VI. Zur Theorie der Circularpolarisation; von Victor von Lang.

1. Cauchy ¹⁾ hat gezeigt, daß die Differentialgleichungen, welche die Bewegung des Lichtes in isotropen Medien repräsentiren, durch Hinzufügung eines Gliedes von der Form $b^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right)$ in die entsprechenden Gleichungen für isotrope circularpolarisirende Medien (wie Terpentinöl, chlorsaures Natron) übergehen. Um dieses nachzuweisen setzt Cauchy voraus, daß die Integrale ξ, η, ζ jener Gleichungen von der Form $Ae^{(ux+vy+wz-st+\lambda)\sqrt{-1}}$ seien. Diese Integrale, welche Cauchy *déplacements symboliques* nennt, bestehen also aus einem reellen und einem imaginären Theil; und nur wenn man schließlic den ersteren allein in Betracht zieht, so findet man, daß die Integrale die Lichterscheinungen circularpolarisirender Medien repräsentiren. Diesem Vorgange kann man jedoch kaum eine physikalische Bedeutung unterlegen und derselbe erscheint vielmehr als ein bloßes mathematisches Kunststück. Ich werde jedoch in den nachfolgenden Zeilen zeigen, daß man auch auf eine viel einfachere und wie mir scheint ganz naturgemäße Weise zum Ziele gelangt, indem man nur voraussetzt, daß die Lichtbewegung in elliptisch polarisirten ebenen Wellen geschieht, was ja eben die allgemeinste Form für eine Lichtwelle ist.

Ich werde hierauf ferner zeigen, daß sich dieselbe Methode auch auf circularpolarisirende einaxige Medien (wie Quarz und Zinnober) ausdehnen läßt.

2. Eine elliptisch polarisirte Bewegung in ebenen Wellen ist gegeben durch die Gleichungen

1) *Compt. rend. t. XV, p. 1082.*

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \xi = h a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (u x + v y + w z - q t) \\ \quad + p a' \cos \frac{2\pi}{\lambda} (u x + v y + w z - q t) \\ \eta = k a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (u x + v y + w z - q t) \\ \quad + q a' \cos \frac{2\pi}{\lambda} (u x + v y + w z - q t) \\ \zeta = l a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (u x + v y + w z - q t) \\ \quad + r a' \cos \frac{2\pi}{\lambda} (u x + v y + w z - q t). \end{array} \right.$$

In diesen Gleichungen sind x, y, z die Coordinaten und ξ, η, ζ die Ausschläge eines Aethertheilchens; a, a' sind die Gröfsen der beiden Hauptaxen (A, A') der vom Lichte beschriebenen Ellipse; q ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge und t die Zeit. Die beiden Ellipsenaxen A und A' und die Wellennormale N stehen senkrecht aufeinander und die Richtungs cosinuse zwischen diesem rechtwinkligen Axensysteme und dem der Coordinaten (X, Y, Z) ergeben sich aus der nachfolgenden Uebersicht

	X	Y	Z
A	h	k	l
A'	p	q	r
N	u	v	w

Die Richtigkeit der eben gegebenen Bedeutung der Buchstaben in den Gleichungen (1) erhellt, wenn man diese Gleichungen auf die Richtungen A, A' und N als Coordinaten-Axen bezieht. Die Gleichungen bekommen alsdann die Form

$$\begin{aligned} \xi' &= a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (z' - q t) \\ \eta' &= a' \cos \frac{2\pi}{\lambda} (z' - q t) \\ \zeta' &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lernen wir ferner, daß wenn wir $-a'$ für a' setzen, die Ellipse von dem Lichtstrahle in ent-

gegengesetztem Sinne beschrieben wird. Ist $a = a'$, so repräsentiren die Gleichungen (1) eine circularpolarisirte Lichtwelle, für a oder $a' = 0$ aber eine geradlinig polarisirte.

Die Gleichungen (1) können leicht auf folgende Form gebracht werden

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{ha}{\sin \varphi} \cos(\varpi + \varphi) \quad \text{wobei} \quad \tan \varphi = \frac{ha}{pa'} \\ \eta = \frac{ka}{\sin \psi} \cos(\varpi + \psi) \quad \cdot \quad \tan \psi = \frac{ka}{qa'} \\ \zeta = \frac{la}{\sin \chi} \cos(\varpi + \chi) \quad \cdot \quad \tan \chi = \frac{la}{ra'} \\ \text{und} \quad \varpi = \frac{2\pi}{\lambda}(ux + vy + wz - qt) \end{array} \right.$$

ist. Es ist überflüssig zu bemerken, daß zwischen den Richtungs-cosinussen eine gewisse Anzahl von Gleichungen von den folgenden Formen besteht

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} h^2 + k^2 + l^2 = 1 \\ hp + kq + lz = 0 \\ h = qw - zv \end{array} \right.$$

3. Die Differentialgleichungen für die Bewegung des Lichtes in circularpolarisirenden isotropen Medien sind mit Vernachlässigung der Dispersion in der einfachsten Form

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = b^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) = b^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) = b^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{array} \right.$$

wobei

$$(5) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

seyn muß.

Setzt man $b^2 = 0$, so gehen die Gleichungen (4) in die entsprechenden Gleichungen für gewöhnliche isotrope Medien über.

Um nun die Gesetze der Lichtbewegung weiter zu erforschen, so nehmen wir vorerst an, dieselbe geschehe in ebenen, elliptisch polarisirten Wellen, d. h. die Ausschläge

ξ, η, ζ , seyen von der Form der Gleichungen (1) oder (2). Diese Werthe erfüllen offenbar die Bedingung (5), da dieselbe nach der Substitution übergeht in

$$uh + vk + wl = 0,$$

diese Gleichung aber zufolge der Gleichungen (3) wirklich eine Folge der Gleichungen (1) ist. Die Gleichung (5) drückt aus, daß die Bewegung der einzelnen Aethertheilchen senkrecht zur Wellennormale ist. Die Gleichungen (4) werden durch die Substitution

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & (a^2 - q^2) \frac{h}{\sin \varphi} \cos(\varpi + \varphi) \\ & \quad = -b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{wk}{\sin \psi} \sin(\varpi + \psi) - \frac{lv}{\sin \chi} \sin(\varpi + \chi) \right] \\ & (a^2 - q^2) \frac{k}{\sin \psi} \cos(\varpi + \psi) \\ & \quad = -b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{ul}{\sin \chi} \sin(\varpi + \chi) - \frac{hw}{\sin \varphi} \sin(\varpi + \varphi) \right] \\ & (a^2 - q^2) \frac{l}{\sin \chi} \cos(\varpi + \chi) \\ & \quad = -b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{vh}{\sin \varphi} \sin(\varpi + \varphi) - \frac{ku}{\sin \psi} \sin(\varpi + \psi) \right]. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen müssen richtig bleiben für jede Zeit (t) und jeden Punkt im Raume (xyz); sie müssen also auch richtig bleiben für jeden Werth von ϖ . Dies ist aber nur möglich, wenn die Coëfficienten von $\cos \varpi$ und $\sin \varpi$ jeder einzeln gleich der Null sind. Jede der Gleichungen (6) zerfällt daher in zwei Gleichungen, welche mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) und (3) sich auf die folgenden zwei reduciren:

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & (a^2 - q^2) \frac{a'}{a} = b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \\ & (a^2 - q^2) = b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{a'}{a} \end{aligned} \right.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch einander, so erhält man

$$\frac{a'}{a} = \frac{a}{a'} \text{ oder } \left(\frac{a'}{a} \right)^2 = 1$$

und daher

$$(8) \quad a = \pm a'$$

Für q^2 erhält man aber aus jeder der Gleichungen (7) die folgende beiden Werthe

$$(9) \quad \begin{cases} q_1^2 = a^2 + b^2 \frac{\lambda_1}{2\pi} \\ q_2^2 = a^2 - b^2 \frac{\lambda_2}{2\pi} \end{cases}$$

Hieraus sehen wir, daß in einem Medium, wie es durch die Gleichungen (5) repräsentirt wird, sich nach einer und derselben Richtung zwei Wellen mit ungleicher Geschwindigkeit fortpflanzen. Beide Wellen sind zufolge der Gleichungen (8) circular aber im entgegengesetzten Sinne polarisirt.

Ist L die Wellenlänge, V die Geschwindigkeit des Lichtes in Luft, so hat man $\lambda = L \frac{V}{q}$ und deshalb

$$(10) \quad q^2 = a^2 \pm b^2 \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{V}{q}$$

Aus welcher Gleichung man durch Auflösung einer quadratischen Gleichung die beiden Werthe von q^2 finden kann.

Begnügt man sich aber mit großer Annäherung, so kann man im zweiten Gliede der Gleichung (10) $q = a$ setzen und erhält dann

$$(11) \quad q^2 = a^2 \pm \frac{b^2}{2\pi} \frac{V}{a} \cdot L.$$

4. Gehen wir nun zur Betrachtung einaxiger circularpolarisirender Medien über, so finden wir für die Differentialgleichungen unter der Voraussetzung, daß die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationssebene geschehen

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + (c^2 - a^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z} \\
 & \qquad \qquad \qquad = w^2 b^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\
 & \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + (c^2 - a^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z} \\
 & \qquad \qquad \qquad = w^2 b^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\
 & \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) + (c^2 - a^2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\
 & \qquad \qquad \qquad = w^2 b^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \right. \\
 & \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.
 \end{aligned}$$

Die Coordinaten-Axe z fällt hierbei mit derjenigen Richtung zusammen, die man optische Axe nennt. Substituiren wir nun wieder für ξ , η , ζ die Form der Gleichungen (2) und bemerken, daß die Coëfficienten von $\sin \omega$ und $\cos \omega$ einzeln wie früher der Null gleich seyn müssen, so erhalten wir aus der vorstehenden Gleichung folgende sechs neue

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & (a^2 - q^2) h \cot \varphi + (a^2 - c^2) l u w \cot \chi \\
 & \qquad \qquad \qquad = -w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} (w h - l v) \\
 & (a^2 - q^2) k \cot \psi + (a^2 - c^2) l v w \cot \chi \\
 & \qquad \qquad \qquad = -w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} (u l - h w) \\
 & (c^2 - q^2) l \cot \chi + (a^2 - c^2) l w^2 \cot \chi \\
 & \qquad \qquad \qquad = -w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} (v h - k u) \\
 & (a^2 - q^2) h + (a^2 - c^2) l u w \\
 & \qquad \qquad \qquad = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} (w h \cot \varphi - l v \cot \chi) \\
 & (a^2 - q^2) k + (a^2 - c^2) l v w \\
 & \qquad \qquad \qquad = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} (u l \cot \chi - h w \cot \varphi) \\
 & (c^2 - q^2) l + (a^2 - c^2) l w^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} (v h \cot \varphi - k u \cot \varphi).
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Zufolge der Gleichungen (2) und (3) werden nun diese Gleichungen

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a^2 - q^2)h + (a^2 - c^2)luw = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{a'}{a} h \\ (a^2 - q^2)k + (a^2 - c^2)lvw = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{a'}{a} k \\ (c^2 - q^2)l + (a^2 - c^2)lw^2 = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{a'}{a} l \\ (a^2 - q^2)p + (a^2 - c^2)ruw = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{a'}{a} p \\ (a^2 - q^2)q + (a^2 - c^2)rvw = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{a'}{a} q \\ (c^2 - q^2)r + (a^2 - c^2)rw^2 = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{a'}{a} r \end{array} \right.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit q , die zweite mit p und subtrahirt, so findet man

$$-(a^2 - c^2)rw(uq - vp) = (a^2 - c^2)rw l = 0.$$

Es muß daher im Allgemeinen entweder r oder l gleich Null seyn, weshalb man auch in den Gleichungen (14) nicht ohne weiteres durch r und l dividiren kann. Es sey um eine bestimmte Annahme zu machen

$$(15) \quad r = 0.$$

Alsdann sind die Richtungen der Ellipsen-Axen (A, A') durch u, v, w , bestimmbar, denn man findet aus den Gleichungen (3)

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{lll} l = \sqrt{1 - w^2} & k = \frac{-vw}{\sqrt{1 - w^2}} & h = \frac{uw}{\sqrt{1 - w^2}} \\ r = 0 & q = \frac{u}{\sqrt{1 - w^2}} & p = \frac{v}{\sqrt{1 - w^2}} \end{array} \right.$$

Die Gleichung (15) besagt, daß eine Ellipsen-Axe immer in die Ebene fällt, die durch Wellennormale und optische Axe geht; die andere Ellipsen-Axe muß alsdann natürlich senkrecht zu dieser Ebene seyn. Zufolge der Gleichung (15) werden ferner die vierte und fünfte der Gleichungen (14)

$$(17) \quad a^2 - q^2 = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{a'}{a}.$$

Die letzte Gleichung (15) verschwindet, die dritte aber giebt

$$(18) \quad c^2 - q^2 + (a^2 - c^2)w^2 = w^2 b^2 \frac{\lambda}{2\pi} \frac{a'}{a} \\ = (a^2 - q^2) + (a^2 - c^2)(w^2 - 1),$$

welche Gleichung man auch aus den zwei ersten Gleichungen (15) ableiten kann.

Multiplicirt man die Gleichungen (17) und (18) und dividirt dieselben durch einander so erhält man

$$(19) \quad (a^2 - q^2) + (a^2 - c^2)(a^2 - q^2)(w^2 - 1) = w^2 b^4 \frac{\lambda^2}{4\pi^2}$$

$$(20) \quad \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2 - q^2}(w^2 - 1).$$

Setzt man in der Gleichung (19) für λ seinen Werth $L \frac{q}{V}$ so kann man q hieraus für ein gegebenes w bestimmen. Man sieht, daß man zwei Werthe für q^2 erhält; eine der Gleichungen (17), (18) oder (20) giebt die zugehörigen Werthe von $\frac{a'}{a}$. Es pflanzen sich also nach einer und derselben Richtung zwei elliptisch polarisirte Wellen mit verschiedener Geschwindigkeit fort. Die Hauptaxe jeder der beschriebenen Ellipsen sind parallel und senkrecht zu einer Ebene die durch die optische Axe und Wellennormale geht. Aus dem Nachfolgenden erhellet auch, daß in beiden die Ellipsen der beiden Wellen confocal sind, daß die entsprechenden Hauptaxen auf einander senkrecht stehen, und daß die Bewegung in den beiden Ellipsen im entgegengesetzten Sinne erfolgt. Aus Gleichung (29) folgt auch, daß die Geschwindigkeit und folglich auch das Verhältniß $\frac{a'}{a}$ unabhängig ist von dem Azimute der Wellennormale um die optische Axe herum.

5. Betrachten wir den speciellen Fall, wo die Wellennormale mit der optischen Axe zusammenfällt. Für diesen Fall hat man $w = 1$ und die Gleichung (19) giebt

$$(21) \quad q^2 = a^2 \pm b^2 \frac{\lambda}{2\pi}$$

die Gleichung (17) aber die zugehörigen Werthe

$$(22) \quad a = \pm a'$$

d. h. wir haben in diesem Falle zwei im entgegengesetztem Sinne circularpolarisirte Wellen.

Der zweite specielle Fall, den wir untersuchen wollen, ist der, wo die Wellennormale senkrecht zur optischen Axe, also $w = 0$ ist.

Man hat alsdann

$$(23) \quad \begin{cases} h = k = 0 & l = 1 \\ p = v, & q = u, & r = 0 \end{cases}$$

d. h. die Ellipsen-Axe (A), auf welcher sich a bezieht, fällt mit der optischen Axe zusammen, während die andere (A'), folgerrecht senkrecht zur optischen Axe und Wellennormale seyn muß.

Aus Gleichung (19) erhalten wir für q^2 die beiden Werthe

$$(24) \quad \begin{cases} q^2 = c^2 \\ q^2 = a^2 \end{cases}$$

Setzen wir den ersten Werth in Gleichung (20), so finden wir $\frac{a'}{a} = 0$ also

$$(25) \quad a' = 0$$

Die Wellenbewegung reducirt sich daher auf eine linear-polarisirte, deren Schwingungen parallel der Ellipsen-Axe (A), also parallel der optischen Axe mit der Amplitude a vorsichgehen. Desgleichen findet man für den zweiten Werth von q^2 aus Gleichung

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{a'}{a} &= \infty \text{ also} \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Auch diese Welle ist daher linear und zwar senkrecht zur ersteren polarisirt. Man ersieht hieraus, dafs in dem eben betrachteten speciellen Falle die Lichtbewegung genau so wie in einem gewöhnlichen einaxigen Medium vorsichgeht. Und in der That können wir aus den entwickelten Gesetzen leicht die für gewöhnliche einaxige Krystalle geltenden Gesetze ableiten, indem wir die Constante b gleich Null setzen. In Gleichung (19) ist das Glied in dem diese Constante, die an und für sich schon klein ist, vorkommt,

noch mit w^4 multiplicirt; der Werth dieses Gliedes nimmt daher sehr rasch mit w ab, die specifischen Erscheinungen der Circularpolarisation können sich daher bei einaxigen Körpern nur in der Nähe der optischen Axe, wo w nahezu Eins ist, zeigen.

Für die Praxis ist es daher vollkommen genug, wenn man in der Gleichung (19) λ als eine Constante betrachtet und dafür $L \frac{a}{V}$ setzt. Man erhält alsdann aus der erwähnten Gleichung für die beiden Werthe von q^2

$$(27) \quad q^2 = a^2 - \frac{a^2 - c^2}{2} (1 - w^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2) (1 - w^2) + w^2 b^4 \frac{\lambda^2}{\pi^2}}$$

und für die zugehörigen Werthe von $\frac{a}{a'}$ aus Gleichung (17)

$$(28) \quad \frac{a}{a'} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{(a^2 - c^2) (1 - w^2)}{b^2 w^2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 - c^2) (1 - w^2)}{b^4 w^4} \cdot \frac{\pi^2}{\lambda^2} + 1}.$$

Aus letzterer Gleichung ersieht man, daß für die beiden Werthe von a und a' bei der eingeführten Näherung die Gleichung

$$(29) \quad \frac{a_1}{a'_1} \times \frac{a_2}{a'_2} = 1 \text{ oder } \frac{a_1}{a'_1} = - \frac{a'_2}{a_2}$$

besteht; d. h. die beiden Ellipsen sind confocal, die Bewegung geschieht aber im entgegengesetzten Sinne.

6. Wir wollen noch mit Hülfe der gewonnenen Formeln den Fall näher untersuchen, wo Licht auf eine von zwei parallelen Flächen begrenzte Platte eines circularpolarisirenden einaxigen Körpers fällt. Dasselbe wird in zwei elliptisch polarisirte Strahlen gebrochen, deren Wegdifferenz (ϑ) nach ihrem Austritte auf der andern Seite der Platte wir hier noch bestimmen wollen. Und zwar wollen wir nur solche Strahlen betrachten die beim Durchgange durch den Krystall keine allzu großen Winkel mit der optischen Axe bilden. Die Dicke der Platte sey e und ρ der Winkel der Wellennormale mit der optischen Axe; in den vorhergehenden Formeln ist daher $\cos \rho = u$. Dieser Winkel unterscheidet sich für beide Strahlen nur um Größen zweiter Ordnung.

Für gewöhnliche einaxige Körper hat man für den Wegunterschied bei kleinen Werthen von ρ die Formel

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{eV}{2a^3} (c^2 - a^2 \sin^2 \rho).$$

Hierin ist $c^2 - a^2 \sin^2 \rho$ die Differenz der Quadraten der Geschwindigkeiten der beiden Wellen die sich in der durch ρ gegebenen Richtung fortpflanzen. Da der Wegunterschied nur von dieser Gröfse abhängt, so kann man obigen Ausdruck für den Wegunterschied auch in dem Falle von circularpolarisirenden Medien beibehalten, wenn man nur die Differenz der Geschwindigkeiten richtig bestimmt ¹).

Für diese Differenz findet man aber aus Gleichung (27)

$$(30) \quad q_1^2 - q_2^2 = \sqrt{(a^2 - c^2) \sin^2 \rho + b^4 \frac{\lambda^2}{\pi^2}}$$

und es ist daher

$$\vartheta = \frac{1}{L} \cdot \frac{eV}{2a^3} \sqrt{(a^2 - c^2) \sin^2 \rho + b^4 \frac{\lambda^2}{\pi^2} \cos^2 \rho}$$

oder wenn man zugleich für λ der Näherungswertb $L \frac{a}{V}$ setzt und quadriert

$$(31) \quad \vartheta^2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{e^2 V^2}{4a^3} (a^2 - c^2) \sin^2 \rho + \frac{e^2}{a^2} \frac{b^4}{4\pi^2} \cos^2 \rho.$$

Bezeichnet man den Werth von ϑ für $\rho = 0$ mit ϑ_0 so hat man

$$(32) \quad \vartheta_0^2 = e^2 \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{1}{4\pi^2}$$

und folglich auch wenn man für die Hauptbrechungsquotienten $\frac{V}{a}$ und $\frac{V}{c}$ und noch die Bezeichnung α und γ einführt

$$(33) \quad \vartheta^2 = \left[\frac{e}{L} \cdot \frac{a}{2\gamma^2} (\gamma^2 - \alpha^2) \sin^2 \rho \right]^2 + \vartheta_0^2 \cos^2 \rho.$$

In dieser Gleichung kann man sich noch die weitere Näherung erlauben und

$$\frac{\alpha + \gamma}{2\gamma} = 1$$

setzen; alsdann hat man

1) Airy, *Mathematical tracts*. Cambridge 1831 p. 390.

$$(34) \quad \vartheta^4 = \left[\frac{e}{L} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} (\gamma - \alpha) \right]^2 \sin \varrho^4 + \vartheta_0^2 \cos \varrho^4.$$

Für $\frac{a}{a'}$ aber findet man aus Gleichung (28)

$$(35) \quad \frac{a}{a'} = \mp \sqrt{H^2 + 1}$$

wobei zufolge Gleichung (32)

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{\pi}{L} \cdot \frac{V}{a} \cdot \frac{(a^2 - c^2)(1 - w^2)}{b^2 w^2} = \frac{eV}{L} \cdot \frac{a^2 - c^2}{2a^2 \vartheta_0} \cdot \frac{1 - w^2}{w^2} \\ &= \frac{e}{L \vartheta_0} \cdot \frac{\alpha}{\gamma^3} \cdot \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{2} \tan \varrho^2 \end{aligned} \right.$$

und setzt man hierin wieder $\frac{\alpha + \gamma}{2\gamma} = 1$ so hat man

$$(37) \quad H = \frac{e}{L \vartheta_0} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} (\gamma - \alpha) \cdot \tan \varrho^2.$$

Die Gleichungen (34), (35) und (37) sind schon von Cauchy gegeben worden und zwar bei Gelegenheit der Experimentaluntersuchung Jamin's über die elliptische Doppelbrechung des Quarzes.

Es ergab sich eine vollkommene Uebereinstimmung dieser Formeln mit den ausgeführten Beobachtungen. Cauchy hat eine Ableitung dieser Formeln nicht bekannt gemacht, man konnte daher auch nicht entnehmen, welche Vernachlässigungen Derselbe bei seinen Rechnungen eingeführt hatte.

Anhang.

Man findet in den Lehrbüchern der Physik noch immer die Angabe, daß der Winkel (D), um welchen die Polarisationsebene eines Lichtstrahles, der durch Quarz parallel der optischen Axe hindurchgeht, für verschiedene Farben gedreht wird, durch die Gleichung $D = \frac{c}{L^2}$ dargestellt werden könne, wo c eine Constante und L die Wellenlänge bedeutet. Cauchy hat schon in der Eingangs citirten Abhandlung aus den unvollkommenen Beobachtungen Biot's für verschiedene Farben auf die Unrichtigkeit der obigen Gleichung aufmerksam gemacht und gezeigt, daß die Dre-

hungswinkel vielmehr von der Form $a + \frac{b}{L^2}$ seyen. Noch besser zeigt sich die Uebereinstimmung dieser Formel mit den Broch'schen Messungen für die den Fraunhoferschen Linien entsprechenden Drehungswinkel. Es ist für eine Quarzplatte von 1^{mm} Dicke

	<i>D</i> beob.	<i>D</i> berech.	<i>L</i> nach Frauenhofer.
<i>B</i>	15°,30	14°,72	0 ^{mm} ,0007878
<i>C</i>	17 ,24	16 ,49	6564
<i>D</i>	21 ,67	21 ,32	5888
<i>E</i>	27 ,46	27 ,58	5260
<i>F</i>	32 ,59	33 ,14	4843
<i>G</i>	42 ,20	43 ,14	4291

Die berechneten Werthe von *D* erhält man aus der Formel

$$D = -3,40 + \frac{8,5706}{10^6} \cdot \frac{1}{L^2}$$

deren Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Hülfe der obigen Wellenlängen berechnet wurden.

Für *D* hat man bekanntlich die Gleichung

$$(38) \quad D = \frac{\pi}{L} \vartheta^0$$

und daher zufolge Gleichung (32) mit grosser Näherung

$$(39) \quad D = \frac{e}{2L} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

Hätten wir es blofs mit gewöhnlichen einaxigen Körpern zu thun, so könnten wir leicht die abgeleiteten Gleichungen, welche nur für monochromatisches Licht gelten, in solche verwandeln, welche für beliebige Lichtarten gelten, wir haben zu diesem Zwecke der Erfahrung gemäß nur die Constante a^2 und c^2 variabel und zwar von der Form $m + \frac{n}{L^2} + \dots$ anzunehmen. Lassen wir diese Umänderung der Constante a^2 und c^2 auch in dem Falle der elliptischen Polarisation gelten, so sehen wir aus Gleichung (39), daß wir für die Constante b^2 die Form $rL + \frac{s}{L} + \dots$ annehmen müssen, damit die Drehungswinkel dem angegebenen Dispersionsgesetze genügen.

London, Februar 1863.