Ueber Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten.

Von

H. KREY in Freiburg i/Br.

Die Zahl der Lösungen eines Systems von $2r$ Gleichungen

$$f_1(x^{(1)}; x^{(2)}; \dots; x^{(r)}) = 0, \dots, f_{2r}(x^{(1)}; x^{(2)}; \dots; x^{(r)}) = 0,$$

deren linke Seiten ganze, r -fach ternäre Functionen der Coordinaten $x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, x_3^{(h)}$ von r Punkten in der Ebene sind, und in den $x^{(h)}$ bezw. die Grade $n_1^{(h)}, \dots, n_{2r}^{(h)}$ erreichen, ist bekanntlich im Allgemeinen durch den Ausdruck

$$\sum_1^{2r} n_i^{(1)} n_k^{(1)} n_h^{(2)} n_l^{(2)} \dots n_p^{(r)} n_q^{(r)}$$

gegeben, in welchem die Indices $i, k, h, l, \dots$ auf alle mögliche Arten verschiedene Zahlwerthe der Reihe $1, 2, \dots, 2r$ annehmen. Derselbe gilt auch dann noch, wenn beliebig viele der Gleichungen nicht mehr alle r Coordinatenreihen enthalten, die Zahlen n also zum Theil Null sind.

In Folge besonderer Beschaffenheit der Gleichungen kann, ohne dass zwischen ihnen eine Abhängigkeit bestände, die Zahl der Lösungen unendlich gross werden. Es tritt dieses z. B. schon dann ein, wenn mehr als zwei der Functionen f für $x^{(i)} = x^{(k)}$ identisch verschwinden; und allgemeiner könnte man die Annahme machen, dass $f_h \gamma_h^{(i, k)}$ -fach verschwindet für $x^{(i)} = x^{(k)}$, $\vartheta_h^{(i)}$ -fach für $x^{(i)} = a$, wo a einen festen Punkt (Ausnahmepunkt) der Ebene bedeutet. Wird in diesem Falle die beschränkende Bedingung hinzugefügt, dass $x^{(1)}, \dots, x^{(r)}$ Gruppen von freien (d. h. nicht in Ausnahmepunkte fallenden), getrennt liegenden Punkten sein sollen, so bleibt die Zahl der Lösungen eine endliche, und es bietet sich die Aufgabe, die nicht nur von den n , sondern auch von den Zahlen γ, ϑ abhängige Reduction zu finden, welche der obige Ausdruck erfährt.

Zu den zahlreichen Specialfällen, welche diese Aufgabe in sich schliesst, gehört auch der aus nachstehender Annahme entspringende,

der im Folgenden untersucht werden soll: Alle γ und ϑ haben den Werth 1, während die Gradzahlen n sämmtlich von Null verschieden sind. Einen solchen Fall hat man vor sich, wenn z. B. jede Function f aus Gliedern folgender Art sich zusammensetzt:

$$\varphi \cdot \begin{vmatrix} \psi_1(x^{(1)}) & \psi_2(x^{(1)}) & \dots & \psi_r(x^{(1)}) \\ \psi_1(x^{(2)}) & \psi_2(x^{(2)}) & \dots & \psi_r(x^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_1(x^{(r)}) & \psi_2(x^{(r)}) & \dots & \psi_r(x^{(r)}) \end{vmatrix}$$

wo φ eine beliebige Function bedeutet, und die Curven $\psi_1(x)=0, \dots, \psi_r(x)=0$, welche von derselben Ordnung sind, einfach durch die Ausnahmepunkte gehen. Dieses Beispiel führt zugleich zu einer weiteren Annahme, die hier gemacht werden soll, und die nicht nothwendig aus der ersten, hinsichtlich der Zahlen γ und ϑ gemachten folgt, dass nämlich bei unendlicher Annäherung eines der Punkte $x^{(2)}, \dots, x^{(r)}$ an einen Ausnahmepunkt, und beliebiger Lage der übrigen, die zugehörigen Curven $f_h(x^{(1)})=0$, ohne auszuarten, die beiden benachbarten Punkte verbinden. — Es lässt sich zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen die Bestimmung der Anzahl brauchbarer Lösungen für jedes r ausgeführt werden kann. Für $r=2$ und $r=3$ sind die fraglichen Ausdrücke im Folgenden entwickelt.

Zur Bestimmung von *Punktgruppen im Raume* sind $3r$ Bedingungen

$$f_1(x^{(1)}; \dots; x^{(r)})=0, \dots, f_{3r}(x^{(1)}; \dots; x^{(r)})=0$$

erforderlich: auch hier erfährt die im Allgemeinen gültige Zahl der Lösungen

$$\sum_1^{3r} n_i^{(1)} n_k^{(1)} n_h^{(1)} n_l^{(2)} n_p^{(2)} n_q^{(2)} \dots n_s^{(r)} n_t^{(r)} n_u^{(r)}$$

eine Reduction, wenn die Gleichungen die oben erwähnten Besonderheiten haben. —

Abkürzende Bezeichnungen.

Unter

$$(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{2r})$$

soll im Folgenden die *Zahl der Punktgruppen* in der Ebene verstanden werden, welche den $2r$ Gleichungen $\varphi_1=0, \dots, \varphi_{2r}=0$ genügen. g_i ist die Bedingung für $x^{(i)}$, auf einer gegebenen Geraden zu liegen; g_{ik} die Bedingung für $x^{(i)}$ und $x^{(k)}$, in einer und derselben gegebenen Geraden zu liegen; g_i^2 sagt aus, dass der Punkt $x^{(i)}$ gegeben ist; p_{ik} , dass die Verbindungsgerade von $x^{(i)}$ mit $x^{(k)}$ durch einen gegebenen Punkt geht; p_{ik}^2 ist gleichbedeutend mit g_{ik} . Hiernach ist z. B. (für $r=3$) die Bedeutung von

$$(g_1 p_{23} f_1 f_2 f_3 f_4), \quad (g_{12} g_3 f_1 f_2 f_3), \quad (g_1^2 p_{12} p_{23} f_1 f_2)$$

leicht ersichtlich.

Für *Punktgruppen im Raume* ist g_{ik}^* die Bedingung, dass die Punkte $x^{(i)}$, $x^{(k)}$ ihren Verbindungsstrahl ν gegebene Gerade treffen lassen; e_i , e_i^2 , e_i^3 sagt aus, dass $x^{(i)}$ in einer gegebenen Ebene, bezw. Geraden liege, oder endlich gegeben sei; also bedeutet z. B. (für $r=2$)

$$(e_1 e_2 g_{12} f_1 f_2 f_3)$$

die Zahl der Punktepaare, welche $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ in je eine von zwei gegebenen Ebenen werfen, die Verbindungsgerade eine einfache Bedingung erfüllen lassen, und den Gleichungen $f_1=f_2=f_3=0$ genügen.

Die Ordnung einer Curve, welche in Folge gegebener Bedingungen ein Punkt $x^{(i)}$ beschreibt, soll mit $(x^{(i)})$ bezeichnet werden, ihre Vielfachheit in einem Ausnahmepunkte mit v_i ; nur wenn sich der Punkt auf einer Geraden bewegt, ist die Bedeutung von $(x^{(i)})$ und v_i eine andere (vgl. den Hülfsatz).

Auf Gradzahlen bezügliche *Summenausdrücke* werden meistens nur durch ihr allgemeines Glied, mit Weglassung des Summenzeichens und der Indices, angedeutet, z. B. wird geschrieben

$$\mu\mu\nu \quad \text{für} \quad \mu_1\mu_2\nu_3 + \mu_1\mu_3\nu_2 + \mu_2\mu_3\nu_1,$$

$$\mu\mu\nu\varrho \quad \text{für} \quad \sum_1^4 \mu_i \mu_k \nu_h \varrho_i,$$

$$\mu\mu\nu\nu\varrho + \mu\mu \quad \text{für} \quad \sum_1^5 \mu_i \mu_k \nu_h \mu_i \varrho_m + \sum_1^5 \mu_i \mu_k;$$

die obere Grenze der Indices, welche nur *verschiedene* Werthe annehmen, ist jedesmal aus dem Zusammenhange ersichtlich. —

Die Zahl der *Ausnahmepunkte* wird im Folgenden immer mit α bezeichnet.

§ 1.

Beweis eines Hülfsatzes.

Sind die Punkte zweier Curven, eines x -Ortes und eines y -Ortes, eindeutig auf einander bezogen, und coincidirt an c_{12} freien Stellen x mit dem entsprechenden y , bestimmt ferner die Gleichung

$$\varphi(x; y) = 0,$$

deren linke Seite für $x=y$ einfach verschwindet, für einen beliebig gegebenen Punkt y ξ bewegliche Punkte x des ersten Ortes, für einen beliebigen Punkt x η bewegliche Punkte y des zweiten Ortes, dann giebt es

$$(1) \quad \xi + \eta - c_{12}$$

Paare von zusammengehörigen Punkten x, y , welche der Gleichung $\varphi = 0$ genügen.

Der Beweis hierfür ergibt sich sehr einfach durch Herstellung einer Correspondenz, die vermöge der Gleichung $\varphi(x'; y) = 0$ jedem Punkte x des ersten Ortes ξ Punkte x' , jedem x' η Punkte x zuordnet. — Auf demselben Wege und mit Benutzung des schon erhaltenen Resultates zeigt man:

Sind die Punkte einer x -Curve, einer y -Curve und einer z -Curve eindeutig auf einander bezogen, bezeichnet c_{12}, c_{13}, c_{23} , wie oft an freier Stelle x mit y , x mit z , y mit z coincidirt, und bestimmt die Gleichung

$$\varphi(x; y; z) = 0,$$

deren linke Seite für $x = y$, $x = z$, $y = z$ einfach verschwindet, für ein beliebiges Paar x, y ξ bewegliche Punkte des z -Ortes, u. s. w., so ist

$$\xi + \eta + \xi - c_{12} - c_{13} - c_{23}$$

die Zahl der Tripel x, y, z , welche der Gleichung $\varphi = 0$ genügen.

Die Ausdehnung dieser Sätze auf Gruppen von beliebig vielen Curven giebt, wenn man noch die Zahlen $\xi, \eta, \xi, \dots$ durch die Gradzahlen von φ , und durch die Ordnungen und Vielfachheiten der verschiedenen Oerter ausdrückt, Folgendes:

Unter den ∞^1 Gruppen von Punkten $x^{(1)}, \dots, x^{(r)}$, welche durch $2r - 1$ (bezw. $3r - 1$) Bedingungen bestimmt sind, giebt es

$$(I) \quad n^{(1)}(x^{(1)}) + \dots + n^{(r)}(x^{(r)}) - \sum v - \sum c_{ik},$$

welche einer Gleichung

$$\varphi(x^{(1)}; x^{(2)}; \dots; x^{(r)}) = 0$$

genügen, deren linke Seite für $x^{(i)} = x^{(k)}$ und für $x^{(i)} = a$ einfach verschwindet, und in den $x^{(i)}$ den Grad $n^{(i)}$ erreicht. $\sum v$ bedeutet die Summe der Vielfachheiten der r Oerter in den Ausnahmepunkten; c_{ik} die Zahl der an freien Stellen stattfindenden Coincidenzen von $x^{(i)}$ mit $x^{(k)}$.

Verlangt eine der Bedingungen, dass sich $x^{(i)}$ auf einer gegebenen Geraden g_i (bezw. e_i^2) bewege, so findet kein eindeutiges Entsprechen der Punkte mehr statt, vielmehr gehören zu einem beliebig auf g_i gewählten Punkte im Allgemeinen mehrere Gruppen von $r - 1$ Punkten. Der Satz bleibt aber auch in diesem Falle richtig, wenn man nur unter $(x^{(i)})$ die Zahl der Gruppen versteht, welche ihren Punkt $x^{(i)}$ in einer beliebigen Geraden (bezw. Ebene) haben, und als den Antheil, welchen der $x^{(i)}$ -Ort an $\sum v$ hat, nicht δ , sondern $\delta(x^{(i)})$ betrachtet, wo δ die Zahl der auf der Geraden liegenden Ausnahmepunkte bedeutet.

Bei beliebiger Annahme der Zahlen γ, ϑ für die Gleichung $\varphi = 0$ würde an die Stelle von (I) der folgende Ausdruck treten:

$$\xi + \eta - \gamma_{12} c_{12} - \alpha \lambda \cdot \alpha;$$

hier giebt α an, wie viele Coincidenzen von x mit y in jedem Ausnahmepunkte liegen; $\vartheta + \lambda$ ist die Vielfachheit der *Grenzcurve* $\varphi(x) = 0$ in einem Punkte a , welche einem zu a benachbarten y entspricht. Wollte man also den Satz (I) verallgemeinern, so müsste man Zahlen einführen, welche nicht von den γ und ϑ alleine abhängen, sondern vielmehr von der Art, wie sich der $\vartheta^{(i)}$ -fache Punkt der Curve $\varphi(x^{(i)}) = 0$ in a und der γ_{ik} -fache Punkt in $x^{(k)}$ bei Annäherung von $x^{(k)}$ an a zu einer neuen Singularität vereinigen. Dieser Umstand würde die Untersuchung des allgemeinen Falles erschweren. Ist aber $\lambda = 0$, $\gamma = \vartheta = 1$, so fallen jene Reductionen fort; man kann dann immer den Satz (I) anwenden, mit alleiniger Ausnahme der Fälle, in welchen mehr als zwei Punkte gleichzeitig coincidiren.

§ 2.

Zurückführung der fraglichen Ausdrücke auf einfachere.

Der erste Schritt zur Ermittlung der Zahl

$$(f_1 f_2 \cdots f_{2r})$$

besteht in der Weglassung einer der Bedingungen, etwa f_{2r} , und der Einführung der durch die übrigen Gleichungen definirten Curvengruppe.

Auf die letztere wendet man den Satz (I) an, in welchem

$$(x^{(i)}) = (g_i f_1 \cdots f_{2r-1})$$

zu setzen ist; v_i ist nichts Anderes als die *Verminderung*, welche der Werth dieses Ausdrucks erfährt, wenn man die Gerade g_i , anstatt derselben eine beliebige Lage zu ertheilen, durch einen Ausnahmepunkt legt. Da sich ferner die c_{ik} mit Hülfe des verallgemeinerten Chasles'schen Correspondenzprincips*) wie folgt bestimmen:

$$c_{ik} = (x^{(i)}) + (x^{(k)}) - (p_{ik} f_1 \cdots f_{2r-1}),$$

erhält man

$$(1) \quad (f_1 f_2 \cdots f_{2r}) = \sum_{i=1}^{i=r} (n_{2r}^{(i)} - r + 1) (g_i f_1 \cdots f_{2r-1}) \\ + \sum_{i < k} (p_{ik} f_1 \cdots f_{2r-1}) - \alpha \sum v_i;$$

und dem analog für Punktgruppen im Raume:

$$(2) \quad (f_1 f_2 \cdots f_{3r}) = \sum_{i=1}^{i=r} (n_{3r}^{(i)} - r + 1) (e_i f_1 \cdots f_{3r-1}) \\ + \sum_{i < k} (g_{ik} f_1 \cdots f_{3r-1}) - \alpha \sum v_i.$$

*) Vgl. Schubert: Kalkül d. abz. Geometrie pag. 44.

Um die rechts stehenden noch unbekannten Ausdrücke weiter zu reduciren, verfährt man genau wie es in der Theorie der Charakteristiken geschieht; man lässt wieder eine Bedingung f aus, und sucht für die Schaar von Punktgruppen, welche durch die übrigen Bedingungen gegeben ist, die Zahlen (x) , v , c zu bestimmen.

Ist überhaupt die Schaar der Gruppen definit durch die Bedingungen

$$(3) \quad g_1 \cdots g_h g_{ik} g_{lm} \cdots p_{\mu\nu} p_{\varrho\sigma} \cdots f_1 \cdots f_{\lambda-1},$$

so findet man

$$(x^{(s)}) = (g_1 \cdots g_h g_s g_{ik} g_{lm} \cdots p_{\mu\nu} p_{\varrho\sigma} \cdots f_1 \cdots f_{\lambda-1});$$

man wird also insbesondere auf Ausdrücke geführt, welche sich auf nur $r - 1$ unbekannte Punkte beziehen, wenn s unter den Indices der g in (3) vorkommt; in diesem Falle ist zu beachten, dass der gegebene Punkt $x^{(s)}$ für die Gleichungen $f_1 = 0, \cdots f_{\lambda-1} = 0$ als neuer Ausnahmepunkt auftritt. Ist die Bedingung g_s nicht in (3) enthalten, so beschreibt $x^{(s)}$ eine Curve, deren Vielfachheit in den verschiedenen Ausnahmepunkten durch specielle Lagen der Geraden g_s ermittelt werden kann.

Die c bestimmen sich wieder (wenn nicht auf einfachere Art) durch das Correspondenzprincip, z. B.

$$c_{ik} = (x^{(i)}) + (x^{(k)});$$

$$c_{\mu\nu} = (x^{(\mu)}) + (x^{(\nu)}) - (g_1 \cdots g_h g_{ik} g_{lm} \cdots g_{\mu\nu} p_{\varrho\sigma} \cdots f_1 \cdots f_{\lambda-1});$$

u. s. f.

Durch Anwendung des Satzes (I) auf die Gruppenschaar (3) ergibt sich also die Zurückführung von

$$(g_1 \cdots g_h g_{ik} g_{lm} \cdots p_{\mu\nu} p_{\varrho\sigma} \cdots f_1 \cdots f_{\lambda})$$

auf andere Zahlen, die sich entweder auf nur $r - 1$ unbekannte Punkte beziehen, oder einmal weniger f , einmal mehr die Bedingung g oder p enthalten.

Da auch die auf Raumgruppen bezüglichen Zahlen eine ähnliche Reduction zulassen, so kommt man in allen Fällen schliesslich auf Systeme von elementaren Bedingungen, welche nur die Lage der Punkte in gegebenen Geraden oder Ebenen, und die Lage ihrer Verbindungsgeraden betreffen. Für die wirkliche Ausrechnung ist jedoch, wie die folgenden Beispiele zeigen, die Wegschaffung sämtlicher Bedingungen f nicht erforderlich.

§ 3.

Punktpaare in der Ebene.

Die dreifachen Bedingungen

$$1) g_1 g_2 f_1; \quad 2) g_{12} f_1; \quad 3) g_1 p_{12} f_1; \quad 4) g_1 f_1 f_2; \quad 5) p_{12} f_1 f_2$$

bestimmen Systeme von Punktpaaren, für welche die Zahlen

$$(x), (y), c, \sum v$$

zu berechnen sind. Die Gradzahlen der vier Gleichungen $f_h(x; y) = 0$ sollen mit μ_h , ν_h bezeichnet werden; δ_i ist die Zahl der auf einer Geraden g_i (oder g_{ik}) liegenden Ausnahmepunkte; $\delta_{ik} = 1$ oder 0, je nachdem der Schnittpunkt von g_i , g_k Ausnahmepunkt ist oder nicht.

Für die Schaar 1) hat man die Zahlen

$$(x) = \nu_1 - \delta_2; \quad (y) = \mu_1 - \delta_1; \quad c = 1 - \delta_{12};$$

$$\sum v = \delta_1 (\nu_1 - \delta_2) + \delta_2 (\mu_1 - \delta_1);$$

also folgt

$$(1) \quad (g_1 g_2 f_1 f_2) = \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 - 1 - \delta_1 (\nu_1 + \nu_2) - \delta_2 (\mu_1 + \mu_2) \\ + 2\delta_1 \delta_2 + \delta_{12}.$$

Ebenso leicht findet sich

$$(2) \quad (g_{12} f_1 f_2) = (\mu_1 - 1) (\nu_2 - 1) + (\mu_2 - 1) (\nu_1 - 1) \\ - \delta_1 (\mu_1 + \nu_1 + \mu_2 + \nu_2 - 2\delta_1 - 4).$$

In dem durch (3) definirten System ist

$$(x) = \nu_1 - 1; \quad (y) = \mu_1 + \nu_1 - 1 - \delta_1; \quad c = (y); \\ \sum v_1 = \delta_1 (\nu_1 - 1); \quad \sum v_2 = \alpha - \delta_1;$$

letzteres folgt aus dem Umstande, dass die y -Curve durch alle Ausnahmepunkte, nur nicht durch die etwa auf g_1 gelegenen, einfach hindurchgeht. Hiernach wird

$$(3) \quad (g_1 p_{12} f_1 f_2) = (\mu_1 - 1) (\nu_2 - 1) + (\mu_2 - 1) (\nu_1 - 1) \\ + \nu_1 \nu_2 - 1 - \alpha - \delta_1 (\nu_1 + \nu_2 - 3).$$

In dem System (4) ist

$$(x) = \nu_1 \nu_2 - \alpha - 1; \quad (y) = \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 - 1 - \delta_1 (\nu_1 + \nu_2);$$

die Zahl (y) geht hervor aus (1) für $\delta_2 = \delta_{12} = 0$; derselbe Ausdruck lehrt, dass

$$\nu_2 = \mu_1 + \mu_2 - 2\delta_1 \quad \text{oder} \quad = \mu_1 + \mu_1 - 2\delta_1 - 1,$$

je nachdem der Ausnahmepunkt beliebig oder auf g_1 gelegen ist, dass also

$$\sum v_2 = \alpha (\mu_1 + \mu_2 - 2\delta_1) - \delta_1.$$

Ferner ist

$$c = (x) + (y) - (g_1 p_{12} f_1 f_2) \\ = \mu_1 + \nu_1 + \mu_2 + \nu_2 - 3 - 3\delta_1;$$

so folgt somit:

$$(4) \quad (g_1 f_1 f_2 f_3) = \mu \nu \nu - \nu - (\alpha + 1) \mu + 3 - \delta_1 (\nu \nu - 3\alpha - 5)$$

Endlich erhält man für das durch (5) bestimmte Curvenpaar (x) aus (3) für $\delta_1 = 0$; (y) aus (x) durch Vertauschung von μ mit ν ; v_1 ist der Coefficient von $-\delta_1$ in (3), also

$$\sum v = \alpha(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2 - 6).$$

$$\begin{aligned} c &= (x) + (y) - (g_{12} f_1 f_2)_{\delta_1=0} \\ &= \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 + \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 - \mu_1 - \mu_2 - \nu_1 - \nu_2 - 2\alpha. \end{aligned}$$

Man findet:

$$(5) \quad (p_{12} f_1 f_2 f_3) = \mu \mu \nu + \mu \nu \nu - \mu \mu - \nu \nu - \mu \nu - (\alpha - 1)(\mu + \nu) + 8\alpha.$$

Hiermit sind alle zur Berechnung von $(f_1 f_2 f_3 f_4)$ dienenden Zahlen bekannt; die Gleichung (1) § 2. giebt:

$$(6) \quad (f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu \mu \nu \nu - (\alpha + 1)(\mu \mu + \nu \nu) - \mu \nu + 3(\mu + \nu) + 6\alpha^2 + 18\alpha - 6,$$

Insbesondere also erhält man für $\mu_h = \nu_h = n$

$$(7) \quad (f_1 f_2 f_3 f_4) = 6n^2 - 12(\alpha + 2)n^2 + 24n + 6\alpha^2 + 18\alpha - 6.$$

Es soll hiervon eine Anwendung gemacht werden auf die Aufgabe, die Zahl der Punktepaare x, y zu bestimmen, für welche alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y) \end{vmatrix}$$

verschwinden; $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_5 = 0$ sind die Gleichungen von 5 linear unabhängigen Curven n^{ter} Ordnung durch

$$\alpha = \frac{n(n+3)}{2} - 4$$

festen Punkte.

Zur Abkürzung werde

$$\varphi_i(x) \varphi_k(y) - \varphi_k(x) \varphi_i(y) = \Delta_{ik}$$

gesetzt. Das System

$$(8) \quad \Delta_{12} = \Delta_{23} = \Delta_{34} = \Delta_{45} = 0$$

hat nach (7)

$$(9) \quad \frac{3}{2} n^4 - 9n^3 + \frac{45}{2} n^2 - 21n + 18$$

Lösungen; unter ihnen sind unbrauchbare enthalten, welche den folgenden Systemen genügen

$$(10) \quad \varphi_2(x) = \varphi_2(y) = \Delta_{34} = \Delta_{45} = 0,$$

$$(11) \quad \varphi_3(x) = \varphi_3(y) = \Delta_{12} = \Delta_{45} = 0,$$

$$(12) \quad \varphi_4(x) = \varphi_4(y) = \Delta_{12} = \Delta_{23} = 0,$$

$$(13) \quad \varphi_2(x) = \varphi_4(x) = \varphi_2(y) = \varphi_4(y) = 0.$$

Jedes der drei ersten hat

$$(14) \quad 2(n^2 - \alpha - 1)^2 - (n - 1)(n - 2)$$

Lösungen, das System (13) dagegen

$$(15) \quad (n^2 - \alpha)(n^2 - \alpha - 1),$$

die aber bereits in (10) und (12) vorkommen; es bleiben also

$$(9) - 3 \cdot (14) + (15)$$

brauchbare Lösungen des Systems (8), und da wegen der Symmetrie aller Gleichungen in x, y von dieser Zahl die Hälfte zu nehmen ist, hat man den Satz:

Zu $\frac{n(n+3)}{2} - 4$ willkürlich in der Ebene gegebenen Punkten kann man auf

$$\frac{1}{8}(n-2)(n-4)(n^2-9)$$

Arten ein Punktepaar so bestimmen, dass durch die $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ Punkte noch eine dreifach unendliche Schaar von Curven n^{ter} Ordnung geht.

Es möge hier noch, ohne Beweis, eine Verallgemeinerung der Gleichung (6) angegeben werden, welche für den Fall gilt, dass f_h γ_h -fach verschwindet für $x = y$, ϑ_h -fach für $x = a$, ϑ'_h -fach für $y = a$, und dass sich, bei dem Zusammenfallen von y mit a , der ϑ_h -fache und der γ_h -fache Punkt zu einem $(\vartheta_h + \gamma_h)$ -fachen Punkte vereinigen:

$$\begin{aligned} (f_1 f_2 f_3 f_4) &= \sum_1^4 \mu_i \mu_k \nu_h \nu_l - \sum \gamma_i \gamma_k (\mu_h + \nu_h) (\mu_l + \nu_l) \\ &\quad - \alpha \sum (\vartheta_i \vartheta_k \nu_h \nu_l + \vartheta'_i \vartheta'_k \mu_h \mu_l) + 3 \sum \gamma_i \gamma_k \gamma_h (\mu_l + \nu_l) \\ &\quad + \alpha^2 \sum \vartheta_i \vartheta_k \vartheta'_h \vartheta'_l + \alpha \sum \gamma_i \gamma_k (\vartheta_h \vartheta_l + \vartheta'_h \vartheta'_l) - 6 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4. \end{aligned}$$

Für $\gamma_h = \vartheta_h = \vartheta'_h = 1$ erhält man hieraus einen Ausdruck, der in dem numerischen Coefficienten von α von dem in (6) gefundenen abweicht.

§ 4.

Punktetripel in der Ebene.

Die Grade der sechs Gleichungen $f_h(x; y; z) = 0$ sollen mit μ_h, ν_h, ϱ_h bezeichnet werden; δ_i und δ_{ik} haben wieder die im vorigen Paragraphen angegebene Bedeutung.

Zur Berechnung von $(f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6)$ genügt es, die folgenden 11 Zahlen zu kennen:

1) $(g_1 g_2 g_3 f_1 f_2 f_3),$	6) $(g_{12} p_{23} f_1 f_2 f_3),$
2) $(g_{12} g_3 f_1 f_2 f_3),$	7) $(g_1 p_{23} f_1 f_2 f_3 f_4),$
3) $g_{123} f_1 f_2 f_3),$	8) $(g_1 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5),$
4) $g_1 g_2 f_1 f_2 f_3 f_4),$	9) $(g_1 p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3),$
5) $g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4),$	10) $(p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3 f_4),$
11) $(p_{12} f_1 f_2 f_3 f_4 f_5).$	

Jede derselben kann mit Hülfe der vorangehenden und der in (1)–(6) § 3. gefundenen bestimmt werden, wie im Folgenden ausgeführt werden soll; die erforderlichen Zwischenrechnungen werden dabei nur angedeutet.

1) Schaar $g_1 g_2 g_3 f_1 f_2$.

Nach (1) § 3. ist

$$(z) = \mu_1 v_2 + \mu_2 v_1 - 1 - \delta_1(v_1 + v_2) - \delta_2(\mu_1 + \mu_2) + 2\delta_1\delta_2 + \delta_{12},$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für (y) und (x) . — Coincidenzen von y mit z können nur in dem Schnittpunkte von g_2, g_3 liegen, und auch nur dann, wenn dieser ein freier Punkt ist. Ersetzt man δ_2 durch $\delta_2 + 1$, erhält man statt (z) einen um $\mu_1 + \mu_2 - 2\delta_1$ kleineren Ausdruck, also ist

$$c_{23} = (1 - \delta_{23})(\mu_1 + \mu_2 - 2\delta_1), \text{ u. s. w.}$$

Da ferner

$$\sum v = \delta_1(x) + \delta_2(y) + \delta_3(z),$$

findet man

$$\begin{aligned} (1) \quad (g_1 g_2 g_3 f_1 f_2 f_3) &= \mu\nu\rho - \mu - \nu - \rho - \delta_1\nu\rho - \delta_2\mu\rho - \delta_3\mu\nu \\ &\quad + (2\delta_2\delta_3 + \delta_{23})\mu + (2\delta_1\delta_3 + \delta_{13})\nu + (2\delta_1\delta_2 + \delta_{12})\rho \\ &\quad + 3(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) - 3(\delta_1\delta_{23} + \delta_2\delta_{13} + \delta_3\delta_{12}) - 6\delta_1\delta_2\delta_3. \end{aligned}$$

Treffen sich aber g_1, g_2, g_3 , und zwar in einem Ausnahmepunkte A , so ist der vorige Ausdruck zu ersetzen durch

$$\begin{aligned} (1a) \quad \mu\nu\rho - \delta_1\nu\rho - \delta_2\mu\rho - \delta_3\mu\nu + 2\delta_2\delta_3\mu + 2\delta_1\delta_3\nu + 2\delta_1\delta_2\rho \\ - 6\delta_1\delta_2\delta_3 - 1. \end{aligned}$$

Man hat nämlich hier einen der wenigen Fälle vor sich, in welchen mehr als zwei Punkte an derselben Stelle coincidiren. Von den

$$(\mu_1 - \delta_1)(\nu_2 - \delta_2) + (\mu_2 - \delta_1)(\nu_1 - \delta_2)$$

zu z gehörenden Paaren x, y geht eines verloren, wenn z in A fällt, und zwar dadurch, dass sowohl x als y sich dem Punkte A nähert; die zu einem solchen Paare gehörende z' -Curve $f_3(x; y; z') = 0$, welche eine Correspondenz zwischen Punkten z, z' auf g_3 vermittelt, artet nothwendig in eine Curve mit Doppelpunkt in A aus; daher liegt eine unbrauchbare Coincidenz von z' mit z in A .

2) Schaar $g_{12}g_3f_1f_2$.

Hier ist (z) ohne Weiteres aus (2) § 3. zu entnehmen; aus (1) § 3. findet man

$(x) = \nu_1 \varrho_2 + \nu_2 \varrho_1 - 1 - (1 + \delta_1)(\varrho_1 + \varrho_2) - \delta_3(\nu_1 + \nu_2) + 2\delta_3(1 + \delta_1) + \delta_{13}$;
hieraus (y) durch Vertauschung von μ und ν . Rückt z in den Schnittpunkt von g_{12}, g_3 , ergibt sich eine Verminderung des Ausdrucks (z) , um

$$\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2 - 6 - 4\delta_1;$$

also ist

$$c_{31} + c_{32} = (1 - \delta_{13})(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2 - 6 - 4\delta_1).$$

Da ferner

$$c_{12} = (x) + (y); \quad \sum v = \delta_1(x) + \delta_1(y) + \delta_3(z),$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} (2) \quad (g_{12}g_3f_1f_2f_3) &= \mu\nu\varrho - (1 + \delta_1)(\mu\varrho + \nu\varrho) - \delta_3\mu\nu \\ &\quad + (\delta_{13} + 2\delta_3 + 2\delta_1\delta_3 - 1)(\mu + \nu) \\ &\quad + 2(1 + \delta_1)^2(\varrho - 3\delta_3) + (1 - \delta_{13})(8 + 6\delta_1). \end{aligned}$$

Hieran schliesst sich die folgende, durch Induction leicht zu beweisende und auf Gruppen von beliebig vielen Punkten auszudehnende Gleichung

$$\begin{aligned} (3) \quad (g_{123}f_1f_2f_3) &= \sum_1^3 (\mu_i - 2 - \delta_1)(\nu_k - 2 - \delta_1)(\varrho_k - 2 - \delta_1) \\ &= \mu\nu\varrho - (2 + \delta_1)(\mu\nu + \mu\varrho + \nu\varrho) + 2(2 + \delta_1)^2(\mu + \nu + \varrho) \\ &\quad - 6(2 + \delta_1)^3. \end{aligned}$$

4) Schaar $g_1g_2f_1f_2f_3$.

Der Werth von (z) geht hervor aus (1) für $\delta_3 = \delta_{13} = \delta_{23} = 0$, d. h. wenn der Geraden g_3 eine beliebige Lage ertheilt wird; $(x), (y)$ aus (4) § 3. Die Vielfachheit der z -Curve in einem beliebigen Ausnahmepunkte ist

$$v_3 = \mu\nu - 2\delta_2\mu - 2\delta_1\nu - 3 + 3\delta_{12} + 6\delta_1\delta_2,$$

wie aus (1) für $\delta_3 = 1, \delta_{13} = \delta_{23} = 0$ folgt; in jedem der $\delta_1 - \delta_{12}$, bez. $\delta_2 - \delta_{12}$ Punkte dagegen

$$v_3 - \nu + 3\delta_2, \quad \text{bezw.} \quad v_3 - \mu + 3\delta_1;$$

endlich in dem etwaigen Ausnahmepunkte δ_{12} [vgl. (1a)]

$$v_3 - \mu - \nu + 3\delta_1 + 3\delta_2 + 1.$$

Hieraus

$$\sum v_3 = \alpha v_3 - \delta_1\nu - \delta_2\mu + 6\delta_1\delta_2 + \delta_{12}.$$

Der z -Ort trifft g_1 an

$$(z) - \delta_1(v_3 - \nu + 3\delta_2) + \delta_{12}(\mu - 3\delta_1 - 1)$$

freien Stellen; zieht man hiervon ab die Zahl $(g_{13}g_2f_1f_2f_3)$, die aus (2) durch Vertauschung von ν mit ϱ , δ_3 mit δ_2 , δ_{13} mit δ_{12} hervorgeht, bleibt

$$c_{13} = \mu\nu + \nu\varrho - 2\delta_2\mu - 2\delta_2\varrho - (3+3\delta_1)\nu - 8 + 9\delta_2 + 9\delta_1\delta_2 + 7\delta_{12}.$$

Hieraus c_{23} durch Vertauschung von μ und ν , δ_1 mit δ_2 . Da endlich

$$c_{12} = (1 - \delta_{12})(\varrho\varrho - 3\alpha - 8),$$

so folgt

$$\begin{aligned} (4) \quad (g_1g_2f_1f_2f_3f_4) &= \mu\nu\varrho\varrho - \delta_1\nu\nu\varrho - \delta_2\mu\mu\varrho - (\alpha+2)\mu\nu - \mu\varrho - \nu\varrho \\ &+ (2\delta_1\delta_2 + \delta_{12} - 1)\varrho\varrho + (3+3\delta_2\alpha + 8\delta_2)\mu \\ &+ (3+3\delta_1\alpha + 8\delta_1)\nu + 3(\delta_1+\delta_2)\varrho + (6-12\delta_1\delta_2 - 6\delta_{12})\alpha \\ &+ 24 - 12\delta_1 - 12\delta_2 - 40\delta_1\delta_2 - 23\delta_{12}. \end{aligned}$$

5) Schaar $g_{12}f_1f_2f_3$.

Aus (4) § 3. erhält man (y), wenn ν durch ϱ , α durch $\alpha+1$, δ_1 durch δ_1+1 ersetzt wird; die Gleichung (2) giebt Ordnung und Vielfachheit des z -Ortes, und zwar beträgt letztere in einem beliebigen Ausnahmepunkte

$$v_3 = \mu\nu - (2+2\delta_1)(\mu+\nu) + 6(1+\delta_1)^2,$$

in einem auf g_{12} liegenden jedoch nur

$$v_3 = \mu - \nu + 8 + 6\delta_1.$$

Die Zahlen c_{31} , c_{32} braucht man nicht einzeln zu kennen, sondern nur ihre Summe; diese ist

$$c_{31} + c_{32} = (z) - \delta_1(v_3 - \mu - \nu + 8 + 6\delta_1) - (g_{123}f_1f_2f_3).$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} (5) \quad (g_{12}f_1f_2f_3f_4) &= \mu\nu\varrho\varrho - (1+\delta_1)(\mu\varrho\varrho + \nu\varrho\varrho) - (\alpha+2)\mu\nu - \mu\varrho - \nu\varrho \\ &- (2+4\delta_1+2\delta_1^2)\varrho\varrho + (11+3\alpha+8\delta_1+3\delta_1\alpha)(\mu+\nu) \\ &+ (8+6\delta_1)\varrho - 78 - 12(1+\delta_1)^2\alpha - 110\delta_1 - 40\delta_1^2. \end{aligned}$$

6) Schaar $g_{12}p_{23}f_1f_2$.

Aus (3) und (2) § 3. findet man

$$(x) = \nu_1\varrho_2 + \nu_2\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2 - \nu_1 - \nu_2 - (2+\delta_1)(\varrho_1+\varrho_2) - \alpha + 3 + 3\delta_1;$$

$$(y) = \mu_1\varrho_2 + \mu_2\varrho_1 - \mu_1 - \mu_2 - (1+\delta_1)(\varrho_1+\varrho_2) + 2 + 2\delta_1.$$

Da auf einer durch p_{23} gehenden Geraden (y) Paare y , z liegen, der feste Punkt selbst aber

$$(\mu_1-1)(\nu_2-1) + (\mu_2-1)(\nu_1-1) - \delta_1(\mu_1+\mu_2+\nu_1+\nu_2-2\delta_1-4)$$

mal als Punkt z auftritt, ist auch (z) bekannt; da ferner

$\sum v_3 = (\alpha - \delta_1)(\mu_1 + \mu_2 - 2 - 2\delta_1)$, $\sum c_{ik} = (x) + (y) + (z)$,
ergibt sich

$$(6) (g_{12}p_{23}f_1f_2f_3) = \mu\nu\varrho + \mu\mu\varrho - \mu\nu - (2 + \delta_1)\mu\varrho - (1 + \delta_1)(\nu\varrho + \varrho\varrho) \\ + (3 - \alpha + 3\delta_1)\mu + 2(1 + \delta_1)\nu + (4 + 6\delta_1 + 2\delta_1^2)\varrho \\ + 3(1 + \delta_1)\alpha - 9 - 18\delta_1 - 9\delta_1^2.$$

7) Schaar $g_1p_{23}f_1f_2f_3$.

Hier ergibt sich (x) aus (5) § 3., wenn μ, ν, α durch $\nu, \varrho, \alpha + 1$ ersetzt werden. Die Vielfachheit des z -Ortes in p_{23} beträgt

$$\mu\nu\nu - \nu - (\alpha + 2)\mu + 3 - \delta_1(\nu\nu - 3\alpha - 8) \text{ [vgl. (4) § 3.]},$$

während auf einer beliebigen Geraden durch p_{23}

$$(g_1g_{23}f_1f_2f_3)_{\delta_2=0}$$

Paare y, z liegen; (z) ist also gleich der Summe dieser beiden Zahlen, deren zweite aus (2) durch Vertauschung von μ mit ϱ , δ_3 mit δ_1 , δ_1 mit δ_2 hervorgeht. Der so entstehende Ausdruck giebt ausserdem als Summe der Vielfachheiten des y - und des z -Ortes:

$$v_2 + v_3 = \mu\nu + \mu\varrho - 2\delta_1(\nu + \varrho) - 6\mu - 6 + 18\delta_1$$

für einen beliebigen Ausnahmepunkt, dagegen

$$v_2 + v_3 - \delta_1(\nu + \varrho - 14)$$

für einen auf g_1 liegenden; es ist mithin auch

$$\sum (v_2 + v_3) = \alpha(v_2 + v_3) - \delta_1(\nu + \varrho - 14)$$

bekannt. — Die y - und die z -Curve treffen g_1 zusammen an

$$(y) + (z) - \delta_1[v_2 + v_3 - \delta_1(\nu + \varrho - 14)]$$

freien Stellen; zieht man hiervon ab die nach (6) bekannten Zahlen

$$(g_{12}p_{23}f_1f_2f_3), (g_{13}p_{23}f_1f_2f_3),$$

so bleibt $c_{21} + c_{31}$, während

$$c_{23} = (y) + (z) - (g_1g_{23}f_1f_2f_3)_{\delta_2=0}$$

ebenfalls bekannt ist. Man erhält

$$(7) (g_1p_{23}f_1f_2f_3f_4) = \mu\nu\varrho\varrho + \mu\nu\nu\varrho - \mu\nu\nu' - \mu\varrho\varrho - \mu\nu\varrho - \delta_1(\nu\nu\varrho + \nu\varrho\varrho) \\ - \alpha(\mu\nu + \mu\varrho) + (2\delta_1 - 1)(\nu\nu + \varrho\varrho) + (2\delta_1 - 2)\nu\varrho \\ + (11 + 2\delta_1 + 3\delta_1\alpha)(\nu + \varrho) + 8(\alpha + 1)\mu \\ + (12 - 32\delta_1)\alpha - 54 - 64\delta_1.$$

8) Schaar $(g_1f_1f_2f_3f_4)$.

Zu einem auf g_1 gegebenen Punkte x gehören so viele Paare y, z , wie der Ausdruck (6) § 3. angiebt, in welchem μ durch ϱ ,

α durch $\alpha + 1$ zu ersetzen ist. Die Gleichung (4) liefert ausser dem Werthe von (y) noch

$$\sum v_2 = \alpha v_2 - \delta_1(\varrho\varrho - 6\alpha - 23),$$

wo

$$v_2 = \mu\varrho\varrho - 2\delta_1\varrho\varrho - (3\alpha + 8)\mu - 3\varrho + 12 + 12\delta_1\alpha + 40\delta_1.$$

Man hat weiter

$$c_{23} = (y) + (z) - (g_1 p_{23} f_1 f_2 f_3 f_4),$$

was nach (7) bekannt ist;

$$c_{12} = (y) - \delta_1(v_2 - \varrho\varrho + 6\alpha + 23) - (g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4),$$

was sich ebenfalls nach (5) berechnen lässt. Aus (y) , Σv_2 , c_{12} entsteht (z) , Σv_3 , c_{13} durch Vertauschung von v mit ϱ . — Es wird hiernach

$$\begin{aligned} (8) \quad (g_1 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5) &= \mu v v \varrho \varrho - \delta_1 \cdot v v \varrho \varrho - (\alpha + \delta_1) (\mu v v + \mu \varrho \varrho) \\ &\quad - \mu v \varrho - v v \varrho - v \varrho \varrho + 3\mu v + 3\mu \varrho \\ &\quad + (3 + 8\delta_1 + 3\delta_1 \alpha) (v v + \varrho \varrho) + 3\delta_1 \cdot v \varrho \\ &\quad + (6\alpha^2 + 30\alpha + 18) \mu + (6\alpha + 24 - 12\delta_1) (v + \varrho) \\ &\quad - 306 - \delta_1 (30\alpha^2 + 190\alpha + 230). \end{aligned}$$

Diese Gleichung lehrt sowohl die *Ordnung* des durch

$$f_1 = f_2 = \dots = f_5 = 0$$

bestimmten (x) -Ortes, als die *Vielfachheit* desselben in den Ausnahmepunkten kennen.

9) Schaar $g_1 p_{12} p_{13} f_1 f_2$.

Einem gegebenen (x) entsprechen

$$(x) = (v_1 - 1)(\varrho_2 - 1) + (v_2 - 1)(\varrho_1 - 1)$$

Paare y, z . Die Vielfachheit des z -Ortes in p_{13} beträgt

$$(g_3^2 g_1 p_{12} f_1 f_2),$$

was nach (3) § 3. berechnet werden kann; demnach ist

$$(z) = (x) + (g_3^2 g_1 p_{12} f_1 f_2); \quad (y) = (x) + (g_2^2 g_1 p_{13} f_1 f_2).$$

Liegt x in dem Schnittpunkte von g_1 mit der Verbindungsgeraden $p_{12} p_{13}$, so giebt es auf dieser Geraden nur noch

$$(v_1 - 2)(\varrho_2 - 2) + (v_2 - 2)(\varrho_1 - 2)$$

Paare von getrennt liegenden Punkten y, z ; und da jedes *verloren gehende Paar eine Coincidenz von y mit z anzeigt*, hat man

$$c_{23} = v_1 + v_2 + \varrho_1 + \varrho_2 - 6.$$

Endlich ist

$$c_{13} = (z), \quad c_{23} = (y),$$

$$\sum v_3 = (\alpha - \delta_1) (v_1 + v_2 - 2); \quad \sum v_2 = (\alpha - \delta_1) (\varrho_1 + \varrho_2 - 2).$$

Hieraus:

$$(9) \quad (g_1 p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3) = \mu v \varrho + v v \varrho + v \varrho \varrho - v v - \varrho \varrho - 2 v \varrho - \mu v \\ - \mu \varrho + 2 \mu - \delta_1 v \varrho + (2 + 3 \delta_1 - \alpha) (v + \varrho) \\ + 6 \alpha + 2 - 12 \delta_1.$$

$$10) \text{ Schaar } p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3.$$

Nach (9) sind bekannt (x) und

$$v_1 = v \varrho - 3 v - 3 \varrho + 12.$$

Die Vielfachheit der y -Curve in p_{12} ist

$$(g_2^2 p_{13} f_1 f_2 f_3) \quad [\text{vgl. (5) § 3.}];$$

man hat also

$$(y) = (g_2^2 p_{13} f_1 f_2 f_3) + (g_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3)_{\delta_1=0}, \quad [\text{vgl. (6)}],$$

$$(z) = (g_3^2 p_{12} f_1 f_2 f_3) + (g_{13} p_{12} f_1 f_2 f_3)_{\delta_1=0}.$$

Der Coefficient von $-\delta_1$ in (6) giebt, nach Vertauschung von μ mit v ,

$$v_1 + v_2 = v \varrho + \mu \varrho + \varrho \varrho - 2 \mu - 3 v - 8 \varrho - 3 \alpha + 27,$$

und da v_1 bereits gefunden ist:

$$v_2 = \mu \varrho + \varrho \varrho - 5 \varrho - 2 \mu - 3 \alpha + 15,$$

$$v_3 = \mu v + v v - 5 v - 2 \mu - 3 \alpha + 15.$$

Die c_{12} , c_{13} bestimmen sich mit Hülfe von (6). — *Coincidenzen von y mit z können nur auf der Geraden $p_{12} p_{13}$ liegen*, welche letztere von dem x -Orte, ausser in den beiden festen Punkten, noch in einer bekannten Anzahl von Stellen getroffen wird. Zu diesen gehören jedenfalls die in den

$$(g_{123} f_1 f_2 f_3) = \sum_1^3 (\mu_i - 2) (v_k - 2) (\varrho_k - 2)$$

Tripeln getrennt liegender Punkte enthaltenen x ; ausserdem aber

$$c_{23} = \mu v + \mu \varrho - 6 \mu - 3 v - 3 \varrho + 28$$

andere, deren zugehörige y , z zusammenfallen. — Das Ergebniss ist:

$$(10) \quad (p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu \mu v \varrho + \mu v v \varrho + \mu v \varrho \varrho + v v \varrho \varrho - \mu v v - \mu \varrho \varrho \\ - 2 \mu v \varrho - \mu \mu v - \mu \mu \varrho + 2 \mu \mu + 2 \mu v + 2 \mu - v - \varrho + 2 \mu \varrho \\ - 2 v \varrho \varrho - 2 v v \varrho + 4 v \varrho + 3 v v + 3 \varrho \varrho - \alpha \mu v - \alpha \mu \varrho - \alpha v v \\ - \alpha v \varrho - \alpha \varrho \varrho + 6 \alpha \mu + 11 \alpha (v + \varrho) + 6 \alpha^2 - 70 \alpha - 48.$$

11) Schaar $p_{12}f_1f_2f_3f_4$.

Die Mittel zur Berechnung der charakteristischen Zahlen für dieses Curventripel sind im Vorhergehenden enthalten.

Nach Vertauschung von μ mit ϱ , δ_1 mit δ_3 in (7) erhält man (z) und v_3 . Die Zahlen (x) , (y) bestimmt man wieder am bequemsten mit Hülfe des Princips der speciellen Lage, z. B.

$$(x) = (g_1^2 f_1 f_2 f_3 f_4) + (g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4)_{\delta_1=0}.$$

Ferner hat man:

$$\begin{aligned} c_{12} &= (g_1^2 f_1 f_2 f_3 f_4) + (g_2^2 f_1 f_2 f_3 f_4) + (g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4)_{\delta_1=0}; \\ c_{13} &= (x) + (z) - (p_{12} p_{13} f_1 f_2 f_3 f_4); \end{aligned}$$

endlich geben die in (5) mit $-\delta_1$ und $-\delta_1^2$ multiplicirten Glieder den Werth von $v_1 + v_2$. — Man findet

$$\begin{aligned} (11) \quad (p_{12} f_1 f_2 f_3 f_4 f_5) &= \mu \nu \nu \varrho \varrho + \mu \mu \nu \varrho \varrho - \nu \nu \varrho \varrho - \mu \mu \varrho \varrho - \mu \nu \varrho \varrho \\ &- \alpha(\mu \nu \nu + \mu \varrho \varrho + \nu \varrho \varrho + \mu \mu \nu) - 2\mu \mu \nu - 2\mu \nu \nu - 2\mu \nu \varrho \\ &- \mu \mu \varrho - \nu \nu \varrho + 11(\mu \varrho + \nu \varrho) + 14\mu \nu + 3\alpha \mu \nu + 8(\alpha + 1)\varrho \varrho \\ &+ (3\alpha + 11)(\mu \mu + \nu \nu) + (12\alpha - 54)\varrho + (6\alpha^2 + 18\alpha - 60)(\mu + \nu) \\ &- 80\alpha^2 - 462\alpha + 174. \end{aligned}$$

Die Zahlen (8) und (11) dienen zur Bestimmung des gesuchten Ausdrucks; mit Hülfe von (1) § 2. wird

$$\begin{aligned} (12) \quad (f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6) &= \mu \mu \nu \nu \varrho \varrho - \mu \mu \nu \varrho - \mu \nu \nu \varrho - \mu \nu \varrho \varrho \\ &+ 3(\mu \mu \nu + \mu \nu \nu + \mu \mu \varrho + \mu \varrho \varrho + \nu \nu \varrho + \nu \varrho \varrho) \\ &- (\alpha + 2)(\mu \mu \nu \nu + \mu \mu \varrho \varrho + \nu \nu \varrho \varrho) \\ &+ (6\alpha + 24)(\mu \nu + \mu \varrho + \nu \varrho) + (6\alpha^2 + 30\alpha + 18)(\mu \mu + \nu \nu + \varrho \varrho) \\ &- (60\alpha + 306)(\mu + \nu + \varrho) - 90\alpha^3 - 810\alpha^2 - 1716\alpha + 2358. \end{aligned}$$

Insbesondere ist also bei Gleichheit aller Gradzahlen und Symmetrie der Gleichungen in x, y, z die Zahl der Lösungen

$$\begin{aligned} (13) \quad 15n^6 - (360 + 90\alpha)n^4 + 360n^3 + (90\alpha^2 + 630\alpha + 990)n^2 \\ - (360\alpha + 1836)n - 15\alpha^3 - 135\alpha^2 - 286\alpha + 393. \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, dass die Gleichung (12) [und dasselbe gilt von (6) § 3.] nicht mehr in Anspruch genommen werden darf, wenn einige der Gradzahlen Null sind. Dieses ist in der Herleitung des Satzes (I) begründet. Enthielte die in § 1. mit φ bezeichnete Function nicht die Coordinaten aller r Punkte, sondern nur $x^{(1)}, \dots, x^{(s)}$ (wo $s < r$), so würde an die Stelle von (I) folgender Ausdruck treten:

$$n^{(1)}(x^{(1)}) + \dots + n^{(s)}(x^{(s)}) - \sum (v_1 + \dots + v_s) - \sum_1^s c_{ik},$$

der sich nicht durch die Specialisirung $n^{(s+1)} = \dots = n^{(r)} = 0$ aus dem allgemeinen herleiten lässt. Fehlt z. B. z in f_5 , so braucht man von den auf die Schaar 8) bezüglichen Zahlen nur $(x), (y), v_1, v_2, c_{12}$ zu kennen, um die Berechnung von $(g_1 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5)$ auszuführen. — Im Uebrigen bleibt die Rechnung genau dieselbe, nur muss sie für derartige Fälle besonders wiederholt werden.

§ 5.

Punktpaare im Raume.

Im Folgenden bezeichnet $\delta_i, \delta_{ii}, \delta_{ik}$ die Zahl der Ausnahmepunkte, die bzw. in der Ebene e_i , der Geraden e_i^2 , der Geraden $e_i c_k$ liegen; δ_{iik} ist = 1 oder 0, je nachdem der Punkt $e_i^2 c_k$ Ausnahmepunkt ist oder nicht.

Ohne weitere Rechnung bekannt sind die nachstehenden Zahlen, welche den später zu entwickelnden zu Grunde gelegt werden:

- a) $(e_1^3 g_{12}^2 f_1) = \nu_1 - 1$; b) $(e_1^3 e_2 g_{12} f_1) = \nu_1$; c) $(e_1^2 g_{12}^3 f_1) = 2\nu_1 - 2$.
 d) $(e_1^2 e_2 g_{12}^2 f_1) = \mu_1 + 2\nu_1 - 1 - \delta_{11}$;
 e) $(e_1^2 e_2^2 g_{12} f_1) = \mu_1 + \nu_1 - \delta_{11} - \delta_{22}$;
 f) $(e_1 e_2 g_{12}^3 f_1) = 2\mu_1 + 2\nu_1 - 2$; g) $(e_1 g_{12}^4 f_1) = 2\nu_1 - 2$;
 h) $(e_1^3 e_2 f_1 f_2) = \nu_1 \nu_2 - \delta_2$; i) $(e_1^3 g_{12} f_1 f_2) = \nu_1 \nu_2 - 1$;
 k) $(g_{12}^4 f_1 f_2) = 2(\mu_1 - 1)(\nu_2 - 1) + 2(\mu_2 - 1)(\nu_1 - 1)$;
 l) $(e_1^2 e_2^2 f_1 f_2) = (\mu_1 - \delta_{11})(\nu_2 - \delta_{22}) + (\mu_2 - \delta_{11})(\nu_1 - \delta_{22})$.

Die Gleichungen e) und l) gelten im Allgemeinen nicht mehr, wenn sich die Geraden e_1^2, e_2^2 treffen; wohl aber — und dieser Fall kommt allein in Betracht — wenn der Schnittpunkt Ausnahmepunkt ist.

Da die Berechnung der noch erforderlichen 16 Zahlen, welche wieder durch Abtrennung einer Bedingung f und Einführung einer Schaar von Punktpaaren geschieht, in allen Fällen leicht ist, sollen nur die Resultate und die zur Herleitung benutzten Zahlen angegeben werden.

$$(1) \quad (e_1^2 g_{12}^2 f_1 f_2) = \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 - \mu_1 - \mu_2 - \nu_1 - \nu_2 + 2\nu_1 \nu_1 - \delta_{11}(\nu_1 + \nu_2 - 2)$$

aus a), c) und d).

$$(2) \quad (e_1^2 e_2 g_{12} f_1 f_2) = \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 + \nu_1 \nu_2 - 1 - \delta_{11}(\nu_1 + \nu_2) - \delta_2 + \delta_{112}$$

aus b) und e), wegen $c = 1 - \delta_{112}$.

$$(3) \quad (e_1 g_{12}^3 f_1 f_2) = 2(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 + \nu_1 \nu_2 - \mu_1 - \mu_2 - \nu_1 - \nu_2 + 1)$$

aus c), f) und g).

$$(4) \quad (e_1 e_2 g_{12}^2 f_1 f_2) = 2(\mu_1 v_2 + \mu_2 v_1) + \mu_1 \mu_2 + v_1 v_2 - \mu_1 - \mu_2 - v_1 - v_2 - \delta_1 - \delta_2 + \delta_{12}$$

aus d) und f), wegen $c = \mu_1 + v_1 - \delta_{12}$.

$$(5) \quad (e_1^2 g_{12} f_1 f_2 f_3) = \mu v v + v_1 v_2 v_3 - \delta_{11}(v v - 4) - \mu - v - \alpha + 2$$

aus i), (1) und (2).

$$(6) \quad (e_1 g_{12}^2 f_1 f_2 f_3) = \mu \mu v + v_1 v_2 v_3 + 2 \mu v v - \mu \mu - v v - \mu v - \alpha + 2 - \delta_1(v - 4)$$

aus (1), (3), (4).

$$(7) \quad (e_1 e_2 g_{12} f_1 f_2 f_3) = \mu \mu v + \mu v v - \mu - v - \delta_1 v - \delta_2 \mu + 2 + 4 \delta_{12}$$

aus (2) und (4).

$$(8) \quad (g_{12}^3 f_1 f_2 f_3) = 2(\mu \mu v + \mu v v - \mu \mu - v v - \mu v + \mu + v)$$

aus (k) und (3).

$$(9) \quad (e_1 g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu \mu v v + \mu v v v - \mu \mu - v v - \mu v + 2 \mu + 2 v - \alpha \mu - 2 - \delta_1(v v - 12)$$

aus (5), (6), (7).

$$(10) \quad (g_{12}^2 f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu \mu \mu v + \mu v v v + 2 \mu \mu v v - \mu \mu \mu - v v v - \mu \mu v - \mu v v + 2 \mu + 2 v - \alpha(\mu + v - 10) - 4$$

aus (6) und (8).

$$(11) \quad (g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4 f_5) = \mu \mu \mu v v + \mu \mu v v v - \mu \mu \mu - v v v - \mu v v - \mu \mu v + 2 \mu \mu + 2 v v + 2 \mu v - 2 \mu - 2 v - \alpha(\mu \mu + v v - 34)$$

aus (9) und (10).

$$(12) \quad (e_1^2 e_2 f_1 f_2 f_3) = \mu v v - \delta_{11} v v - \delta_2 \mu + 3 \delta_{11} \delta_2 - 1 + \delta_{112}$$

aus h), l) und (2).

$$(13) \quad (e_1^2 f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu v v v - \mu - v - \alpha \mu + 4 - \delta_{11}(v v v - 4 \alpha - 6)$$

aus (12) und (5), wegen $(x) = v_1 v_2 v_3 - \alpha - 1$.

$$(14) \quad (e_1 e_2 f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu \mu v v - \mu - v + 4 - \delta_1 v v - \delta_2 \mu \mu + 6 \delta_1 \delta_2 + 6 \delta_{12}$$

aus (7) und (12).

$$(15) \quad (e_1 g_{12} f_1 f_2 f_3 f_4) = \mu \mu v v + \mu v v v - \mu \mu - v v - \mu v - \alpha \mu - \delta_1 v v + 2 \mu + 2 v - 2 + 12 \delta_1$$

aus (5), (6), (7).

$$(16) \quad (e_1 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5) = \mu \mu v v v - \delta_1 v v v - (\alpha + 1) \mu \mu - v v - \mu v + 4 \mu + 4 v - 10 + 10 \delta_1 \alpha + 24 \delta_1$$

aus (13), (14), (15).

Die Zahlen (11) und (16) sind es, aus welchen, nach (2) § 2., die gesuchte sich unmittelbar zusammensetzt. Man findet:

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6) &= \mu \mu \mu \nu \nu \nu - (\alpha + 1)(\mu \mu \mu + \nu \nu \nu) - \mu \mu \nu - \mu \nu \nu \\ &\quad + 4(\mu \mu + \nu \nu + \mu \nu) - 10(\mu + \nu) \\ &\quad + 20\alpha^2 + 82\alpha + 20.\end{aligned}$$

§ 6.

Punktgruppen auf einer Fläche.

Die Aufgabe, Punktgruppen auf einer gegebenen Fläche $F=0$ zu finden, welche $2r$ Bedingungen erfüllen, ist einerseits ein specieller Fall der auf Gruppen im Raume bezüglichen Probleme, sofern r Bedingungen nur aussagen, dass jeder Punkt auf F liegen soll; andererseits eine Verallgemeinerung der für Punktgruppen in der Ebene zu stellenden, da eine Gleichung

$$f_h(x^{(1)}; \dots; x^{(r)}) = 0$$

in Verbindung mit $F=0$, $2(r-1)$ -fach unendliche Systeme von Curven auf F darstellt, die in den Ausnahmepunkten und für $x^{(i)}=x^{(k)}$ das bekannte Verhalten zeigen.

Die Berechnung der fraglichen Zahlen ist nicht schwieriger als die für Gruppen in der Ebene, wie an dem Beispiele $r=2$ kurz ausgeführt werden möge. F sei (als Punktfläche) ohne Singularitäten, und von der Ordnung m .

Von den bekannten Zahlen

$$\begin{aligned}(e_1^2 e_2 g_{12}) &= m^2, & (e_1 e_2 g_{12}^2) &= 2m^2 - m, \\ (e_1^2 e_2 f_1) &= (m - \delta_{11})(m\nu_1 - \delta_2); & (e_1^2 f_1 f_2) &= (m - \delta_{11})(m\nu_1 \nu_2 - \alpha - 1)\end{aligned}$$

ausgehend, berechnet man leicht der Reihe nach die folgenden:

- (1) $(e_1 e_2 g_{12} f_1) = m^2(\mu_1 + \nu_1) - m(1 + \delta_1 + \delta_2) + \delta_{12}.$
- (2) $(e_1 e_2 f_1 f_2) = m^2(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1) - m[1 + \delta_1(\nu_1 + \nu_2) + \delta_2(\mu_1 + \mu_2)]$
 $\quad + 2\delta_1 \delta_2 + \delta_{12}.$
- (3) $(e_1 g_{12} f_1 f_2) = m^2(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1 + \nu_1 \nu_2) - m^2 - m(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2)$
 $\quad - m(\alpha - 2) - \delta_1(m\nu_1 + m\nu_2 - 3).$
- (4) $(g_{12}^2 f_1 f_2) = m^2(\mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 + 2\mu_1 \nu_2 + 2\mu_2 \nu_1)$
 $\quad - m(\mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 + \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1)$
 $\quad - m^2(\mu_1 + \mu_2 + \nu_1 + \nu_2) + 2m - 2\alpha(m - 1).$

$$(5) \quad (e_1 f_1 f_2 f_3) = m^2 \cdot \mu \nu \nu - \alpha m \mu - m \mu - \mu \nu - m^2 + 4m \\ - \delta_1 (m \nu \nu - 3\alpha - 5).$$

$$(6) \quad (g_1 f_1 f_2 f_3) = m^2 (\mu \mu \nu + \mu \nu \nu - \mu - \nu) - m (\mu \mu + \nu \nu + \mu \nu) \\ - (\alpha - 2) m (\mu + \nu) + 2m^2 - 2m + 8\alpha.$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$(f_1 f_3 f_3 f_4) = m^2 (\mu \mu \nu \nu - \mu - \nu + 4) - \alpha (m + 1) (\mu \mu + \nu \nu) \\ - m (\mu \nu - 4\mu - 4\nu + 10) + 6\alpha^2 + 18\alpha.$$

Für $m = 1$ ergibt sich hieraus die in (6) § 3. berechnete Zahl

December 1881.