DEFORMAZIONE DI UN CERCHIO ELASTICO ISOTROPO

PER DATI SPOSTAMENTI AL CONTOURNO

Nota del Dottor GIUSEPPE LAURICELLA.

1. Le equazioni dell'equilibrio delle superficie piane elastiche isotrope, quando la componente nella direzione (z) normale alla superficie è nulla e le componenti delle forze applicate ai punti della superficie elastica sono pure nulle ⁽¹⁾, sono:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} L\Delta^2 u + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0 \\ L\Delta^2 v + (L + K) \frac{\partial \theta}{\partial y_1} = 0 \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \\ \theta = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_1} \end{array} \right)$$

nelle quali x_1, y_1 sono le coordinate del punto che si considera, rispetto agli assi cartesiani ortogonali x, y giacenti sulla superficie elastica; L, K due quantità costanti dipendenti dalla natura della materia di cui la superficie è formata.

Il problema di trovare le componenti della deformazione di un cerchio elastico isotropo per dati spostamenti al contorno, nel caso che non si abbia nessuno spostamento nel senso normale al cerchio, equivale evidentemente al seguente: *Date arbitrariamente due funzioni finite e continue $u(m), v(m)$ dei punti m della circonferenza s di un cerchio σ , trovare due funzioni Q, S , le quali nei punti n del cerchio soddisfino alle equazioni (1) dell'equilibrio e coll'avvicinarsi indefinitamente di uno di questi punti ad un punto μ di s , tendano rispettivamente ai valori $u(\mu), v(\mu)$.*

Risolverò qui appunto questo problema, adoperando un metodo che ha molta simiglianza con quello tenuto nella ci-

⁽¹⁾ Si potrebbe dimostrare che il problema generale dell'equilibrio di una superficie piana elastica, si può ridurre, analogamente a ciò che si fa nel caso dei solidi elastici (v. mia Memoria: *Equilibrio dei corpi elastici isotropi* Cap. III, § 2. — Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1894), ad un problema analogo nel quale le componenti delle forze che agiscono nei punti della superficie sono nulle; onde l'ipotesi da noi fatta, non arrecò restrizione al una.

tata mia Memoria (v. cap. IV), per risolvere il problema analogo della sfera.

Credo utile poi far notare, che le formule stabilite nel § 3 di questa Nota sono generali, e possono essere usati per risolvere il problema delle deformazioni di una superficie elastica qualsiasi a contorno convesso, analogamente a quanto fu fatto, nel capitolo V della mia Memoria, per le deformazioni dei solidi elastici.

2. Posto :

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2},$$

$$M = -\frac{L + K}{3L + K},$$

si può facilmente verificare, che i tre sistemi di funzioni:

$$u_1 = \log r + M \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2, \quad v_1 = M \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y};$$

$$u_2 = \frac{\partial \log r}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \log r}{\partial y};$$

$$u_3 = \frac{\partial \log r}{\partial y}, \quad v_3 = -\frac{\partial \log r}{\partial x};$$

sono integrali delle equazioni (1); onde saranno integrali delle stesse equazioni gli altri sistemi di funzioni:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial \log r}{\partial n} + M \left\{ 2 \frac{x - x_1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial n} - 2 \left(\frac{x - x_1}{r} \right)^2 \frac{\partial \log r}{\partial n} \right\} \\ &= \frac{\partial \log r}{\partial n} + M \left\{ 2 \frac{\partial \log r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \log r}{\partial n} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial n} = M \left\{ \frac{x - x_1}{r^3} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{y - y_1}{r^3} \frac{\partial x}{\partial n} - 2 \frac{x - x_1}{r} \frac{y - y_1}{r} \frac{\partial \log r}{\partial n} \right\} \\ &= M \left\{ \frac{\partial \log r}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \log r}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} - 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \log r}{\partial n} \right\}; \end{aligned}$$

$$w_2 = u_2 \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial \log r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n}, \quad v_2 = v_2 \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial \log r}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n};$$

$$w_3 = u_3 \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial \log r}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n}, \quad v_3 = v_3 \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial \log r}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n};$$

e quindi anche l'altro:

$$\begin{aligned} a &= u'_1 - M u'_2 + M u'_3 = (1+M) \frac{\partial \log r}{\partial n} - 2 M \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \log r}{\partial n}, \\ b &= v'_1 - M v'_2 + M v'_3 = - 2 M \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \log r}{\partial n}. \end{aligned}$$

Ora quando il punto (x_1, y_1) è interno ad una porzione finita σ di piano, si ha, come è noto:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\partial \log r}{\partial n} ds &= 2\pi, \quad \int_s 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \log r}{\partial n} ds = 2\pi, \\ \int_s \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \log r}{\partial n} ds &= 0, \end{aligned}$$

in cui s è il contorno di σ ; quando invece il suddetto punto è su s , ammesso che ivi questo contorno abbia una tangente determinata, si ha:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\partial \log r}{\partial n} ds &= \pi, \quad \int_s 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \log r}{\partial n} ds = \pi, \\ \int_s \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \log r}{\partial n} ds &= 0. \end{aligned}$$

Avremo dunque per i punti (x_1, y_1) interni a σ :

$$(2) \quad \int_s a ds = 2\pi, \quad \int_s b ds = 0,$$

e per i punti (x_1, y_1) di s :

$$(3) \quad \int_s a' ds = \pi, \quad \int_s b' ds = 0,$$

dove a' , b' sono i valori che le funzioni a , b prendono nei punti di s .

3. Sia $u(m)$ una qualsiasi funzione finita e continua dei punti m di s , ed n un punto qualunque nell'interno della superficie elastica σ . Le espressioni:

$$(4) \quad U(n) = \frac{1}{\pi} \int_s u(m) \cdot a \, ds, \quad V(n) = \frac{1}{\pi} \int_s u(m) \cdot b \, ds$$

sono evidentemente due funzioni monodrome finite e continue dei punti n di σ , che soddisfano alle equazioni (1) dell'equilibrio.

Am messo che la linea s abbia in ogni suo punto una tangente determinata, vediamo che cosa accade di queste funzioni, quando il punto n si avvicina indefinitamente ad un punto μ di s . Osserviamo intanto che dalle (2) si ha:

$$U(n) = \frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} a \, ds + 2u(\mu),$$

$$V(n) = \frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} b \, ds;$$

e poichè, come si può facilmente dimostrare (Cfr. Memoria citata, Cap. IV, § 2), gli integrali:

$$\frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} a' \, ds, \quad \frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} b' \, ds$$

sono propri, e quindi gli altri:

$$\frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} a \, ds, \quad \frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} b \, ds$$

sono funzioni finite e continue di tutti i punti (x_1, y_1) del piano di σ , si avrà:

$$\lim_{n=\mu} U(n) = \frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} a' \, ds + 2u(\mu),$$

$$\lim_{n=\mu} V(n) = \frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} b' \, ds.$$

Ora si ha dalle (3), (4):

$$U(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_s u(m) \cdot a' ds = \frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} a' ds + u(\mu),$$

$$V(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_s u(m) \cdot b' ds = \frac{1}{\pi} \int_s \{u(m) - u(\mu)\} b' ds;$$

onde potremo scrivere:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \mu} U(n) = U(\mu) + u(\mu), \quad \lim_{n \rightarrow \mu} V(n) = V(\mu).$$

Similmente, considerando l'altro sistema integrale delle equazioni (1):

$$a_1 = -2M \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \log r}{\partial n},$$

$$b_1 = (1+M) \frac{\partial \log r}{\partial n} - 2M \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial \log r}{\partial n},$$

introducendo le espressioni:

$$U'(n) = \frac{1}{\pi} \int_s v(m) \cdot a_1 ds, \quad V'(n) = \frac{1}{\pi} \int_s v(m) \cdot b_1 ds,$$

nelle quali $v(m)$ è una funzione arbitraria dei punti di s finita e continua, ed indicando con a'_1, b'_1 i valori delle funzioni a_1, b_1 nei punti μ di s , avremo:

$$U'(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_s v(m) \cdot a'_1 ds, \quad V'(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_s v(m) \cdot b'_1 ds;$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \mu} U'(n) = U'(\mu), \quad \lim_{n \rightarrow \mu} V'(n) = V'(\mu) + v(\mu)^1).$$

1) Queste formole generali possono, come ho fatto notare al § 1, essere utili nella integrazione delle equazioni (1) per mezzo di serie.

4. Posto ora che la superficie σ sia un cerchio di raggio R , se indichiamo con r_0 le distanze contate a partire dal punto arbitrario μ , avremo ovviamente:

$$u' = \left\{ (1+M) \left(-\frac{1}{2R} \right) - 2M \left(\frac{x-x_1}{r_0} \right)^2 \left(-\frac{1}{2R} \right) \right\} = \frac{1}{2R} \left\{ -(1+M) + 2M \left(\frac{x-x_1}{r_0} \right)^2 \right\}$$

$$v' = \left\{ -2M \frac{x-x_1}{r_0} \frac{y-y_1}{r_0} \left(-\frac{1}{2R} \right) \right\} = \frac{1}{2R} \left\{ 2M \frac{x-x_1}{r_0} \frac{y-y_1}{r_0} \right\},$$

e quindi:

$$U(\mu) = \frac{1}{2\pi R} \int_s u(m) \left\{ -(1+M) + 2M \left(\frac{x-x_1}{r_0} \right)^2 \right\} ds,$$

$$V(\mu) = \frac{1}{2\pi R} \int_s u(m) \left\{ 2M \frac{x-x_1}{r_0} \frac{y-y_1}{r_0} \right\} ds,$$

Le espressioni:

$$M(n) = -\frac{1}{\pi R} \int_s u(m) \cdot \left(u_1 - \frac{1+M}{2} \right) ds, \quad N(n) = -\frac{1}{\pi R} \int_s u(m) \cdot r_1 ds$$

sono evidentemente due funzioni finite e continue in tutto il piano di σ , che nei punti del cerchio σ soddisfano alle equazioni (1). Esse poi nel punto μ di s divengono:

$$M(\mu) = -\frac{1}{\pi R} \int_s u(m) \left\{ \log r_0 - \frac{1+M}{2} + M \left(\frac{x-x_1}{r_0} \right)^2 \right\} ds,$$

$$N(\mu) = -\frac{1}{\pi R} \int_s u(m) \left\{ M \frac{x-x_1}{r_0} \frac{y-y_1}{r_0} \right\} ds.$$

5. Poniamo l'origine degli assi nel centro del cerchio σ , indichiamo con ϕ la funzione di GREEN relativa a σ e scriviamo:

$$\rho^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

Poichè:

$$\Delta^2 \phi = 0,$$

se le due funzioni

$$(6) \quad \xi = \phi + \xi', \quad \eta = \eta'$$

sono un sistema di integrali delle equazioni (1), si deve avere:

$$(7) \quad \begin{cases} L\Delta^2 \xi' + (L+K) \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_1} = 0 \\ L\Delta^2 \eta' + (L+K) \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y_1} = 0. \end{cases} \quad \left(\mathfrak{P} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi'}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta'}{\partial y_1} \right)$$

Determiniamo le ξ', η' in modo che su s si annullino. Per questo poniamo:

$$\xi' = \xi'' - \frac{L+K}{2L} x_1 \mathfrak{P}, \quad \eta' = \eta'' - \frac{L+K}{2L} y_1 \mathfrak{P}$$

e calcoliamo ξ'', η'' in modo che nei punti di σ soddisfino alla equazione $\Delta^2 = 0$ e che nei punti di s prendano rispettivamente i valori:

$$\frac{L+K}{2L} x_1 \mathfrak{P}, \quad \frac{L+K}{2L} y_1 \mathfrak{P}.$$

Distinguendo con un apice i valori che prende $\mathfrak{P}$ nei punti di s , si ha, come è noto:

$$\xi'' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi R} \int_s \frac{x \mathfrak{P}'}{r^3} ds, \quad \eta'' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi R} \int_s \frac{y \mathfrak{P}'}{r^3} ds;$$

e poichè, come risulta facilmente dalle (7), la funzione $\mathfrak{P}$ è armonica, si avrà pure:

$$(8) \quad \mathfrak{P} = \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi R} \int_s \frac{\mathfrak{P}'}{r^3} ds.$$

Avremo dunque:

$$\xi' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi R} \int_s \frac{(x - x_1) \mathfrak{P}'}{r^3} ds, \quad \eta' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{2\pi R} \int_s \frac{(y - y_1) \mathfrak{P}'}{r^3} ds,$$

e posto:

$$(9) \quad H = \int_s \mathfrak{H} \log r' ds,$$

avremo ancora:

$$(10) \quad \xi' = -\frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2-\rho^2}{2\pi R} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \eta' = -\frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2-\rho^2}{2\pi R} \cdot \frac{\partial H}{\partial y_1}.$$

Dalle (6), (10) si deduce, poichè $\mathfrak{H}$ è funzione armonica:

$$2\pi R \mathfrak{H} = 2\pi R \frac{d\phi}{\partial x_1} + \frac{L+K}{L} \rho \frac{dH}{d\rho},$$

e dalle (8), (9):

$$(11) \quad 2\pi R \mathfrak{H} = \int_s \mathfrak{H} ds + 2\rho \frac{dH}{d\rho};$$

quindi, posto $t = \frac{L}{L-K}$, si avrà:

$$2\pi R t \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = t \int_s \mathfrak{H} ds + \rho \frac{dH}{d\rho}$$

Derivando la precedente relazione rispetto ad x_1 , si avrà:

$$2\pi R t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = \frac{x_1}{\rho} \frac{dH}{d\rho} + \rho \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{dH}{d\rho};$$

e poichè:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{dH}{d\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{x_1}{\rho^2} \frac{dH}{d\rho},$$

avremo ancora:

$$2\pi R t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial H}{\partial x_1} + \rho \frac{d}{d\rho} \frac{\partial H}{\partial x_1}$$

ossia:

$$(12) \quad 2\pi R t \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{\partial H}{\partial x_1} \right).$$

Poichè per $\rho = 0$ si ha:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2\pi R} \int_s \mathfrak{S}' ds,$$

avremo dalla (11):

$$0 = \left(\rho \frac{\partial H}{\partial \rho} \right)_{\rho=0} = \left(\rho \frac{\partial H}{\partial x_1} \cos(\rho x) + \rho \frac{\partial H}{\partial y_1} \cos(\rho y) \right)_{\rho=0}$$

indipendentemente dalla direzione di ρ , e quindi:

$$\left(\rho \frac{\partial H}{\partial x_1} \right)_{\rho=0} = \left(\rho \frac{\partial H}{\partial y_1} \right)_{\rho=0} = 0.$$

Ciò posto, dalla (12) se ne deduce integrando:

$$2\pi R t \int_0^\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} d\rho = \rho \frac{\partial H}{\partial x_1}.$$

Similmente si avrà:

$$2\pi R t \int_0^\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y_1} d\rho = \rho \frac{\partial H}{\partial y_1};$$

e quindi dalle (6), (10):

$$\xi = \Phi - \frac{L+K}{2(L-K)} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{\rho} \int_0^\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} d\rho,$$

$$\eta = - \frac{L+K}{2(L-K)} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{\rho} \int_0^\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y_1} d\rho.$$

I due precedenti integrali delle equazioni (1) sono funzioni finite e continue dei punti di σ , che nei punti di s divengono:

$$\xi = \log r_0, \quad \eta = 0.$$

6. Ciò posto, consideriamo le due funzioni finite e continue dei punti di σ e di s :

$$\xi_1(n) = \frac{1}{\pi R} \int_{\sigma} u(m) \cdot \xi ds, \quad \eta_1(n) = \frac{1}{\pi R} \int_{\sigma} u(m) \cdot \eta ds.$$

Evidentemente esse rappresentano un sistema di integrali delle equazioni (1), tali che

$$\lim_{n \rightarrow \mu} \xi_1(n) = \frac{1}{\pi R} \int_{\sigma} u(m) \cdot \log r_0 ds, \quad \lim_{n \rightarrow \mu} \eta_1(n) = 0.$$

Allora se consideriamo le due funzioni:

$$Q_1(n) = U(n) + M(n) + \xi_1(n),$$

$$S_1(n) = V(n) + N(n) + \eta_1(n),$$

avremo che esse soddisfano in tutti i punti della superficie σ alle equazioni (1) e sono tali che

$$\lim_{n \rightarrow \mu} Q_1(n) = u(\mu), \quad \lim_{n \rightarrow \mu} S_1(n) = 0.$$

Nello stesso modo potremo costruire due integrali:

$$Q_2(n), \quad S_2(n)$$

delle equazioni (1), tali che

$$\lim_{n \rightarrow \mu} Q_2(n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \mu} S_2(n) = v(\mu).$$

Finalmente se prendiamo:

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad S = S_1 + S_2,$$

avremo due funzioni Q, S , che risolvono evidentemente il problema proposto.