8. Zur Magnetisirung eiserner Hohl- und Vollcylinder; von H. du Bois.

(Hierzu Taf. VI Fig. 10.)

§ 1. Von Hrn. Grottrian ist kürzlich eine ähnlich betitelte Experimentaluntersuchung veröffentlicht worden. Aus einer Stange ausgeglühten Schweisseisens wurde eine Anzahl Kreiscylinder fast gleicher Dimensionen ($L = 10,96$ cm; $a = 3,31$ cm; $m = 3,31$) angefertigt.¹⁾ Drei davon blieben Vollcylinder, deren Moment sich übereinstimmend merklich proportional dem Spulenstrome erwies; aus Hrn. Grottrian's Fig. 13 ergeben sich folgende Proportionalitätsfactoren:

$$(1) \quad \mathfrak{M} = 2500 I' = 93,3 \mathfrak{H}_e,$$

da $\mathfrak{H}_e = 26,9 I'$ zu setzen ist (l. c. p. 730). Die übrigen Cylinder wurden concentrisch ausgebohrt; es ergaben sich dann folgende bemerkenswerthe Thatsachen:

1. Bei einer Wanddicke von nur noch 0,287 cm sank das Moment des Hohlcyllinders bis zu Spulenfeldern von 300 C.G.S. *et. par.* kaum unter dasjenige des ursprünglichen Vollcylinders hinab, so dass es sich bis zu 100 C.G.S. um weniger als 1 Proc. von jenem unterschied.

2. Auch bei noch geringeren Wanddicken stimmten die Curven $\mathfrak{M} = \text{Funct.} (\mathfrak{H}_e)$ anfangs mit derjenigen der Vollcylinder, und daher auch untereinander, merklich überein, bogen sich jedoch um so früher nach grösseren Abscissen zu von jenen hinweg, je dünnwandiger der Hohlcylinder war.

Aus jenen Ergebnissen lässt sich zunächst nachstehender empirischer Satz folgern:

1) Grottrian, Wied. Ann. 50. p. 705. 1893. Im Folgenden sind nachstehende Bezeichnungen benutzt: L , Cylinderlänge; a , äusserer Durchmesser; d , Wanddicke; $S = \pi d(a - d)$, Querschnitt; $V = LS$, Volum; $m = L/a$, äusseres Dimensionsverhältniss; N , Entmagnetisirungsfactor; I' Spulenstrom (in Ampère ausgedrückt); $\mathfrak{H}_e$, Feldintensität; $\mathfrak{J}$, Magnetisirung; $\mathfrak{M} = V\mathfrak{J}$, magnetisches Moment. Horizontalbalken über den Buchstaben bedeuten Mittelwerthe; die Indices H oder V beziehen sich auf Hohl- bezw. Volleylinder.

I. *Bei geringen Sättigungsgraden ist das Moment eines Hohlcyinders von gegebenen äusseren Dimensionen in einem bestimmten Felde merklich unabhängig von der Wanddicke, und zwar innerhalb ihres ganzen möglichen Bereichs. Die mittlere Magnetisirung ist daher umgekehrt proportional dem Querschnitt.*

Hr. Grottrian zieht ferner (l. c. p. 737) aus seinen Versuchsergebnissen folgende Schlüsse:

„Aus den Beobachtungen ergibt sich dagegen andererseits in Uebereinstimmung mit den Resultaten von v. Feilitsch¹⁾, dass in *merklicher* Weise bei schwachen magnetisirenden Kräften zunächst nur die äusseren Schichten magnetisirt werden. Denn in Fig. 13 fallen die Curven in ihrem anfänglichen Verlaufe nahezu zusammen, und erst bei stärkeren Strömen finden grössere Abweichungen statt.“

„Diese Thatsache ist für den Bau von electrischen Maschinen nicht ohne Bedeutung. Wenn es sich darum handelt, eine möglichst leichte Maschine herzustellen, dann wird es sich empfehlen, die Electromagnete hohl herzustellen, wie das bereits bei der Thomson-Houston'schen Maschine geschieht. Bei passender Wahl der Weite der Höhlung, die von der magnetisirenden Kraft bei normalem Betriebe abhängt, muss man merklich dasselbe Magnetfeld wie durch einen massiven Electromagnet erhalten.“

„Ferner möge darauf hingewiesen werden, dass der sogenannte magnetische Widerstand, eine bei der Berechnung electrischer Maschinen verwendete Grösse, bei geringem Sättigungsgrade dem Eisenquerschnitt auch nicht angenähert umgekehrt proportional sein kann, sobald man eiserne Hohlcyinder in den Kreis der Betrachtung hineinzieht.“

§ 2. Ich glaube die erwähnten experimentellen Ergebnisse mittelst einiger, aus der gewöhnlichen Theorie der Selbstentmagnetisirung für den Fall dünnwandiger Hohlcyinder hergeleiteter, einfacher Folgerungen erklären zu können. Es brauchen dann obige, unseren üblichen Grundannahmen völlig zuwiderlaufende Schlüsse nicht nothwendigerweise gezogen zu werden. Des besseren Verständnisses halber sei es mir gestattet auf eine frühere Arbeit kurz zurückzugreifen;

1) v. Feilitsch, Pogg. Ann. **81**. p. 321. 1850.

darin hatte ich theoretisch nachgewiesen, dass für dünne Vollcylinder der mittlere Entmagnetisirungsfactor (d. h. die mittlere entmagnetisirende Intensität pro Magnetisirungseinheit) proportional dem Querschnitt, bzw. dem reciproken Quadrat des Dimensionsverhältnisses wird, wofern letzteres etwa den Werth 100 übertrifft. Beobachtungen von Hrn. Ewing (für $300 \geq m \geq 50$) bestätigten dieses Resultat und ergaben den Zahlenfactor 45.

Aus Curven des Hrn. Tanakadaté wurden ferner vorläufig Werthe von $\bar{N}$ für $50 \geq m \geq 10$ erhalten und tabellarisch zusammengestellt.¹⁾ Mittelst dieser Entmagnetisirungsfactoren lassen sich bekanntlich aus der normalen (für endlose Gebilde geltenden) Magnetisirungscurve diejenigen für Körper von endlicher Gestalt durch „Curvenscheerung“ bequem ermitteln. Bei grösseren Werthen von $\bar{N}$ (etwa $\bar{N} > 0,1$) weicht, namentlich für sehr weiches Eisen, die Magnetisirungscurve zunächst kaum merklich von einer Geraden, der „Entmagnetisirungslinie“

$$(2) \quad \mathfrak{Z} = \frac{1}{\bar{N}} \mathfrak{H}_e$$

ab; es wird daher auch

$$(3) \quad \mathfrak{M} = \frac{V}{\bar{N}} \mathfrak{H}_e$$

oder für Körper von unveränderlichem Querschnitt S :

$$(3a) \quad \mathfrak{M} = \frac{S}{\bar{N}} L \mathfrak{H}_e.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich ein für den vorliegenden Zweck verwendbarer, meines Wissens bisher nicht aufgestellter Satz ohne weiteres folgern:

II. *Falls bei beliebig profilirten cylindrischen oder prismatischen Körpern von gegebener Länge der mittlere Entmagnetisirungsfactor proportional dem Querschnitt ist und keinen allzu geringen Werth aufweist, so wird in einem bestimmten Felde das Moment unabhängig vom Querschnitt sein.*

Bei dünnen Vollcylindern trifft z. B. nach dem Vorigen erstere Voraussetzung zu, sobald $m > 100$; dagegen ist aber $\bar{N} < 0,0045$, d. h. zu gering, als dass der Einfluss des Materials

1) H. du Bois, Wied. Ann. **46**. p. 498. 1892. Im hiesigen Institute sollen mittelst eines stufenweise dünner abzdrehenden homogenen Vollcylinders von unveränderlicher Länge für $50 \geq m \geq 5$ einwurfsfreie Werthe für $\bar{N}$ auf experimentellem Wege ermittelt werden.

zu vernachlässigen wäre. Deren magnetisches Moment ist daher nicht völlig unabhängig vom Querschnitt, nimmt aber immerhin nur langsam ab, wenn dieser verringert wird (vergl. § 6).

Da das Volum der Vollcylinder bei Hrn. Grottrian im Mittel nahe 93,3 ccm betrug, folgt ferner aus Gleichung (1) und (3), dass für dieselben zufällig $\bar{N} = 1$ war. Dieser Werth stimmt gut überein mit demjenigen, welchen ich aus meiner oben citirten Tabelle durch graphische Interpolation zwischen $m = 0$ und $m = 5$ für $m = 3,31$ ermitteln konnte. Es ergibt sich ferner in derselben Weise $\bar{N} = 1,08$ für $m = \pi$, ein Werth, der weiter unten zur Verwendung gelangen soll.

§ 3. Untersuchen wir nun, inwiefern obige Voraussetzungen (Satz II) für zunächst dünnwandig gedachte Hohlcylinder von gegebenen äusseren Dimensionen zutreffen; diese Untersuchung lässt sich ganz analog der von mir (l. c. p. 496) für dünne Vollcylinder mitgetheilten durchführen; weiterer Einzelheiten wegen sei auf diese hingewiesen.

Wir beschränken uns auf geringe Sättigungsgrade; bei einem bestimmten Mittelwerth $\bar{S}$ der Magnetisirung denken wir uns, dass die Wandung durch weiteres Ausbohren verdünnt werde; die „magnetische Stärke“ ($\bar{S}$) verringert sich dann proportional dem Querschnitt S des ringförmigen Profils. Machen wir ferner die — zumal bei geringer Wanddicke wohl gerechtfertigte — Voraussetzung, dass die relative „lineare Vertheilung“ der Magnetisirung sich bei der Verdünnung der Wand nicht erheblich ändere; dann wird die „Lineardensität“ der auf den schmalen flachringförmigen Enden und auf den benachbarten Theilen der Mantelflächen vertheilten fictiven Fluida merklich proportional der magnetischen Stärke, d. h. dem Querschnitt. Dasselbe gilt dann für die durch deren Fernwirkung bedingte selbstentmagnetisirende Intensität in jedem Punkte im Innern, also ebenfalls für ihren Mittelwerth, und schliesslich der vorausgesetzten Constanz der Magnetisirung halber auch für den mittleren Entmagnetisirungsfactor. Da letzterer ausserdem recht beträchtliche Werthe erreicht (vgl. Tab. 1), so sind beide Voraussetzungen des Satzes II erfüllt. Es muss demnach das Moment dünnwandiger Hohlcylinder in der That *cet. par.* unabhängig von ihrem Querschnitt sein, sofern die Sättigung ausgeschlossen ist.

§ 4. Hierdurch wird das anfangs sub 2) erwähnte, von Hrn. Grottrian mit dünnwandigen Hohlcylindern — deren Wanddicke bis zu 9 Proc. des äusseren Durchmessers betrug — erhaltene Resultat erklärlich. Dagegen lässt sich das sub 1) angeführte Ergebniss, dass nämlich das Moment des dickwandigsten der untersuchten Hohlcylinder sogar demjenigen des Vollecylinders merklich gleichzusetzen ist, theoretisch wohl kaum in einwurfsfreier Weise herleiten. Es ist daher als empirisch gegeben zu betrachten und lässt sich wie folgt verwerthen.

Erstens ergibt sich daraus ohne weiteres, dass das Moment der zwischenliegenden dickwandigen Hohlcylinder, für die $0,287 < d < 1,655$ cm ist, *cet. par.* ebenfalls merklich den gleichen Werth aufweisen wird. Hieraus lässt sich dann schliessen, dass der Entmagnetisirungsfactor eines Hohlcylinders über das ganze Bereich der möglichen Wanddicken ($0 < d < a/2$) mit grosser Annäherung proportional seinem Querschnitt ist.

Unterscheiden wir nun die auf äusserlich gleich dimensionirte Hohl- oder Vollecylinder bezüglich den Grössen durch die Indices H bzw. V , so lässt sich mittelst obiger Beziehung der unbekannte Werth von $\bar{N}_H$ aus dem bekannten von $\bar{N}_V$ offenbar durch folgende einfache Gleichung herleiten:

$$(4) \quad \bar{N}_H = \frac{S_H}{S_V} \bar{N}_V.$$

Wenn man die Ausdrücke für S_H und S_V einsetzt, so wird

$$(5) \quad \bar{N}_H = 4 \bar{N}_V \frac{d}{a} \left(1 - \frac{d}{a} \right),$$

oder bei sehr geringer Wanddicke näherungsweise:

$$(5a) \quad \bar{N}_H = \frac{4 d \bar{N}_V}{a}$$

§ 5. Zur besseren Veranschaulichung der vorhergehenden Entwicklungen habe ich die Curven

$$\mathfrak{M} = \text{funct. } (\mathfrak{H}_e)$$

für einen concreten Fall entworfen. Dabei ist eine kürzlich von Hrn. H. Lehmann ¹⁾ mitgetheilte Normalcurve für weiches schwedisches Eisen zu Grunde gelegt; indessen kommt es, wie

1) H. Lehmann, Wied. Ann. **48**, p. 406. 1893.

gesagt, in den anfänglichen Stadien der Curven auf die specifischen Eigenschaften des Materials kaum an. Es wurden behufs bequemerer Rechnung folgende, den oben angegebenen Grottrian'schen naheliegende, abgerundete Dimensionen gewählt:

Hohlcyylinder: $L = 10$ cm; $a = 3,18$ cm; daher $m = L/a = \pi$ und der Umfang $\pi a = L = 10$ cm; die Werthe von $\bar{N}_H$ wurden für vier Wanddicken ($d = 0,30, 0,20, 0,10, 0,05$ cm) nach Gleichung (5) berechnet und in Tab. 1 verzeichnet. Mittels dieser wurden dann die entsprechenden vier punktirten Curven der Fig. 10 (Taf. VI) erhalten.

Volleycyylinder: Des besseren Vergleiches halber sind in Tab. 1 auch die Entmagnetisirungsfactoren $\bar{N}_V$ für vier dünnere Volleycyylinder angeführt, die bei derselben Länge die gleiche abnehmende Reihe der Querschnitte — und daher der Volume — aufweisen, wie die vier Hohlcyylinder. Jene Factoren wurden aus dem Dimensionsverhältniss $m = L/a_V$ in der in § 2 angegebenen Weise hergeleitet; die Beziehung $\mathfrak{M} = \text{funct.}(\mathfrak{H}_e)$ ist hier durch die voll ausgezogenen Linien der Fig. 10 dargestellt.

Tabelle 1.
Cylinderlänge $L = 10$ cm.

Nr.	Hohl: $a = 3,18$ cm; $m = \pi$			Volleycyylinder			
	d	S_H	N_H	S_V	a_V	m	$\bar{N}_V$
I voll	1,59	7,95	1,080	7,95	3,18	π	1,080
II	0,30	2,72	0,370	2,72	1,86	5,37	0,514
III	0,20	1,87	0,255	1,87	1,55	6,45	0,403
IV	0,10	0,97	0,132	0,97	1,11	9,01	0,249
V	0,05	0,49	0,067	0,49	0,79	12,66	0,154

§ 6. Vergleicht man nun erstens jede der vier punktirten Curven mit der dem ursprünglichen Volleycyylinder entsprechenden fast geraden Linie I, so sieht man, dass sie in der That anfangs kaum von ihr abweicht. Erst bei höheren Sättigungsgraden biegt sie sich allmählich von ihr hinweg; und zwar wird eine bestimmte Abscissendifferenz bei einer Ordinate, d. h. bei einem Moment, welches dem Volum des Hohlcyinders proportional ist — also bei einer bestimmten Magnetisirung — erreicht. Letztere und der Werth der gedachten Abscissendifferenz sind entsprechende Coordinaten der *normalen* Magne-

tisirungscurve¹⁾, wie sich aus der Art der Erzeugung der Curven durch Scheerung leicht folgern lässt. Eine analoge, jedoch hiermit nicht identische Zahlenbeziehung hat Hr. Grottrian (l. c. p. 738) aus seinem Beobachtungsmaterial hergeleitet. Ueberhaupt ist der Charakter des Curvenbildes ganz ähnlich demjenigen der Fig. 13 bei Hrn. Grottrian.

Was zweitens die ausgezogenen Curven für die Vollcylinder betrifft, so weichen diese von vorneherein mehr von der Geraden 1 ab; bei zunehmendem Sättigungsgrade nähern sie sich dagegen, ebenso wie die Curven für die Hohlcylinder vom gleichen Querschnitt, je einer und derselben Asymptote parallel der Abscissenaxe, wie es offenbar der Fall sein muss.

In Fig. 10 ist ausserdem für ein bestimmtes Spulenfeld ($\mathfrak{H}_e = 200$ C. G. S.) das Moment der Hohl- und Vollcylinder als Function ihres Querschnitts²⁾ dargestellt. Aus der punktirten Curve $\overline{HH}$ geht hervor wie bei den Hohl cylindern das Moment bei zunehmender Wanddicke zuerst rasch — ungefähr proportional dem Querschnitt — ansteigt, bis dieser etwa 1 qcm beträgt, entsprechend der bis dahin herrschenden Sättigung. Nach einer Uebergangsbiegung nimmt dagegen das Moment im Bereiche $2 < S < 7,95$ qcm kaum noch merklich zu, wie es dem ungesättigten Zustand nach dem Vorigen entspricht. Die ausgezogene Curve $\overline{VV}$ für Vollcylinder zeigt jene Eigenschaften in weniger ausgeprägtem Maasse (vgl. § 2), entfernt sich aber immerhin noch bedeutend von der strich-punktirten Geraden $\overline{GG}$, welche eine beständige Proportionalität des Moments mit dem Querschnitt darstellen würde.

§ 7. Aus diesem Verhalten der Vollcylinder zu schliessen, dass deren centrale Fasern in vorwiegenderem Maasse magnetisirt werden, wäre offenbar ungerechtfertigt; es handelt sich eben nur um den bekannten Einfluss der Gestalt, welcher bei dickeren Cylindern denjenigen des Materials weit übertrifft.

1) Diese Beziehung ist, wie alle mitgetheilten Entwicklungen, streng genommen nur eine angenäherte; durch Vergleich der Fig. 10 mit der Normalcurve gg von Hrn. H. Lehmann (l. c. Fig. 1) lässt sie sich graphisch bestätigen. Die Aenderung der Entmagnetisirungsfactoren bei hohen Sättigungsgraden wurde hier nicht berücksichtigt.

2) Dabei ist dieser an dem besonderen Hilfsabscissenmaassstab bei der Ordinate 16 000 abzulesen.

Ebensowenig vermag ich nach alledem den diametral entgegengesetzten Schlüssen von Hrn. Grotrian beizupflichten, welche er aus dem Verhalten kurzer Hohlcyliner zieht.

Falls die Eisenrohre dagegen zu geschlossenen Hohlringen gebogen würden und sich dann bei dem üblichen ballistischen Verfahren *et. par.* keine Proportionalität des Galvanometerausschlags — und damit der „magnetischen Leitfähigkeit“ — mit dem Querschnitt ergäbe, müsste man freilich eine ungleichförmige Vertheilung der Magnetisirung in einem oder dem anderen Sinne annehmen.¹⁾ Ein solcher Befund dürfte aber beim heutigen Stande unserer Erfahrungen, solange das Gegentheil nicht nachgewiesen ist, zum mindesten als unwahrscheinlich betrachtet werden, wenigstens so weit es sich um stationäre magnetische Zustände handelt. Dass bei rasch variirender Magnetisirung die äussere Rinde eines massiven Eisenkerns eine erhebliche Schirmwirkung auf das Innere ausübt, beruht bekanntlich auf der Wirkung der inducirten Foucault-Ströme, die sich durch passende Zertheilung beliebig einschränken lässt.

Was schliesslich die von Hrn. Grotrian angeführte Dynamomaschine Thomson-Houston'scher Construction betrifft, so ist der Querschnitt ihrer hohlen Electromagnete immer noch reichlich bemessen im Vergleich zum Gesamtquerschnitt der Eisenstangen, welche den magnetischen Kreis schliessen. Ferner überwiegt bekanntlich im allgemeinen der magnetische Widerstand der kupfernen Armaturleiter und des Luftspielraumes derart, dass ein Beschweren der Maschine durch Ausfüllen der Hohlräume in diesem Falle vielleicht keinen entsprechenden Nutzen bringen würde.

Berlin, Physikal. Inst. der Univ., Weihnachten 1893.

1) Vergl. ferner Bosanquet, *Phil. Mag.* (5) **19**. p. 81. 1885; Leduc, *Journ. de Phys.* (2) **6**. p. 239. 1887 und *La Lumière électrique*, **28**. p. 520. 1888; Silv. Thompson (*The Electromagnet*, 2. Aufl. p. 86, 180ff., London 1892) erklärt die oben erwähnten Ergebnisse v. Feilitzsch's bereits durch den in allen Fällen angenähert gleichen, überwiegenden magnetischen Luftwiderstand; ein von mir (l. c. p. 489) hergeleiteter Satz verräth aber Beziehungen zwischen dem Widerstand des äusseren Interferriums und der inneren Entmagnetisirung; letztere lässt sich bei Cylindern leichter rechnerisch verfolgen als jener, weswegen ich sie im Texte zur Erklärung der Grotrian'schen Ergebnisse herangezogen habe.