihr Gewicht. Dagegen führt die Theorie der Reibung zu einer Formel für das Volumen der ausgeflossenen Wassermasse. Dieser meistens unerhebliche Unterschied macht sich in unbequemer Weise fühlbar, wenn es sich darum handelt, den Werth des Reibungscoefficienten als Function der Temperatur, namentlich für höhere Wärmegrade zu berechnen, weil die Dichtigkeit und somit das Gewicht eines bestimmten Wasservolumens sich mit der Temperatur, und zwar nach einem keineswegs einfachen Gesetze, verändert. Ich habe deshalb aus den Poiseuille'schen Versuchen eine neue, von der bekannten etwas abweichende Formel hergeleitet, deren Begründung ich vorausschicken will.

2. Nach der Theorie der inneren Reibung wird das Volumen Flüssigkeit, welches in der Zeit t unter dem Drucke p durch eine Capillarröhre von der Länge L und dem Durchmesser D ausfließt, durch die Formel:

1) Mém. des Sav. étrang. Paris. IX. 1846; Auszug in C. R. XV. p. 1167. 1842; Ann. d. chim. et phys. (3) VII. p. 50. 1843; Pogg. Ann. LVIII. p. 424. 1843.

$$V = \frac{\pi}{2^7} \cdot \frac{p}{\eta} \frac{D^4}{L} t$$

angegeben, wenn η der Reibungscoefficient der Flüssigkeit ist. Hieraus erhalten wir das Gewicht durch Multiplication mit dem Gewichte der Volumeneinheit, welches gleich der Dichtigkeit ρ ist; demnach ist das in der Zeiteinheit, etwa in einer Secunde ausfliessende Gewicht Flüssigkeit:

$$Q = \frac{\pi}{2^7} \frac{\rho}{\eta} p \frac{D^4}{L}.$$

Aus Poiseuille's Versuchen ergibt sich für dieselbe Grösse der Werth:

$$Q = 1836.7 (1 + 0.03368 T + 0.0002210 T^2) \frac{P D^4}{L};$$

dessen Zahlenfactor Milligramm und Millimeter als gewählte Einheiten voraussetzt, während T die mit dem hunderttheiligen Thermometer gemessene Temperatur und P die durch eine Quecksilbersäule von 10^0 bestimmte Druckhöhe bedeutet. Da die letztere in einfachster Weise den Druck p , der in jener theoretischen Formel als Kraft aufgefasst ist, bestimmt, so genügt die Gleichsetzung beider Formeln, um den Werth des Verhältnisses $\frac{\eta}{\rho}$, welches man als Reibungsindex zu bezeichnen pflegt, in absolutem Maasse zu berechnen.

Wir bemerken also, dass Poiseuille's Formel nicht den eigentlichen Reibungscoefficienten η , sondern den Reibungsindex liefert, aus welchem wir durch Multiplication mit der Dichtigkeit ρ den Reibungscoefficienten selbst erhalten.

Nun aber hat Poiseuille ursprünglich gar nicht das ausgeflossene Wasser bei jedem einzelnen Versuche gewogen, sondern er hat die Zeit t beobachtet, welche vergeht, bis ein gewisses Volumen ausgeflossen ist; und er hat erst aus dieser durch Benutzung der anderweitig gemessenen Werthe der Dichtigkeit das Gewicht berechnet. Da somit in die Berechnung des Reibungscoefficienten eine unnöthige Weitläufigkeit gebracht ist, durch

welche die Genauigkeit nur leiden kann, so habe ich den geraderen Weg vorgezogen, dass ich aus den beobachteten Ausflusszeiten die Werthe des Reibungscoefficienten berechnet und dann versucht habe, dieselben durch eine Interpolationsformel als Function der Temperatur darzustellen.

3. Ehe ich diese Rechnungen mittheile, möchte ich mir einige Bemerkungen über die Wahl der Einheiten gestatten, auf welche die berechneten Werthe des Coefficienten zu beziehen sind. Es herrscht in dieser Hinsicht nicht bei allen Physikern der gleiche Gebrauch. Dies ist um so mehr zu bedauern, als die auf verschiedene Einheiten bezogenen Werthe trotz ihrer verschiedenen Bedeutung wegen der Aehnlichkeit ihrer Ziffern sehr leicht zu Verwechselungen Anlass bieten können.

Die im Anfange dieser Abhandlung erwähnte Formel für das ausfliessende Volumen lässt unmittelbar erkennen, dass der Reibungscoefficient als eine einem Drucke äquivalente Grösse aufgefasst werden darf. Denn da V und das rechterhand vorkommende Verhältniss $D^4 : L$ Grössen gleicher räumlicher Dimensionen sind, so müssen auch p und η gleiche Maasse enthalten, und es muss der Zahlenwerth von η durch die Einheiten bestimmt sein, in welchen wir den Werth des Druckes einführen.

Das bequemste Verfahren bestände unbedingt darin, den Druck durch eine Wassersäule zu messen, deren Höhe ihrem Zahlenwerthe nach dem Gewichte in Grammen gleich ist, welches auf der Fläche eines Quadratcentimeters lastet. Man würde η in denselben Einheiten finden, wenn man in der theoretischen Formel den Druck p nach der Gleichung:

$$p = 13.577 \cdot P$$

durch die von Poiseuille gemessene Angabe P eines mit Quecksilber von 10° , also von dem specifischen Gewichte 13.577 gefüllten Manometers ersetzte.

Aber diese bequeme und daher häufig benutzte Art der Berechnung leidet erstens an dem Fehler, dass die

gewählte Einheit von der Lage des Beobachtungsortes abhängig ist; denn die Schwerkraft und somit der Druck, welchen ein Milligramm ausübt, ist mit dem Orte veränderlich. Die berechneten Zahlenwerthe der Reibung würden also streng genommen keine universelle Bedeutung beanspruchen dürfen, und insbesondere würden die Zahlen welche man aus Poiseuille's in Paris angestellten Beobachtungen auf diese Weise herleiten würde, für deutsche Beobachter nicht ganz ohne Fehler anwendbar sein.

Dazu kommt das wichtigere Bedenken, dass der Reibungscoefficient in aller Strenge gar kein Druck ist, wenn es auch wohl statthaft ist, ihn, wie wir gethan haben, als eine damit verwandte oder äquivalente Grösse aufzufassen. Denn, wenn wir in der oben angeführten Formel nicht blos die räumlichen Dimensionen, sondern auch die Zeitmaasse berücksichtigen, so erkennen wir, dass die Formel nur dann homogen in ihren Gliedern sein kann, wenn η und p sich um einen mit der Wahl der Zeiteinheit veränderlichen Factor unterscheiden. Der Reibungscoefficient ist also kein Druck, sondern er enthält nur dieselben Längen- oder räumlichen Maasse.

Aus diesen Gründen ist es, wie ich auch in früheren Abhandlungen stets gethan, zu empfehlen, dass wir für Druck und Reibung absolute Einheiten einführen, indem wir die Formel für den Druck:

$$p = 13.577 \cdot Pg$$

durch Hinzufügung der beschleunigenden Kraft g der Schwere vervollständigen, für welche im vorliegenden Falle der für Paris geltende Werth:

$$g = 9.808 \text{ M.}$$

einzuführen ist. Da somit die Druckkraft p , von den Einheiten der specifischen Gewichte und der Zeit abgesehen, nur durch Längenmaasse bestimmt wird, so kann auch der aus der Rechnung hervorgehende Werth des Reibungscoefficienten nur von diesen, jedoch nicht mehr von der willkürlichen Wahl einer Krafteinheit abhängen. Man

findet auf diese Weise η wie p ausgedrückt durch das Quadrat einer Länge.

Als Beispiele dieser verschiedenen Art der Berechnung, und zugleich des späteren Vergleiches wegen, führe ich einige ebenfalls aus der Poiseuille'schen hergeleitete Formeln für den Reibungsindex an. Helmholtz¹⁾ bezieht den Werth auf Quadratmillimeter und findet:

$$\frac{\eta}{\rho} = \frac{1.7780}{1 + 0.03368 T + 0.0002210 T^2};$$

dagegen gibt Stefan²⁾ die Formel:

$$\frac{\eta}{\rho} = \frac{0.00018168}{1 + 0.03368 T + 0.0002210 T^2},$$

welche η als einen auf die Fläche eines Quadratmillimeters ausgeübten Druck in Milligrammen angibt. Ersetzt man in beiden Formeln das Quadratmillimeter durch die Fläche eines Quadratcentimeters, so werden sie einander so nahe gleich, dass eine Verwechselung nahe liegt; nach Helmholtz wäre dann für $T=0$:

$$\eta = 0.017780 \cdot \rho,$$

nach Stefan:

$$\eta = 0.018168 \cdot \rho.$$

Jedoch sind beide Werthe nicht genau gleich, sondern sie verhalten sich wie 981 : 1000.

Ich werde hier, wie in meinen früheren Abhandlungen, dem Beispiele von Helmholtz folgen und η auf das Quadrat einer Länge beziehen; jedoch wähle ich nicht das Quadratmillimeter, sondern das Quadratcentimeter zur Flächeneinheit. Dann stellen die Zahlen angenähert, strenger nach Division durch 0.981, η als Druck in Milligrammen auf ein Quadratcentimeter Fläche dar.

4. Zur Berechnung der in den folgenden Tabellen

1) Wien. Ber. XL. p. 654. 1860.

2) Wien. Ber. XLVI. p. 504. 1862. Stefan lässt den Factor ρ fort und begeht das zweite hier nicht berichtigte Versehen, die Temperatur des Quecksilbers im Manometer = 0^0 zu setzen.

aufgeführten Werthe des Reibungscoefficienten habe ich diejenigen Beobachtungen benutzt, welche Poiseuille am Schlusse seiner grösseren Abhandlung¹⁾ zusammenstellt. Dieselben sind mit vier verschiedenen Röhren und Apparaten angestellt, deren Dimensionen ich in Centimetermaass anführe. Die Ausflusszeiten sind bereits von Poiseuille auf den Druck von 776 Mm. Quecksilber umgerechnet worden.

Röhre A.			Röhre C.		
$L=10.05$	$D=0.0141125$	$V=13.34085$	$L=10.0325$	$D=0.0085$	$V=2.1057$
T^0	t''	η	T^0	t''	η
0.6	2322.6	0.017429	0.5	2809.7	0.017609
5.0	2018.5	15146	5.0	2416.65	15146
10.0	1744.2	13089	6.0	2352.95	14747
15.0	1523.3	11431	10.0	2088.2	13088
20.0	1342.9	10077	15.2	1821.45	11416
25.0	1193.3	08954	20.0	1608.8	10083
30.1	1066.2	08001	25.1	1425.4	08933
35.1	960.3	07206	30.1	1278.0	08010
40.1	869.65	06526	35.1	1147.4	07191
45.0	792.05	05943	40.1	1040.7	06523
			45.1	947.4	05938

Röhre D'.			Röhre E.		
$L=5.0225$	$D=0.00440406$	$V=0.3629$	$L=2.31$	$D=0.002938$	$V=0.125$
T^0	t''	η	T^0	t''	η
5.00	2894.35	0.015151	0.50	2697.4	0.017654
10.00	2501.5	13095	5.00	2314.8	15150
15.00	2191.3	11470	10.00	2000.9	13096
20.00	1923.3	10068	15.00	1751.6	11464
25.05	1711.6	08960	20.00	1542.2	10094
30.07	1529.25	08005	25.10	1368.85	08959
35.00	1374.5	07195	30.05	1226.1	08025
40.00	1244.3	06513	35.07	1100.5	07202
45.10	1135.2	05942	40.10	996.9	06525
			45.00	907.15	05937

1) Im Art. 144. Mém. des Sav. étr. IX. p. 527—529.

Um den Grad der Uebereinstimmung zu zeigen, vereinige ich diese Werthe noch einmal zu folgender Zusammenstellung, in welcher dieselben, wo es nöthig war, durch lineare Interpolation auf gleiche Temperaturen reducirt sind.

<i>T</i>	Röhre <i>A.</i>	<i>C.</i>	<i>D.</i>	<i>E.</i>	Mittel.
0.5		0.017609		0.017654	0.017631
0.6	0.017429				17429
5.0	15146	15146	0.015151	15150	15148
6.0		14747			14747
10.0	13089	13088	13095	13096	13092
15.0	11431	11480	11470	11464	11461
20.0	10077	10083	10068	10094	10080
25.0	08954	08955	08971	08981	08965
30.0	08020	08028	08018	08034	08025
35.0	07222	07207	07195	07213	07209
40.0	06540	06536	06513	06538	06532
45.0	05943	05950	05953	05937	05946

5. Bildet man die Differenzen der Werthe von η für je 5° Temperaturunterschied und von diesen wieder die Differenzen, so überzeugt man sich durch die Regelmässigkeit ihres Abnehmens leicht, dass η nicht eine Function zweiten oder dritten Grades von T sein kann. Verfährt man dagegen ebenso mit den reciproken Werthen, so findet man die zweiten Differenzen schon ziemlich genau constant, wonach zu erwarten steht, dass die von Poiseuille benutzte Formel auch jetzt in der Gestalt:

$$\frac{1}{\eta} = a + bT + cT^2$$

sich bewähren wird. Aus dem Mittelwerthe der zweiten Differenzen findet man:

$$5^2 \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 0.6865;$$

unter Benutzung dieses Werthes erhält man, wiederum durch Bildung erster Differenzen, für b Werthe, welche sich höchstens um ± 0.2 von dem Mittelwerthe:

$$5b = 9.337$$

entfernen. Dies führt endlich zur Kenntniss von a ; die erhaltenen Werthe unterscheiden sich um nicht mehr als ± 0.2 von dem Mittelwerthe:

$$a = 56.335.$$

Hiernach ergibt sich, dass der Reibungscoefficient selbst sich durch die Formel:

$$\eta = \frac{0.01775}{1 + 0.03315 T + 0.0002437 T^2}$$

darstellen lassen muss. Die Richtigkeit dieser Erwartung wird durch die Zusammenstellung von folgenden, nach der Formel berechneten mit den beobachteten Werthen bewiesen.

T	beobachtet.	berechnet.	Unterschied.
0.5	0.017631	0.017461	+ 170
0.6	17429	17403	+ 26
5	15148	15148	0
6	14747	14699	+ 48
10	13092	13092	0
15	11461	11437	+ 24
20	10080	10083	— 3
25	08965	08961	+ 4
30	08025	08018	+ 7
35	07209	07219	— 10
40	06532	06536	— 4
45	05946	05946	0

Die Formel unterscheidet sich von derjenigen, welche Helmholtz aus der Poiseuille'schen hergeleitet hat, einerseits durch etwas andere Zahlenwerthe, andererseits durch das Fehlen der Grösse ϱ , deren Werth bei 45° um etwa 1 Procent von 1 verschieden ist. Ich halte die neue Formel für besser begründet als die ältere, weil die Form der Function bei der gegebenen Herleitung nicht als willkürlich gewählt erscheint, während Poiseuille nur die 3 bei 5° , 25° und 45° angestellten Beobachtungen benutzt, um die Werthe der drei Coefficienten der ohne zwingenden Grund angenommenen Function zweiten Grades zu bestimmen.

Vielleicht ist es deshalb auch kein blosser Zufall, wenn die beiden im Nenner der neuen Formel vorkommenden Coefficienten in einer einfachen Beziehung zu einander stehen; die Formel lässt sich auch schreiben:

$$\eta = \frac{0.01775}{1 + 3 \sqrt{0.01104 T + 2(0.01104 T)^2}},$$

oder:

$$\eta = \frac{0.01775}{(1 + 0.01104 T)(1 + 2 \cdot 0.01104 T)}.$$

II. Rosencranz' Versuche mit Wasser.

6. Obwohl die Formel sich den Beobachtungen Poiseuille's sehr genau anschliesst, so darf sie doch noch nicht mit Sicherheit als Ausdruck eines erfahrungsmässig festgestellten wirklichen Naturgesetzes gelten; denn das Temperaturintervall, welches Poiseuille's Versuche umfassen, ist viel zu eng, als dass aus ihnen ein allgemeines Gesetz bewiesen werden könnte. Aus diesem Grunde hat der verstorbene Stud. Adolf Rosencranz¹⁾ im physikalischen Cabinet der Universität Breslau eine Reihe von Versuchen in der Absicht angestellt, die Reibungsconstante des Wassers bei Temperaturen über 45° zu bestimmen.

Zu diesen Versuchen, deren Resultate ich hier mittheilen will, diente ein dem Poiseuille'schen und auch dem Wiedemann'schen ähnlicher Apparat, welcher in zehnmal verkleinerter Grösse seinen wesentlichen Theilen nach in Taf. V Fig. 4 abgebildet ist. Das Wasser oder die Flüssigkeit, welche durch die Capillare *aa* ausfliessen soll, befindet sich zu Anfange des Versuches in dem Glasgefässe *b*, welches oben und unten mit je einer Marke, *c* und *d*, versehen ist. Dieses, aus einer Pipette von ungefähr 100 Cc. Inhalt bestehende Gefäss ist unten an ein horizontal liegendes Glasrohr angeschmolzen, in welches die Capillarröhre mittelst eines nicht geschwefelten Kautschukschlauches eingesteckt ist. Der ebenfalls angeschmol-

1) Geb. zu Rogasen, Prov. Posen, 1853 Febr. 11; gest. zu Breslau 1877 Febr. 14/15.

zene Glashahn *e* dient sowohl zur Entleerung, als auch zur Füllung des Apparats mit der zu prüfenden Flüssigkeit.

Der übrige Theil des Apparates hat theils den Zweck, den Druck zu reguliren, theils ihn zu messen. Mit dem Gefässe *b* steht eine Woulff'sche Flasche *f* in Verbindung, von welcher ein Glasrohr mit Hahn *g* und weiter ein Gummischlauch mit eingelegter Drahtspirale zu einer Luftpumpe führt. Letztere kann sowohl zur Verdünnung, als auch zur Verdichtung benutzt werden. Man pumpt Luft aus dem Apparate aus, wenn man ihn mit Flüssigkeit füllen will, welche man durch den Hahn *e* eintreten und in das Gefäss *b* bis in die zur Sicherheit angebrachte Kugel *h* ansteigen lässt; man pumpt Luft ein, wenn man die Flüssigkeit durch die Capillarröhre ausfliessen lassen will.

Der Druck im Apparate wird an dem Quecksilbermanometer *i* abgelesen, dessen Scala in Millimeter getheilt ist. Um zu erreichen, dass der Druck während der ganzen Dauer eines Versuches unverändert bleibe, dient das mit Quecksilber gefüllte Gefäss *k*, welches durch einen starkwandigen Kautschukschlauch mit der Woulff'schen Flasche verbunden ist. Wenn durch das Ausfliessen der Flüssigkeit der Druck abzunehmen beginnt, so zieht man das Gefäss *k*, welches äquilibrirt an einer über Rollen laufenden Schnur hängt, mittelst derselben in die Höhe; es fliesst dann aus dem Gefässe Quecksilber durch den Schlauch in die Flasche, wodurch der Druck in der letzteren wieder gesteigert wird. Durch diese Vorrichtung gelingt es leicht, den Druck völlig constant zu erhalten.

Die Aufgabe des Beobachters besteht ausserdem darin, die Zeit zu bestimmen, welche vergeht von dem Augenblicke, in welchem das Niveau der Flüssigkeit im Apparate bei der oberen Marke *c* steht, bis zu demjenigen, in welchem es bei der unteren *d* angekommen ist. Zur Zeitmessung diente eine Secunden schlagende Pendeluhr, welche unmittelbar neben dem Apparate stand.

Bei den verschiedenen Versuchen floss also immer dasselbe Volumen Flüssigkeit während der beobachteten

Zeit aus. Die Grösse desselben wurde durch vorausgegangene Beobachtungen bestimmt, indem das Gewicht und die Temperatur des Wassers gemessen wurde, welches den Raum zwischen den Marken füllte. Bei diesen Beobachtungen liess Rosencranz das Wasser natürlich durch den Hahn *e* ausfliessen. Es ergab sich aus mehreren übereinstimmenden Wägungen, dass der Raum zwischen den Marken 111.03 Grm. Wasser fasste.

Auch der Druck wurde bei allen Versuchen auf gleicher Höhe erhalten, und zwar zeigte das Manometer stets eine Druckhöhe von 593 Mm. Quecksilber. Da die Zimmertemperatur im Durchschnitt 18° betrug, so können wir die Dichtigkeit des Quecksilbers zu 13.415 annehmen und demnach die Druckhöhe einer Wassersäule von 795.6 Ctm. äquivalent setzen. Hierzu ist noch die mittlere Höhe des Wasserstandes im Ausflussgefässe hinzuzufügen, welche 9.0 Ctm. betrug, so dass die gesammte Druckhöhe 804.6 Ctm. ausmachte.

Die zu den Versuchen benutzte Capillarröhre war eine von denjenigen, welche schon zu meinen Beobachtungen über die Reibung der Luft gedient hatten, und zwar ein Stück der weitesten jener drei Röhren. Der Querschnitt derselben war gleich $0.001588 \square \text{Ctm.}$, während ihre Länge 77.2 Ctm. betrug.¹⁾ Da diese Röhre für Gase den Bedingungen des Poiseuille'schen Gesetzes genügte, so konnte kein Zweifel darüber aufkommen, dass sie auch für tropfbare Flüssigkeiten dieselben erfüllen werde.

7. Da durch die lange und enge Röhre das Wasser nur tropfenweise ausfloss, so war nach G. Hagen's²⁾ Erfahrungen eine Prüfung der Frage unerlässlich, ob der Strömung durch die capillare Spannung des am Ende der Röhre hängenden Tropfens ein merkbarer Gegendruck entgegengesetzt wurde. Rosencranz hat deshalb eine Reihe vergleichender Versuche angestellt; bei einigen der-

1) Pogg. Ann. CXLVIII, p. 36. 1873.

2) Abh. d. Berl. Ak. 1854.

selben fiel das aus der Röhre ausfliessende Wasser in einzelnen Tropfen ab, bei anderen war an die Capillare ein weites, ganz mit Wasser gefülltes Glasrohr angesetzt, welches mit seinem niedergebogenen Ende in Wasser eintauchte. Die Resultate der Versuche enthält folgende Tabelle, in welcher die gefundenen Werthe des Reibungscoefficienten den für die mittlere Versuchstemperatur nach der Poiseuille'schen Formel berechneten gegenübergestellt sind.

	Ausflusszeit.	Temp.	Reibungs- coefficient.	Nach Poiseuille.
Ohne Ansatzrohr	21' 57.5"	12.35	0.01216	0.01227
Mit Ansatzrohr	22' 5"	12.05	1223	1235
	21' 34"	12.86	1195	1210
	21' 30"	13.02	1191	1205
Ohne Ansatzrohr	21' 35"	12.97	1195	1207

Obwohl die von Rosencranz erhaltenen Werthe durchweg etwas kleiner als die Poiseuille'schen sind, so lassen doch diese Zahlen keinen Zweifel darüber aufkommen, dass die in ihnen erkennbaren Schwankungen ihren alleinigen Grund in der Veränderlichkeit der Temperatur finden; dagegen übt die Art des Ausflusses nur einen verschwindend geringen Einfluss auf die Ausströmungszeit aus, und es darf der capillare Gegendruck der anhängenden Tropfen ausser Acht bleiben. Rosencranz liess deshalb bei den weiteren Versuchen die Tropfen frei herabfallen.

8. Um Messungen bei verschiedenen Temperaturen ausführen zu können, wurde die Capillarröhre mit einer weiteren umgeben, durch welche während des Versuches fortwährend Wasser von der gewünschten Temperatur hindurchfloss. Constant wurde diese Temperatur dadurch erhalten, dass das Wasser aus zwei Gefässen von je ein Cubikfuss Grösse entnommen wurde, von welchen das eine kaltes, das andere heisses Wasser enthielt. Durch die Stellung der beiden Abflusshähne lässt sich die Strömung leicht so reguliren, dass jede beliebige Temperatur stundenlang unverändert erhalten wird.

Gemessen wurde die Temperatur durch zwei Thermometer T_1 und T_2 , von denen das erste sich neben der Capillare innerhalb der weiteren Röhre, also im äusseren Wasser befand; das zweite, welches im Inneren des Apparats befestigt war, bestimmte die Temperatur des Wassers vor dem Eintritt in die Capillare. Die Angaben beider sind in der folgenden tabellarischen Zusammenstellung der Beobachtungen unter den Ueberschriften T_1 und T_2 neben einander aufgeführt.

Da bei der beschriebenen Einrichtung des Apparats nur die Capillare, nicht aber auch, wie bei Poiseuille's Versuchen, das Wassergefäss erwärmt wurde, so wird eine Verbesserung an der theoretischen Formel nöthig. Das in derselben vorkommende Volumen V des ausgeflossenen Wassers sollte nämlich bei der Temperatur T des Versuches gemessen sein; statt dessen ist bei gewöhnlicher Zimmertemperatur T_0 das Volumen V_0 durch die Wägung des Wassers im Gefässe bestimmt worden. Beide Volumina verhalten sich umgekehrt wie die Dichtigkeiten:

$$V : V_0 = \rho_0 : \rho;$$

demnach lautet unsere Formel:

$$V_0 \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\pi}{2^7} \frac{p}{\eta} \frac{D^4}{L} t,$$

und es ist in dieselbe für das Product $V_0 \rho_0$ der bei der Temperatur T_0 gewogene Inhalt des Gefässes von 111.03 Grm. einzusetzen. Bei der Berechnung des Werthes von ρ habe ich die Angabe T_1 des neben der Capillarröhre befindlichen Thermometers als maassgebend angenommen.

Streng genommen wäre noch eine zweite Temperaturcorrection anzubringen, welche bei der Einrichtung Poiseuille's ebenfalls unterbleiben kann. Es ist nämlich die Ausdehnung des Glases in den Grössen D^4 und L auf der rechten Seite der Gleichung zu berücksichtigen; doch kann diese Correction ihres geringen Betrages wegen unterbleiben.

9. Die Resultate der Versuche enthält die folgende Tabelle.

T_1^0	T_2^0	t''	ϱ	η
42.01	42.8	694	0.9916	0.006356
42.84	42.0	683	0.9912	6253
42.90	42.9	677	0.9912	6198
43.02	42.7	683	0.9908	6250
51.15	51.25	596	0.9876	5437
50.28	50.5	605	0.9869	5515
50.29	50.6	606.5	0.9868	5528
59.80	57.3	543	0.9835	4933
60.71	58.7	533	0.9830	4839
61.73	58.3	523	0.9825	4748
71.40	56.6	473	0.9772	4269
69.71	61.5	485	0.9781	4381
80.06	60.8	445	0.9716	3993
77.81	62.5	449.5	0.9733	4041
89.4	68.5	387	0.9659	3453

Von den beobachteten Werthen T_1 und T_2 der Temperatur ist der erstere T_1 , welcher an dem neben der Capillaren in dem beide umgebenden Wasser liegenden Thermometer abgelesen wurde, ohne Zweifel als derjenige anzusehen, welcher am genauesten die Temperatur angibt, welche dem gemessenen Werthe η der Reibung entspricht. Allerdings tritt das Wasser mit der im Inneren des Apparats beobachteten Temperatur T_2 , oder mit einer etwas höheren, in die Capillarröhre ein; jedoch muss der feine Wasserfaden in derselben in sehr kurzer Zeit die Temperatur T_1 , auf welcher die Röhre erhalten wird, annehmen. Die wirkliche mittlere Temperatur des Versuches liegt also freilich wohl ein wenig unter dem Werthe von T_1 ; doch kann sie von dieser nur um eine sehr unbedeutende Grösse verschieden sein.

Wir nehmen daher T_1 als die richtige Temperatur des Versuches an; dann erkennen wir eine deutliche Abweichung der beobachteten Werthe von der aus Poiseuille's Versuchen berechneten Formel, nach welcher für

$T = 50^{\circ}$	$\eta = 0.005433$
60	4591
70	3932
80	3406

sein sollte. Die von Rosencranz beobachteten Werthe sind durchweg grösser ausgefallen.

Jene Formel scheint also für höhere Temperaturen nicht mehr zu gelten. Versucht man in derselben Weise, wie oben aus Poiseuille's, so jetzt aus Rosencranz' Versuchen eine ähnliche Formel mit anderen Coefficienten zu berechnen, so findet man, dass auch die Form der Function nicht mehr genügt; denn man erhält statt einer Function zweiten Grades eine solche vom ersten Grade, und zwar lässt sich η , wie die folgende Vergleichung lehrt, ziemlich gut durch die Formel:

$$\eta = \frac{0.01854}{1 + 0.04635 T}$$

als Function der Temperatur, also graphisch durch eine Hyperbel, darstellen; nur die bei sehr hohen Temperaturen angestellten Beobachtungen, welche mit grösseren Fehlern behaftet sind, weichen beträchtlicher von der Formel ab.

T	berechnet.	beobachtet.
42.01	0.006291	0.006356
42.84	6210	6253
42.90	6204	6198
43.02	6192	6250
51.15	5500	5437
50.28	5567	5515
50.29	5566	5528
59.80	4915	4933
60.71	4861	4839
61.73	4802	4748
71.40	4302	4269
69.71	4382	4381
80.06	3936	3993
77.81	4025	4041
89.4	3604	3453

Wenn wir hiernach den Schluss ziehen, dass das Poiseuille'sche Temperaturgesetz nur bis etwa 45° gilt, und dass bei höheren Wärmegraden ein anderes, nach welchem die Reibung weniger stark mit der Temperatur abnimmt, an die Stelle jenes tritt, so lässt sich hiergegen allerdings noch einwenden, dass bei den Rosencranz'schen Beobachtungen die Bestimmung der Temperatur, da dieselbe von beiden Thermometern verschieden angegeben wird, mit einer gewissen Unsicherheit behaftet bleibt. Jedoch wird die Richtigkeit jenes Schlusses dadurch erhärtet, dass auch ältere Beobachtungen übereinstimmend ergeben, dass die Reibung des Wassers weniger stark mit der Temperatur abnimmt, als es nach der Poiseuille'schen Interpolationsformel zu erwarten wäre.

III. Vergleichung mit anderen Beobachtungen.

10. In erster Linie sind die Versuche, welche Graham¹⁾, ebenfalls nach Poiseuille's Methode, angestellt hat, zu nennen, weil dieselben bis zu der Temperatur von 70° hinaufreichen. Wir müssen freilich leider darauf verzichten, aus denselben die absoluten Werthe der Reibung abzuleiten; denn, obgleich alle dazu erforderlichen Zahlen angegeben sind, so lassen die Resultate der Rechnung die sonst bei Graham stets gewohnte Uebereinstimmung in einem solchen Maasse vermissen, dass auf Fehler in den Angaben der Dimensionen, entweder der Röhren oder der Ausflussgefässe, geschlossen werden muss. Dies beeinträchtigt jedoch nicht die Möglichkeit, aus einer Reihe von Beobachtungen, welche alle mit demselben Apparate und besonders mit derselben Röhre ausgeführt sind, das Gesetz herzuleiten, nach welchem die Reibung mit steigender Temperatur abnimmt.

Dieses Gesetz ist unmittelbar aus den Zahlen zu entnehmen, welche Graham in der am Schlusse seiner Ab-

1) *Philos. transactions for 1861*, CLI. p. 373; *Graham's chemical and physical researches*, Edinb. 1876, p. 600; *Liebig's Ann.* CXXIII. p. 90. 1862.

handlung stehenden Tabelle XIV zusammengestellt hat, um die Zunahme der Ausflussgeschwindigkeit mit der Temperatur zu erläutern. Die hier folgende Tabelle enthält die von Graham mittelst zweier verschiedener Röhren gewonnenen Resultate, verglichen mit den nach Poiseuille's und nach Rosencranz' Formel berechneten Werthen der Function, welche im Nenner derselben steht.

<i>T</i>	Graham.		Poiseuille's	Rosencranz'
	Röhre <i>D.</i>	Röhre <i>E.</i>	Formel.	Formel.
0	1	1	1	1
5	1.186	1.179	1.172	1.232
10	1.359	1.372	1.356	1.463
15	1.576	1.571	1.552	1.695
20	1.787	1.784	1.760	1.927
25	2.019	1.979	1.981	2.159
30	2.237	2.192	2.214	2.390
35	2.485	2.431	2.459	2.622
40	2.711	2.706	2.716	2.854
45	2.953	2.946	2.985	3.086
50	3.218	3.226	3.267	3.317
55	3.498	3.429	3.560	3.549
60	3.684	3.719	3.866	3.781
65	3.925	4.072	4.184	4.013
70	4.200	4.312	4.515	4.244.

Man erkennt, dass Poiseuille's Formel zu grosse Werthe der Geschwindigkeit für hohe Temperaturen liefert; für diese genügt das Rosencranz'sche hyperbolische Gesetz vortrefflich, während es andererseits für niedrige Temperaturen zu grosse Werthe ergibt.

11. Dasselbe ergeben die bis 50° ausgedehnten Beobachtungen von Ludwig Reilstab¹⁾, welche mit den Graham'schen sehr genau übereinstimmen, während sie für höhere Temperaturen eine grössere Reibung ergeben, als sie nach Poiseuille's Formel berechnet wird; des-

1) Ueber die Transpiration homologer Flüssigkeiten. Inaugural-dissertation. Bonn 1868.

gleichen die Versuche von Adolf Sprung,¹⁾ deren Resultate in folgender Tabelle mit den nach der Poiseuille'schen Formel berechneten zusammengestellt sind; die Einheiten dieser Zahlen sind nicht die der früheren, sondern Milligramm und Quadratcentimeter.

<i>T</i>	Sprung.	Poiseuille.
0	0.01814	0.01810
5	1540	1544
10	1327	1335
15	1158	1166
20	1021	1028
25	0915	0914
30	0819	0818
35	0739	0736
40	0672	0666
45	0616	0606
50	0567	0554

Da also auch bei diesen Beobachtungen dieselbe Abweichung bei höheren Temperaturen hervortritt²⁾, so dürfen wir als festgestellt ansehen, dass das in der Poiseuille'schen Formel enthaltene Temperaturgesetz nur den Werth einer Interpolationsformel besitzt, deren Gültigkeit bei etwa 40° aufhört, und dass für höhere Wärmegrade das wahre Gesetz sich dem einfacheren nähert, welches graphisch durch eine Hyperbel darstellbar ist.

1) Pogg. Ann. CLIX. p. 1. 1876.

2) Ich könnte endlich noch meine eigenen, nach Coulomb's Schwingungsmethode angestellten Beobachtungen (Pogg. Ann. CXIII. p. 399. 1861) anführen. Diese Versuche, welche zu 33.7° hinaufreichen, weichen in demselben Sinne, wie die hier angeführten, von der Poiseuille'schen Formel ab, während sie der Rosencranz'schen gut folgen. Doch sind wegen der geringeren Genauigkeit der Beobachtungsmethode die Zahlen nicht sicher genug bestimmt, um neben den erwähnten ins Gewicht zu fallen.

Die nach der gleichen Methode von Grottrian (Pogg. Ann. CLVII. p. 242. 1876) ausgeführten Versuche haben noch grössere, mit der Temperatur stärker abnehmende Werthe ergeben.

IV. Rosencranz' Versuche mit Glycerin.

12. Ausser Wasser hat Rosencranz auch andere Flüssigkeiten zu Versuchen benutzt, doch sind von diesen nur die mit Glycerin angestellten Beobachtungsreihen vollendet worden. Indem ich die Resultate dieser Beobachtungen hier mittheile, beschränke ich mich darauf, einfach die unmittelbar beobachteten Werthe der Ausflusszeiten anzugeben; denn da das benutzte Glycerin nicht auf seine Reinheit oder auf seinen Wassergehalt geprüft worden ist, so wäre es verlorene Mühe, die Werthe des Reibungscoefficienten in absolutem Maasse zu berechnen.

Da reines Glycerin zu dickflüssig ist, um sich durch enge Capillarröhren hindurchpressen zu lassen, so wurden zu den Versuchen Mischungen von Glycerin und Wasser benutzt, welche 10, 30 und 50 Procent Glycerin enthielten. Die beobachteten Werthe der Ausflusszeiten lassen sich, wie die folgenden tabellarischen Zusammenstellungen zeigen, ziemlich genau durch folgende Formeln darstellen:

1) für die 10% enthaltende Mischung:

$$t = \frac{56650}{T + 20.7};$$

2) für die 30% enthaltende Mischung

$$t = \frac{77716}{T + 11.9},$$

während die früher erwähnten, mit Wasser angestellten Beobachtungen angenähert der Formel:

$$t = \frac{44452}{T + 21.5}$$

folgen, welche ich zum Vergleiche hinzufüge.

Temp. T^0	10% Glycerin.		Temp. T^0	10% Glycerin.	
	Ausflusszeit t'' . beob.	berechn.		Ausflusszeit t'' . beob.	berechn.
9.9	1838	1854''	17.87	1470	1469
12.2	1716	1721	17.9	1467	1468
12.5	1709		22.55	1271	1301
12.7	1703	1698	23.1	1267	1293
14.05	1634	1630	23.25	1278	1289
17.5	1487	1485	35.0	1003	1017
17.6	1480	1479	46.25	840	846
17.75	1474	1474			

30% Glycerin.			50% Glycerin.		
Temp.	Ausflusszeit t'' .		Temp.	Ausflusszeit t'' .	
T^0	beob.	berechn.	T^0	beob.	
12.15	3233	3233	16.1	5873	
13.1	3112	3113	16.7	6020	
13.4	3078	3073	18.7	5410	
16.1	2813	2778	18.7	5490	
18.45	2591	2575	19.3	5213	
18.52	2580	2556	19.5	5176	
18.6	2569	2550	20.0	5121	
23.6	2193	2188	21.05	5082	
23.9	2176	2174			
24.4	2141	2141			

Breslau, im September 1877.

IX. Ueber eine Methode zur Untersuchung der gleitenden Reibung fester Körper; von E. Warburg und v. Babo.

Die Gesetze der gleitenden Reibung fester Körper sind von Coulomb und seinen Nachfolgern erschlossen worden aus der Verzögerung, welche die Reibung in einem festen Körper hervorbringt, der über einen anderen hingeleitet.

Versuche über diese Kraft sind bisher wohl vorzugsweise mit Rücksicht auf die Erfordernisse der Technik angestellt worden. Die hier mitzutheilenden Versuche wurden. im Gegentheil nur unternommen, um die Entstehungsweise der genannten Kraft aufzuhellen. Denselben Zweck verfolgt auch eine Arbeit von Landsberg.¹⁾ Von dem erwähnten Gesichtspunkte aus war vor Allem darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Beschaffenheit der reibenden Oberflächen möglichst gut bekannt wäre. Es wurden daher die Oberflächen gut polirter optischer Gläser als reibende Flächen genommen, deren Beschaffenheit durch optische Methoden geprüft werden kann.

1) Pogg. Ann. CXXI. p. 283—306.

Fig. 1.

Fig. 2 a.

Fig. 2 b.

Fig. 2 c.

Fig. 2 d.

Fig. 2 e.

Fig. 2 f.

Fig. 2 g.

Fig. 2 h.

Fig. 3 b.

Fig. 3 a.

Fig. 5 a.

Fig. 4.