Con queste resistenze, con questo rocchetto e con 15 correnti indotte al secondo, bastava un solo elemento Daniell a produrre nel galvanometro una deviazione molto maggiore di un metro. Dunque la sensibilità sarà più che sufficiente.

§ 6.° Adoperando poi una pila di alcuni Daniell, la sensibilità sarebbe sufficiente anche per misurare un millesimo di *microfaraday*: ed a più forte ragione per misurare quella d'un condensatore ad aria formato di due dischi circolari di 20° di raggio, posti alla distanza di 0°,1; perchè un tal condensatore ha la capacità di circa 10^3 unità elettrostatiche C. G. S., mentre un *microfaraday* non ha che $9 \times 10^{10-6-9} = 9 \times 10^5$ di questa unità.

Ciò posto, e disponendo di un condensatore ad aria di capacità C, in misura elettrostatica, esattamente dedotta dalle sue dimensioni, potrò determinare anche il valore della costante:

$$v = \sqrt{\frac{C}{C}} = \sqrt{\frac{C, RG}{M}} = \sqrt{\frac{C, mRG}{x}} = \sqrt{C, MG'R'},$$

che si sa essere approssimativamente uguale alla velocità di propagazione della luce.

Firenze, 8 Agosto 1884.

INTORNO AD UN PROBLEMA RELATIVO ALLA TEORIA DELLE CORRENTI
STAZIONARIE; NOTA DEL PROF. E. BELTRAMI.

In una Nota inserita negli *Atti del R. Istituto Lombardo*, 1878 (*Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse*) ho indicato un procedimento, mediante il quale, dalla conoscenza delle funzioni associate di un sistema simmetrico qualunque, si può passare facilmente a quella delle analoghe funzioni per il sistema, pure simmetrico, ottenuto dal precedente coll' inversione rispetto ad un punto dell' asse di simmetria. Di tale procedimento ho fatto nel 1882 l' applicazione ad un problema di elettrostatica (*Memoria sulle funzioni associate e spe-*

cialmente su quelle della calotta sferica, nel T. IV, Serie IV delle *Memorie dell' Accademia di Bologna*). Mi propongo ora di indicare un'altra semplicissima applicazione dello stesso metodo, relativa alla teoria delle correnti stazionarie.

Il procedimento in questione, enunciato sotto la forma adottata nella seconda delle citate Memorie, consiste in ciò che segue: Sia U la funzione potenziale d'un sistema simmetrico, V la funzione associata, talchè si abbia:

$$(1) \quad \frac{dV}{du} = u \frac{dU}{dz}, \quad \frac{dV}{dz} = -u \frac{dU}{du},$$

dove u è la distanza del punto variabile dall'asse di simmetria e z la distanza dello stesso punto da un piano fisso, normale a quest'asse. Si determini la funzione W , integrando il differenziale esatto

$$(1)_a \quad dW = U d \frac{z}{\rho} + V d \frac{1}{\rho},$$

dove ρ è la distanza del punto variabile dall'origine ($u=0, z=0$). Coll'aiuto di questa funzione W si possono determinare in due modi le funzioni associate U' , V' del sistema ottenuto dal precedente coll'inversione rispetto all'origine. Si può, in primo luogo, porre

$$W' = C W \rho,$$

dove C è una costante, e, dopo avere espresso W' colle coordinate u', z' del punto inverso di (u, z) si ha l'equazione analoga alla (1)_a

$$dW' = U' d \frac{z'}{\rho'} + V' d \frac{1}{\rho'},$$

che individua le funzioni U' , V' . Oppure si può porre addirittura, designando con R il raggio d'inversione,

$$(1)_b \quad U' = C U \rho, \quad V' = C R^2 \left(W - \frac{V}{\rho} \right),$$

equazioni i cui secondi membri debbono esprimersi in funzione delle coordinate del punto inverso. Usando questa seconda maniera, giova approfittare dell'eguaglianza

$$(1)_c \quad d\left(W - \frac{V}{\rho}\right) = d\left(\frac{Uz}{\rho}\right) - \frac{z dU + dV}{\rho},$$

che risulta dall'equazione (1)_a ed il cui secondo membro si può fare anche dipendere, mercè le equazioni (1), dalla sola funzione U.

Ciò premesso consideriamo il moto stazionario dell'elettricità in una sfera di centro O, di raggio R e di conducibilità γ , messa in comunicazione con una corrente d'intensità I nei due punti P, P' della sua superficie. La funzione potenziale interna dell'elettricità libera è stata determinata, per questo caso, da Felici fino dal 1847, nell'antico *Cimento*. (Veggasi anche la *Nuova nota sulla propagazione dell'elettricità voltaica nell'interno di una sfera*, inserita dallo stesso Autore, nel luglio 1854, negli antichi *Annali* di Tortolini, dove la soluzione è estesa al caso dei poli interni). La detta funzione, considerata sotto la forma ad essa assegnata nel 1853 da Helmholtz (*Wiss. Abhandl.*, T. I, p. 496), è la seguente.

$$(2) \quad U = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r'} + \frac{1}{R} \log \frac{r' + R - \rho \cos \theta'}{r + R - \rho \cos \theta} \right),$$

dove r, r' sono le distanze di un punto qualunque dello spazio sferico da P, P', e dove θ, θ' sono gli angoli che il raggio vettore ρ , condotto dal centro O al detto punto, fa coi raggi condotti a P, P'. Denominando U' la funzione potenziale esterna della stessa elettricità, si trova facilmente, coll'inversione rispetto alla superficie sferica $\rho = R$,

$$(2)' \quad U' = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r'} + \frac{1}{\rho} \log \frac{r' + \rho - R \cos \theta'}{r + \rho - R \cos \theta} \right),$$

dove r, r', ρ sono le distanze di un punto esterno qualunque da P, P', O. La densità dell'elettricità libera è data da

$$(2)_a \quad h = \frac{I}{\gamma(4\pi R)^2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\theta'}{2}} + \log \frac{\sin \frac{\theta'}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta'}{2} \right)}{\sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)} \right).$$

Il sistema qui considerato diventa simmetrico rispetto all'asse P, P' quando i punti P, P' sono diametralmente opposti.

In questo caso, assumendo per piano $z=0$ il piano dell'equatore, si ha

$$(3) \quad U = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r'} + \frac{1}{R} \log \frac{r' + R + z}{r + R - z} \right),$$

$$(3)' \quad U' = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r'} + \frac{1}{\rho} \log \frac{r' + \rho + R \cos \theta}{r + \rho - R \cos \theta} \right),$$

dove θ conserva il significato di prima. Questo valore di U' , nel quale ρ è il raggio vettore del punto esterno, corrisponde a quello dato dalla prima equazione (1)_b, qualora si ponga

$$(3)_a \quad C = \frac{1}{R}.$$

La densità h si può esprimere, in questo caso particolare, colla formola

$$(3)_b \quad h = \frac{I}{\gamma(4\pi R)^2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\theta'}{2}} + \log \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta'}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{4}} \right),$$

dove $\theta' = \pi - \theta$. Essa è quindi nulla all'equatore ed eguale e contraria su due paralleli equidistanti da questo.

Per trovare la funzione V , associata ad U , basta osservare che per la funzione

$$U = \frac{1}{r},$$

dove r è la distanza di un punto variabile da un punto fisso dell'asse di simmetria, si ha

$$V = \frac{dr}{dz};$$

e che per la funzione

$$U = \log(r + R \pm z), \quad [r = \sqrt{u^2 + (z \pm R)^2}]$$

la quale è pure una funzione potenziale, si trova facilmente, mediante le equazioni (1),

$$V = \pm r - z.$$

Si ha quindi, per la funzione V associata alla (3),

$$V = \frac{I}{4\pi\gamma} \left\{ 2 \frac{d(r - r')}{dz} + \frac{r + r'}{R} \right\},$$

espressione la quale, tenendo conto delle relazioni

$$r^2 = u^2 + (z - R)^2, \quad r'^2 = u^2 + (z + R)^2,$$

si riduce agevolmente alla forma

$$(4) \quad V = \frac{I}{8\pi R\gamma} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) (r^2 + r'^2 - 4R^2),$$

Ne segue che l'equazione delle correnti che esistono in ciascun piano meridiano è

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) (4R^2 - r^2 - r'^2) = c,$$

dove c è una costante che può prendere tutti i valori fra 0 e $4R$. Per $c = 0$ si hanno le correnti semicircolari che lambiscono la superficie della sfera, per $c = 4R$ si ha la corrente rettilinea che va dal polo P al polo P' .

Resta da determinare la funzione V associata ad U , ed a questo uopo, anzichè operare direttamente su quest'ultima funzione, ci varremo delle formole (1)_{a, b, c}, approfittando, come precedentemente, della possibilità di scomporre le funzioni U, V in parti corrispondenti e di formare la funzione W per ciascuna di queste parti.

Considerando i termini corrispondenti della forma

$$U_1 = \frac{1}{r}, \quad V_1 = \frac{z - R}{r},$$

si ha (1)_a

$$\begin{aligned} dW_1 &= \frac{1}{r} d\frac{z}{\rho} + \frac{z - R}{r} d\frac{1}{\rho} \\ &= \frac{\rho dz + (R - 2z) d\rho}{r\rho^2} \end{aligned}$$

e si trova subito

$$W_1 = -\frac{r}{R\rho}, \quad W_1 - \frac{V_1}{\rho} = \frac{Rz - \rho^2}{Rz\rho}.$$

Cambiando R in $-R$ si ottiene di qui

$$U_2 = \frac{1}{r'}, \quad V_2 = \frac{z + R}{r'},$$

$$W_2 = \frac{r'}{R\rho}, \quad W_2 - \frac{V_2}{\rho} = \frac{Rz + \rho^2}{Rr'\rho}.$$

Consideriamo in secondo luogo i termini corrispondenti della forma

$$U_3 = \log(r + R - z), \quad V_3 = -(r + z).$$

Dalla equazione (1)_c si ha

$$d\left(W_3 - \frac{V_3}{\rho}\right) = d\left(\frac{z \log(r + R - z)}{\rho}\right) + \frac{(r + R - 2z)dr + (r + R)dz}{(r + R - z)\rho}.$$

Si verifica facilmente che l'ultimo termine del secondo membro ha per integrale

$$\log \frac{r + R + \rho}{r + R - \rho},$$

epperò si ha

$$W_3 - \frac{V_3}{\rho} = \frac{z \log(r + R - z)}{\rho} - \log \frac{r + R - \rho}{r + R + \rho}.$$

Similmente, per

$$U_4 = \log(r' + R + z), \quad V_4 = r' - z,$$

si ottiene

$$W_4 - \frac{V_4}{\rho} = \frac{z \log(r' + R + z)}{\rho} + \log \frac{r' + R - \rho}{r' + R + \rho}.$$

Ricomponendo insieme queste diverse espressioni, nel modo indicato dalla formola (2) si ottiene

$$W - \frac{V}{\rho} = \frac{1}{4\pi R\gamma} \left\{ \frac{2Rz}{\rho} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) - 2\rho \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right. \\ \left. + \frac{z}{\rho} \log \frac{r' + R + z}{r + R - z} + \log \frac{(r + R - \rho)(r' + R - \rho)}{(r + R + \rho)(r' + R + \rho)} \right\}.$$

L'ultimo termine del secondo membro può essere semplificato, perchè, tenendo conto delle relazioni

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2Rz, \quad r'^2 = \rho^2 + R^2 + 2Rz,$$

si trova

$$(r + R + \rho)(r' + R + \rho) = \frac{1}{2}(r + r' + 2R)(r + r' + 2\rho),$$

$$(r + R - \rho)(r' + R - \rho) = \frac{1}{2}(r + r' + 2R)(r + r' - 2\rho).$$

Anche il penultimo termine può essere trasformato, giacchè, eliminandone z mediante la relazione

$$r'^2 - r^2 = 4Rz,$$

si trova

$$r + R - z = \frac{(r + r' + 2R)(r - r' + 2R)}{4R},$$

$$r' + R + z = \frac{(r + r' + 2R)(r' - r + 2R)}{4R}.$$

Si può dunque scrivere

$$W - \frac{V}{\rho} = \frac{1}{4\pi R\gamma} \left\{ \frac{z}{\rho} \left[2 \left(\frac{R}{r} - \frac{R}{r'} \right) + \log \frac{2R + r' - r}{2R + r - r'} \right] \right. \\ \left. + \log \frac{r + r' - 2\rho}{r + r' + 2\rho} - 2 \left(\frac{\rho}{r} + \frac{\rho}{r'} \right) \right\}.$$

Ora non resta che da introdurre in questa espressione le coordinate r, r', ρ del punto inverso, e per operare tale trasformazione basta osservare che le quantità

$$\frac{r}{\rho}, \quad \frac{r'}{\rho}, \quad \frac{R}{\rho}$$

si convertono nelle

$$\frac{r}{R}, \quad \frac{r'}{R}, \quad \frac{\rho}{R}$$

e reciprocamente, mentre la quantità

$$\frac{z}{\rho}$$

rimane invariata, come coseno di un angolo invariabile. Si ottiene così (1)_b, (3)_a

$$(4)' \quad V' = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(2 \frac{z - R}{r} - 2 \frac{z + R}{r'} \right. \\ \left. + \frac{z}{\rho} \log \frac{2\rho + r' - r}{2\rho + r - r'} + \log \frac{r + r' - 2R}{r + r' + 2R} \right).$$

Tale è la funzione V' associata ad U' , cioè quella funzione che, eguagliata ad una costante arbitraria, rappresenta, in ogni piano meridiano, le linee di forza esterne dell'elettricità libera.

Considerando due punti simmetrici rispetto al piano dell'equatore, è evidente che le quantità

$$r, \quad r', \quad \rho, \quad z$$

relative all'uno di essi, sono rispettivamente uguali alle quantità

$$r', \quad r, \quad \rho, \quad -z$$

relative all'altro. In base a ciò si riconosce immediatamente che le linee di forza esterne sono, come le correnti interne, simmetriche rispetto al piano dell'equatore. Ne segue che la linea di forza che esce da un punto della superficie sferica torna a raggiungere questa superficie nel punto simmetrico ad esso rispetto all'equatore.

Nei punti della superficie sferica si ha

$$\rho = R, \quad z = R \cos \theta, \quad r = 2R \sin \frac{\theta}{2}, \quad r' = 2R \cos \frac{\theta}{2},$$

quindi la funzione V' ha in questi punti i valori dati dall'espressione

$$\begin{aligned} \frac{I}{4\pi\gamma} & \left(-2 \sin \frac{\theta}{2} - 2 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \theta \log \frac{1 + \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} \right. \\ & \left. + \log \frac{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} - 1}{\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} + 1} \right), \end{aligned}$$

la quale si semplifica alquanto introducendo di nuovo l'angolo $\theta' = \pi - \theta$, giacchè essa diventa

$$\frac{I}{4\pi\gamma} \left\{ -2 \sin \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta'}{2} + \cos \theta \log \left(\cot \frac{\theta}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta'}{4} \right) + \log \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{4} \operatorname{tg} \frac{\theta'}{4} \right) \right\},$$

o meglio

$$\frac{I}{2\pi\gamma} \left(-\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta'}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{4} + \sin^2 \frac{\theta'}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\theta'}{4} \right).$$

Quest' espressione prende in amendue i poli il valore

$$-\frac{I}{2\pi\gamma}.$$

Poichè dunque si può sempre disporre d'una costante additiva, giova considerare, in luogo della precedente, l'espressione

$$(5) \Theta = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{\theta'}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{4} + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta'}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\theta'}{4} \right),$$

la quale si annulla ai due poli.

Così determinato il valore di V' alla superficie della sfera, se si denota con E la carica della calotta limitata dal parallelo θ e comprendente il polo P , si ha, per note proprietà delle funzioni associate,

$$E = -\frac{\Theta}{2},$$

e questo valore s'accorda esattamente con quello che si deduce dall'integrazione della formola (3)_b. La carica dell'emisfero di centro P è data quindi da

$$E = \frac{I}{4\pi\gamma} \left\{ \sqrt{2} - 1 - \log (\sqrt{2} - 1) \right\} = 0,1031 \frac{I}{\gamma};$$

quella dell'altro emisfero è eguale e contraria.

Per ben comprendere la distribuzione delle linee di forza esterne, bisogna considerare i seguenti tre valori particolari del loro parametro V' :

$$V' = 0,$$

$$V' = -\frac{I}{2\pi\gamma},$$

$$V' = -\frac{I}{2\pi\gamma} \left\{ \sqrt{2} + \log (\sqrt{2} + 1) \right\}.$$

Il primo di questi valori corrisponde (come risulta dall'equazione (4)') alla linea di forza costituita dai due opposti prolungamenti del diametro PP' ; il secondo è (come abbiamo veduto dianzi) il limite dei valori che assume V' sulla superficie sferica per $\theta = 0$ e per $\theta = \pi$; il terzo è il valore di V' lungo l'equa-

tore della superficie sferica ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Le linee di forza il cui parametro V' è compreso fra il primo ed il secondo valore partono tutte dal polo P e vanno al polo P' . Quelle invece il cui parametro V' è compreso fra il secondo ed il terzo valore, vanno da un parallelo della superficie sferica al parallelo simmetrico: l'ultima di queste linee si riduce ad un punto dell'equatore. Denominando ϑ l'angolo che una linea del primo gruppo fa in P od in P' coll'asse prolungato, si trova

$$V' = -\frac{I}{\pi \gamma} \operatorname{sen}^2 \frac{\vartheta}{2} :$$

quindi le linee comuni al primo ed al secondo gruppo sono tangenti alla superficie sferica nei due poli P, P' .

DELLE VARIAZIONI NELLA INTENSITÀ E NELLA FORZA ELETTROMOTRICE
IN UNA COPPIA ELETTRICA AD ACQUA DI MARE; NOTA DEL PROF.
CARLO CATTANEO.

1. Tempo fa mi venne riferita la notizia che stavasi studiando il modo di ottenere, mediante opportuno motore elettromagnetico, il movimento di una nave servendosi direttamente della energia elettrica, data dalla trasformazione dell' energia chimica dell'acqua marina in un sistema di coppie zinco-rame. È ben noto come si possa ottenere la produzione di una corrente elettrica in tale sistema corrispondentemente alle reazioni chimiche, le quali si effettuano particolarmente fra lo zinco ed il cloruro di sodio contenuto nell'acqua salsa, cioè alla separazione del cloro dal sodio ed alla formazione di cloruro di zinco. Il problema proposto alla scienza sarebbe risoluto teoricamente e praticamente, qualora una serie non troppo numerosa di tali coppie elettriche potesse divenire una sorgente costante e vigorosa d'elettricità. Mi parve però che prima di tentare il caso pratico per la risoluzione del problema, non sarebbe stato al tutto inopportuno lo stabilire accuratamente quali fossero le variazioni che una coppia zinco-rame