

## 12.

## Bemerkungen zu den elliptischen und Abelschen Transcendenten.

(Von Hrn. Stud. G. Eisenstein zu Berlin.)

**D**as unendliche Product

$$1. \quad \Pi\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) = \begin{cases} P(0; x), \\ P(1; x), \end{cases}$$

welches zwei Ausdrücke repräsentirt, je nachdem man den Index  $\lambda$  alle geraden oder alle ungeraden Werthe durchlaufen läßt, und in welchem wir uns den Factor  $1 + \frac{x}{0}$  durch  $x$  ersetzt denken, hat für jeden reellen und imaginären Werth von  $x$  einen ganz bestimmten Werth von der Form  $p + q\sqrt{-1}$ , der sich leicht durch Exponentialfunctionen, oder, was im Grunde dasselbe ist, durch Kreisfunctionen darstellen läßt; und umgekehrt geben die beiden unendlichen Producte, von welchen wir sprechen, eine vollständige Definition der allgemeinen Sinus und Cosinus oder der einfach-periodischen Functionen.

Die elliptischen Transcendenten, diese merkwürdige Gattung von Functionen, welche die Geometer in der neueren Zeit so vielfach beschäftigt hat, sind nichts anders, als Verbindungen durch die *Division* aus den vier unendlichen *Doppelproducten*, welche sich aus dem Product

$$2. \quad \Pi\left(1 - \frac{x}{\lambda + \lambda' A}\right)$$

ergeben, wenn man das Multiplicationszeichen  $\Pi$  über alle geraden oder alle ungeraden Werthe von  $\lambda$  und eben so über alle geraden oder alle ungeraden Werthe von  $\lambda'$  ausdehnt, während  $A$  eine gegebene Constante vorstellt. Bezeichnen wir der Anschaulichkeit halber diese vier Producte durch

$$3. \quad P(0, 0; x), \quad P(1, 0; x), \quad P(0, 1; x), \quad P(1, 1; x),$$

wo die 0 jedesmal einem geraden, die 1 einem ungeraden Index entsprechen soll, so sind die drei gewöhnlich vorkommenden elliptischen Functionen durch die drei folgenden Quotienten gegeben:

$$4. \quad \frac{P(0, 0; x)}{P(0, 1; x)}, \quad \frac{P(1, 0; x)}{P(0, 1; x)}, \quad \frac{P(1, 1; x)}{P(0, 1; x)},$$

welche die merkwürdige Eigenschaft besitzen, doppelt-periodisch zu sein.

Die Constante  $A$  darf nie einen reellen Werth erhalten; denn für einen reellen und irrationalen Werth von  $A$  würde man auf unendlich viele Arten die ganzen Zahlen  $\lambda$  und  $\lambda'$  so bestimmen können, daß der Ausdruck

$$\lambda + \lambda' A$$

kleiner wird, als eine beliebige, noch so kleine gegebene Zahl; und für einen rationalen Werth von  $A$  würde man eine Zahl finden können, welcher dieser Ausdruck für unendlich viele ganze Werthe von  $\lambda$  und  $\lambda'$  gleich wird; in beiden Fällen kann also das unendliche Product nicht convergiren. Man pflegt gewöhnlich  $A$  rein imaginär, d. h. von der Form  $q\sqrt{-1}$  anzunehmen, wo  $q$  reell ist; aber man mag der Constante  $A$  einen complexen Werth geben, welchen man will: immer wird das unendliche Doppelproduct (2.) für jeden Werth von  $x$  einen ganz bestimmten Werth annehmen.

Aus der Definition, welche so eben von den elliptischen Transcendenten gegeben wurde, und welche umfassender sein dürfte, als die gewöhnliche, lassen sich auf sehr einfachem Wege alle Eigenschaften dieser Functionen herleiten. In kurzen Worten will ich ein Bild von dem Wege entwerfen, welchen man zu dem Ende nehmen könnte.

Zunächst kann man die unendlichen Doppelproducte durch wirkliche Ausführung der Multiplication nach einem der beiden Indices mit Hülfe der bekannten Formeln für die Kreisfunctionen auf eine doppelte Weise in einfache unendliche Producte verwandeln, und man erhält auf diesem Wege die bekannten Entwicklungen der elliptischen Functionen in unendliche Producte (*Evolutio prima; Jacobi Fundamenta nova pag. 86*). Betrachtet man die gewonnenen Resultate näher, so sieht man, daß sie aus den zwei neuen Functionen bestehen:

$$5. \quad \begin{cases} \varphi(x) = \left(x + \varepsilon \frac{1}{x}\right) \left(1 + \varepsilon q^2 x^2\right) \left(1 + \varepsilon q^2 \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \varepsilon q^4 x^2\right) \left(1 + \varepsilon q^4 \frac{1}{x^2}\right) \text{ in inf.,} \\ \psi(x) = \left(1 + \varepsilon q x^2\right) \left(1 + \varepsilon q \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \varepsilon q^3 x^2\right) \left(1 + \varepsilon q^3 \frac{1}{x^2}\right) \text{ in inf.,} \end{cases}$$

wo  $x$  eine neue Variable vorstellt, die als Exponentialfunction von  $x$  erscheint,  $q$  eine Constante, die von  $A$  abhängt, und  $\varepsilon = \pm 1$  ist.

Durch bloße Substitution der Werthe kann man sich nun überzeugen, daß die beiden Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  den Gleichungen

$$6. \quad \varphi(x) = \varepsilon q x^2 \varphi(qx) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \varepsilon q x^2 \psi(qx)$$

genügen, mit deren Hülfe sich sogleich die Entwicklung in Reihen ausführen läßt. Man setze

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} K_{2n+1} x^{2n+1}, \quad \psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} L_{2n} x^{2n};$$

so erhält man vermöge der Gleichungen (6.) die Coefficientengleichungen

$$\begin{aligned} K_{2n+3} &= \varepsilon q^{2n+2} K_{2n+1}, \\ L_{2n+2} &= \varepsilon q^{2n+1} L_{2n}, \end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$7. \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) &= K_1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon^n q^{n(n+1)} x^{2n+1}, \\ \psi(x) &= L_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varepsilon^n q^{n^2} x^{2n}. \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Evolutio tertia; Fundamenta} \\ \textit{pag. 183.} \end{array} \right.$$

Es ist sehr merkwürdig, dafs jede Potenz von  $\varphi$  und  $\psi$ , ja selbst jede beliebige homogene Function der beiden Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  in eine ganz ähnliche Reihe entwickelt werden kann, wenn sie nur nicht vom Oten Grade ist. Es sei in der That  $F$  eine homogene Function vom  $k$ ten Grade. Vermöge der Gleichungen (6.) ist

$$F[\varphi(x), \psi(x)] = F[\varepsilon q x^2 \varphi(qx), \varepsilon q x^2 \psi(qx)],$$

und vermöge der Eigenschaften der homogenen Functionen,

$$F[\varepsilon q x^2 \varphi(qx), \varepsilon q x^2 \psi(qx)] = \varepsilon^k q^k x^{2k} F[\varphi(qx), \psi(qx)].$$

Setzt man demnach  $F[\varphi(x), \psi(x)] = G(x)$ , so hat man die Relation

$$8. \quad G(x) = \varepsilon^k q^k x^{2k} G(qx),$$

welche als Fundamentalformel für die Entwicklung benutzt werden mufs. Durch eine specielle Anwendung des eben angedeuteten Princips gelangt man auch dahin, zu beweisen, dafs die Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  einer Differentialgleichung von der Form

$$9. \quad \left[ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]^2 = p \varphi^4 + p' \varphi^3 \psi + p'' \varphi^2 \psi^2 + p''' \varphi \psi^3 + p'''' \psi^4$$

genügen, oder dafs der Quotient  $y = \frac{\varphi}{\psi}$  der Differentialgleichung

$$10. \quad \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = p y^4 + p' y^3 + p'' y^2 + p''' y + p''''$$

genughut, wo  $p, p'$  etc. Constanten sind, die nur von  $A$  abhängen.

## §. 2.

Der so eben mit flüchtigen Worten angedeutete Gang möchte sich besonders Denjenigen empfehlen, welche durch die sehr complicirten Betrachtungen der Integralrechnung, von denen man gewöhnlich bei der Theorie der

elliptischen Transcendenten auszugehen pflegt, von dem Studium der letzteren abgeschreckt werden. Diese Betrachtungen scheinen sich auch in der That weniger zum Ausgangspuncte für eine so wichtige Theorie zu eignen, und bezeichnen wohl nur mehr den historischen Weg, auf welchem die Resultate gefunden worden sind. Die gewöhnliche Definition, welche man, ganz gegen die Analogie bei den Exponentialfunctionen, von den elliptischen Functionen giebt, ist diejenige, dafs sie die umgekehrten Functionen der bekannten Integrale sind, bei welchen die ganze Function unter der Quadratwurzel bis auf den vierten Grad steigt. Aber da schon die deutliche Vorstellung eines solchen Integrals, dessen Differential plötzlich vom Reellen zum Imaginären übergeht, nicht eben leicht ist, so möchte es wohl dem Lernenden fast unmöglich scheinen, sich *a priori* einen klaren Begriff von der Umkehrung einer solchen Integralfunction zu bilden, zumal da hier die geometrische Anschauung gebricht, welche man wenigstens bei den Kreisfunctionen noch zu Hülfe rufen kann. Eine besondere Schwierigkeit bringt die Periodicität hinein. Gehen wir, um nur von einer einfachen Periode zu reden, für einen Augenblick auf die Kreisfunctionen zurück. Wollte man für diese z. B. den Sinus als diejenige Function  $y$  von  $x$  definiren, welche durch die Gleichung

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{1-y^2}} = x$$

gegeben ist, so müfste man, in Übereinstimmung mit den bekannten Eigenschaften der Sinus, behaupten, dafs das Integral für jeden gegebenen Werth von  $y$  unendlich viele verschiedene Werthe annimmt, obwohl dies mit der gewöhnlichen Bedeutung, welche man einem solchen Integrale (z. B. für  $y < 1$ ) unterlegt, im Widerspruche steht. Auf dieselbe Weise müfste man wegen der doppelten Periodicität von  $\sin ax$  behaupten, dafs das elliptische Integral

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)\sqrt{1-k^2y^2}}} = x$$

für jeden Werth von  $y$  sogar unendlich mal unendlich viele verschiedene Werthe annimmt.

Noch gröfsere Schwierigkeiten zeigen sich bei den Abelschen Integralen. Die umgekehrten Functionen dieser Integrale müssen eine drei- oder mehrfache Periodicität besitzen. Nun darf man aber nur ganz einfach und consequent auf Dasjenige fortbauen, was *Jacobi* im 13ten Bande des gegenwärtigen Journals (*De funct. duarum variab. quadr. per.*) über die dreifache Periodicität sagt, um zu der Überzeugung zu gelangen, dafs unter dieser Voraussetzung ein

Abelsches Integral mit ganz bestimmter unterer Grenze für irgend einen gegebenen Werth des Variablen alle möglichen reellen und imaginären Werthe annehmen kann. Geben wir dies zu, so hört das Abelsche Integral überhaupt auf, eine Function seines Variablen zu sein. Da dies nun ein Widerspruch ist, so kann doch nur folgen, dafs das Abelsche Integral entweder keinen analytischen Sinn hat, oder, dafs die Definition, die man von einem Integral im Allgemeinen giebt, und aus welcher wir alle diese Folgerungen ableiten, nicht genügend ist. Um diesem Übelstande zu begegnen, führt der berühmte Verfasser der *Fundamenta*, z. B. für die Abelschen Integrale erster Ordnung, zwei Integrale zugleich ein, indem er

$$1. \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \varphi(x), \quad \int_0^y \frac{x \partial x}{\sqrt{X}} = \varphi_1(x)$$

setzt, wo  $X$  eine ganze Function von  $x$  vom 5ten oder 6ten Grade ist, und betrachtet dann  $x$  und  $y$  als Functionen der Verbindungen

$$2. \begin{cases} u = \varphi(x) + \varphi(y), \\ v = \varphi_1(x) + \varphi_1(y), \end{cases}$$

so dafs man

$$3. \quad x = \lambda(u, v); \quad y = \lambda_1(u, v)$$

hat. Aber wenn wir einmal zugeben, dafs die Function  $\varphi(x)$  für jeden Werth von  $x$  alle möglichen Werthe erhalten kann, so wird auch  $\varphi(y)$  dieselbe Eigenschaft für jeden Werth von  $y$  besitzen: also wird um so mehr die Summe  $u$  für jeden gegebenen Werth von  $x$  und  $y$  alle möglichen Werthe annehmen können. Dasselbe gilt von  $v$ ; man sieht daher nicht deutlich, wie auf diese Weise von einer Abhängigkeit zwischen  $u, v, x$  und  $y$  die Rede sein kann. Diesem Einwande liefse sich nur insofern begegnen, als man sagte: zu jedem der unendlich vielen Werthe von  $u$  gebe es nur einen einzigen zugehörigen Werth von  $v$ ; aber man müfste erst nachweisen, was unter solchen zusammengehörigen Werthen eigentlich zu verstehen sei. Es ist jedenfalls ebenso interessant, als nothwendig, sich vollkommene Klarheit über die Principien eines so höchst wichtigen Gegenstandes zu verschaffen.

### §. 3.

Die Analogie, welche man gewöhnlich verfolgt, indem man von den Exponentialgröfsen und elliptischen Transcendenten zu neuen Functionen fortzuschreiten sucht, bezieht sich auf die Form der Integrale, oder, wenn man will, auf die *Form der Differentialgleichungen*, denen die Functionen ge-

nügen. Suchen wir jetzt eine andere Art von Analogie auf, indem wir uns wieder zu den Betrachtungen in §. 1. wenden. Zufolge der Bemerkung, die dort über die einfachen und doppelten unendlichen Producte in Beziehung auf Kreis- und elliptische Functionen gemacht wurden, müssen wir als das Analogon, welches gleichsam um eine Stufe höher steht, die *Quotienten aus den Quotienten* von unendlichen *Tripelproducten* von der Form

$$\Pi \left( 1 - \frac{x}{\lambda + \lambda' A + \lambda'' A'} \right),$$

wo  $A, A'$  Constanten und  $\lambda, \lambda', \lambda''$  Indices nach der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes sind, annehmen.

Es seien, um zu allgemeineren Betrachtungen überzugehen.

$$1. \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

$n$  Indices und

$$2. \quad A_2, A_3, A_4, \dots, A_n$$

$n-1$  Constanten. Man setze der Kürze wegen

$$3. \quad \lambda_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \dots + \lambda_n A_n = N$$

und betrachte unter dieser Voraussetzung das Product

$$4. \quad \Pi \left( 1 - \frac{x}{N} \right),$$

in welchem sich das Multiplicationszeichen auf die Werthe von  $\lambda_1, \lambda_2$  etc. bezieht. In einem solchen Producte dürfen wir, sobald  $n > 2$  ist, *nicht* die Indices, unabhängig von einander, alle möglichen Werthe von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchlaufen lassen, weil das Product, wegen der unendlich vielen Werthe von  $N$ , deren analytischer Modul unter einer noch so klein gegebenen Grenze liegen würde, nicht convergiren könnte, und weil man außerdem auf Functionen mit drei und mehrfacher Periodicität geführt werden würde. Dasselbe findet sogar schon statt, wenn  $n = 2$  für den speciellen Fall eines reellen Werthes der Constante ist. Den mehrfachen Producten würde also nicht mehr, wie den einfachen und doppelten, ein bestimmter analytischer Sinn zukommen, wenn man den Indices alle möglichen Werthe zuertheilen wollte. Nichts hindert jedoch an der Betrachtung dieser mehrfachen Producte, sobald man die Indices gewissen *Beschränkungen* unterwirft, von der Beschaffenheit, dafs sie diejenigen Umstände beseitigen, welche die Nichtconvergenz herbeiführen: nemlich gewissen *Ungleichheitsbedingungen*, die man zwischen den Indices  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  annehmen und dem Producte hinzufügen mufs, dergestalt, dafs das Multiplicationszeichen sich dann nur auf diejenigen Werthe derselben beziehend

gedacht wird, welche diesen Bedingungen genügen, während die übrigen ausgeschlossen bleiben. Ganz im Allgemeinen läßt sich hier über die Wahl dieser Bedingungsgleichungen nichts Näheres sagen. Aber es existirt eine ganze Classe solcher Functionen, welche in sehr enger Beziehung zu gewissen Resultaten der *Zahlentheorie* stehen; und gerade für diese besondere Gattung zeigen die Ungleichheitsbedingungen, von welchen wir reden, eine sehr eigenthümliche Beschaffenheit. Man findet nämlich für diese Fälle immer eine Verbindung aus einer bestimmten Anzahl von Werthen des Ausdrucks  $N$ , welche einen reellen und *ganzen* Werth annimmt; und die Ungleichheitsbedingungen kommen darauf hinaus, dafs sie eine ganze *Gruppe* unendlich vieler Werthe von  $N$ , für welche dieser Verbindung der nämliche Werth zukommt, und die als die Glieder geometrischer Reihen erscheinen, auf ein einziges  $N$  reduciren. Die Functionen, zu welchen man auf diesem Wege geführt wird, scheinen sehr merkwürdige Eigenschaften zu besitzen; sie eröffnen ein Feld, auf dem sich Stoff zu den reichhaltigsten Untersuchungen darbietet, und welches der eigentliche Grund und Boden zu sein scheint, auf welchem die schwierigsten Theile der Analysis und Zahlentheorie in einander greifen.

Übrigens lassen sich ganz ähnliche Betrachtungen, wie an die unendlichen Producte, auch an die *Reihen* knüpfen, zu welchen die Theorie der elliptischen Functionen führt.

Berlin am 10. Januar 1844.