Recherches sur le carré de la dérivée logarithmique de la fonction gamma et sur quelques fonctions analogues.

(Par NIELS NIELSEN, à Copenhague.)

I. DÉFINITIONS. FORMULES GÉNÉRALES.

POSSONS avec GAUSS (*)

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

où C désigne la constante d'EULER, nous aurons pour cette fonction plus commode mais intimement liée à $\Psi(x)$, savoir la fonction

$$s_1(x) = -\Psi(x) - C = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad (1)$$

ce développement en série de puissances

$$s_1(1-x) = s_2 x + s_3 x^2 + s_4 x^3 + \dots, \quad |x| < 1, \quad (1^{\text{bis}})$$

dont les coefficients se déterminent comme voici

$$s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots = s_n(1), \quad n > 1, \quad (2)$$

où nous avons posé pour abréger

$$s_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot D_x^{n-1} s_1(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(x+v)^n}, \quad n > 1. \quad (2^{\text{bis}})$$

La fonction $s_1(x)$ s'exprimera sans peine et sous forme simple comme

(*) *Disquisitiones generales circa functiones a seriem infinitam, etc.*, § 30; Œuvres, t. III.

intégrale définie, savoir

$$s_1(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{1-t} dt, \quad \Re(x) (*) > 0, \quad (3)$$

ce qui donnera aisément cette autre formule analogue

$$s_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_0^1 \frac{(\log t)^{n-1} t^{x-1}}{1-t} dt, \quad \Re(x) > 0. \quad (3^{bis})$$

Nous avons encore à étudier cette nouvelle fonction transcendante

$$\sigma_1(x) = \frac{1}{2} \left(s_1\left(\frac{x}{2}\right) - s_1\left(\frac{x+1}{2}\right) \right) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^v}{x+v}, \quad (4)$$

pour laquelle nous trouvons se développement en série de puissances

$$\sigma_1(1-x) = \sigma_1 + \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 + \sigma_4 x^3 + \dots, \quad |x| < 1, \quad (4^{bis})$$

dont les coefficients se déterminent comme voici

$$\sigma_n = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \dots = \sigma_n(1), \quad n \geq 1, \quad (5)$$

où nous avons posé pour abrégé

$$\sigma_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot D_x^{n-1} \sigma_1(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(x+v)^n}. \quad (5^{bis})$$

Quant aux séries numériques σ_n , nous aurons pour $n=1$

$$\sigma_1 = \log 2,$$

où le signe *log* désigne le logarithme népérien, et généralement pour $n > 1$

$$\sigma_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \cdot \sigma_n.$$

La fonction $\sigma_1(x)$ s'exprimera aussi sous forme simple comme intégrale définie, savoir

$$\sigma_1(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt, \quad \Re(x) > 0, \quad (6)$$

(*) Ici et dans ce qui suit $\Re(x)$ désigne la partie réelle de x .

ce qui donnera immédiatement cette autre formule analogue

$$\sigma_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \int_0^1 \frac{(\log t)^{n-1} t^{x-1}}{1+t} dt, \quad \Re(x) > 0. \quad (6 \text{ bis})$$

Dans les recherches que voici je me suis proposé d'étudier des représentations intégrales d'un produit de deux des fonctions $s_1(x)$, $s_1(1-x)$, $\sigma_1(x)$ et $\sigma_1(1-x)$ choisies d'une manière quelconque; les intégrales ainsi obtenues se présentent toutes sous la même forme que celles figurant au second membre de (3) et de (6). De plus, je me suis proposé de donner tous les développements possibles en séries de factorielles des produits susdits.

Il est évident qu'une telle recherche est intimement liée à une recherche sur les séries purement numériques s_n et σ_n . Quant à ces séries, il est bien connu que s_{2n} et σ_{2n} se présentent dans les séries de puissances obtenues pour $\pi \cot \pi x$ et $\pi \operatorname{cosec} \pi x$, ce qui nous permettra de déterminer à l'aide d'une puissance de π les sommes de toutes ces séries. On aura en effet

$$s_{2n} = \frac{2^{2n-1} \cdot B_{2n-1}}{(2n)!} \cdot \pi^{2n},$$

où les nombres B_{2n-1} sont les nombres rationnels de BERNOULLI. Quant aux séries s_{2n+1} et σ_{2n+1} , à l'exception de $\sigma_1 = \log 2$, on ignore jusqu'au présent complètement leur nature et ne connaît aucune formule récursive pour leur détermination successive. Il est bien remarquable que l'on retrouve des propriétés analogues chez les sommes des puissances des valeurs réciproques des racines d'une fonction cylindrique de première espèce et de la fonction elliptique $p(x)$ de WEIERSTRASS.

En effet, si l'exposant figurant dans la somme des puissances des valeurs réciproques des racines de $J'(x)$ est un nombre pair, la somme en question se présente sous forme d'une fonction rationnelle du paramètre ν (*). Pour les racines de $p(x)$ les sommes, dont l'exposant est pair, s'expriment à l'aide des deux sommes qui correspondent aux exposants 4 et 6 (**). Si, au contraire, l'exposant susdit est impair, les sommes correspondantes sont complètement inconnues.

Or, dans les recherches qui nous occupent ici, nous avons besoin d'étudier

(*) GRAF: *Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen*, I, p. 190; Berne, 1898.

(**) TANNERY et MOLK: *Théorie des fonctions elliptiques*, t. I, p. 176; Paris 1893.

les séries générales s_n et σ_n pour des valeurs paires ou impaires de l'indice n . Cependant des réflexions entièrement élémentaires nous conduiront à une groupe de formules qui donnent comme cas particuliers les formules récursives bien connues pour s_{2n} et σ_{2n} , et, sans faire connaître quelque chose sur la nature de s_{2n+1} et de σ_{2n+1} pour $n > 0$, ces formules générales suffisent pour la résolution des problèmes susdits.

II. REMARQUES GÉNÉRALES SUR LES TROIS PRODUITS $s_n s_p$, $s_n \sigma_p$ et $\sigma_n \sigma_p$.

Appliquons maintenant la règle de CAUCHY pour la multiplication de deux séries infinies mais absolument convergentes, nous aurons immédiatement cette formule

$$s_n s_p = s_{n+p} + c_{n,p} + c_{p,n}, \quad n > 1, \quad p > 1, \quad (7)$$

où nous avons posé pour abréger

$$c_{n,p} = \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{v^n} \left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{(v-1)^p} \right), \quad n > 1, \quad p \geq 1.$$

De la même manière nous obtiendrons, en appliquant pour $p=1$ un théorème de M. MERTENS (*), cette autre formule

$$s_n \sigma_p = \sigma_{n+p} + d_{n,p} - \gamma_{p,n}, \quad n > 1, \quad p \geq 1, \quad (8)$$

où nous avons posé

$$d_{n,p} = \sum_{v=2}^{\infty} \frac{1}{v^n} \left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{(-1)^v}{(v-1)^p} \right), \quad n > 1, \quad p \geq 1$$

$$\gamma_{n,p} = \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^n} \left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{(v-1)^p} \right), \quad n \geq 1, \quad p \geq 1.$$

Enfin nous aurons, en appliquant pour $n=p=1$ un théorème de M. PRINGSHEIM (**), cette troisième formule

$$\sigma_n \sigma_p = s_{n+p} - \delta_{n,p} - \delta_{p,n}, \quad n \geq 1, \quad p \geq 1, \quad (9)$$

(*) *Journal de Crelle*, t. 79.

(**) *Mathematische Annalen*, t. 21.

où nous avons posé pour abréger

$$\delta_{n,p} = \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v^n} \left(\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{(-1)^v}{(v-1)^p} \right), \quad n \geq 1, \quad p \geq 1;$$

mettons dans (9) $p = q = 1$, nous trouvons cette formule particulière

$$\delta_{1,1} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2. \quad (9^{bis})$$

Il est évident que les quatre séries numériques à deux indices que nous venons d'introduire dans les expressions données pour les produits $s_n s_p$, $s_n \sigma_p$ et $\sigma_n \sigma_p$ jouent un rôle fondamental dans les recherches ultérieures sur ces produits. Or, il est très facile d'établir une foule d'autres formules contenant les séries $c_{n,p}$, $d_{n,p}$, $\gamma_{n,p}$, et $\delta_{n,p}$. Ici nous nous bornerons à indiquer quelques applications de la règle de décomposition de LAGRANGE (*), savoir la formule

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x^p (x-a)^q} &= (-1)^q \cdot \sum_{v=0}^{p-1} \binom{q+v-1}{q-1} \cdot \frac{1}{x^{p-v} a^{q+v}} + \\ &+ \sum_{v=0}^{q-1} \binom{p+v-1}{p-1} \cdot \frac{(-1)^v}{a^{p+v} (x-a)^{q-v}}, \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

où p et q désignent deux positifs entiers.

En effet, mettons dans (α) $x = n$ et $a = 1, 2, 3, \dots, n-1$, puis ajoutons toutes les équations ainsi obtenues prises avec des signes alternés, nous obtenons sans peine ces deux formules

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{p,q} &= (-1)^q \cdot \sum_{v=0}^{p-1} \binom{q+v-1}{q-1} \gamma_{p-v, q+v} + \\ &+ \sum_{v=0}^{q-1} (-1)^v \binom{p+v-1}{p-1} \sigma_{p+v} \cdot \sigma_{q-v} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} d_{p,q} &= (-1)^q \cdot \sum_{v=0}^{p-1} \binom{q+v-1}{q-1} \delta_{p-v, q+v} + \\ &+ \sum_{v=0}^{q-1} (-1)^v \binom{p+v-1}{p-1} s_{p+v} \cdot \sigma_{q-v}; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

dans (11) il faut admettre $p > 1$, tandis que (10) garde sa validité même si

(*) Citation de M. L. SAUVAGE: *Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes*, p. 176; Paris, 1895.

nous posons $p = q = 1$; nous aurons dans ce cas cette formule particulière

$$\gamma_{1,1} = \frac{1}{2} (\log 2)^2. \quad (10^{\text{bis}})$$

Pour déduire à l'aide de (α) des expressions analogues pour les séries $c_{p,q}$ et $\delta_{p,q}$ il faut considérer séparément le dernier terme des deux sommes figurant au second membre de cette formule; avec cette précaution le même procédé donnera ces deux formules analogues.

$$\left. \begin{aligned} c_{p,q} = & (-1)^q \cdot \sum_{v=0}^{p-2} \binom{q+v-1}{q-1} c_{p-v,q+v} + \\ & + \sum_{v=0}^{q-2} (-1)^v \binom{p+v-1}{p-1} s_{q-v} \cdot s_{p+v} - \\ & - (-1)^q \binom{p+q-2}{p-1} (s_{p+q} + c_{p+q-1,1}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{p,q} = & (-1)^q \cdot \sum_{v=0}^{p-2} \binom{q+v-1}{q-1} d_{p-v,q+v} + \\ & + \sum_{v=0}^{q-2} (-1)^v \binom{p+v-1}{p-1} s_{q-v} \cdot \sigma_{p+v} + \\ & + (-1)^q \binom{p+q-2}{p-1} (\gamma_{p+q-1,1} - \sigma_{p+q}); \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

dans le cas particulier $q = 1$ il faut dans ces formules supprimer au second membre les sommes qui deviendront illusoires. Dans (12) il faut toujours admettre $p > 1$, tandis que (13) donnera pour $p = 1$ ce cas particulier

$$\gamma_{q,1} - (-1)^q \delta_{1,q} = \sigma_{q+1} - \sum_{v=0}^{q-2} (-1)^v s_{q-v} \cdot \sigma_{v+1}. \quad (13^{\text{bis}})$$

III. FORMULES RÉCURSIVES POUR LES SÉRIES s_n et σ_n .

Les formules plus générales que nous venons de développer nous fournissent un simple moyen pour déduire un nombre de formules récursives pour les séries numériques s_n et σ_n , formule qui nous conduiront aux formules bien connues pour s_{2n} et σ_{2n} .

Mettons en premier lieu dans (12) $q = 1$, nous aurons généralement,

pour $p > 2$, cette formule élégante

$$c_{p,1} = s_{p+1} - \sum_2^{p-1} c_{p-\nu+1,\nu} \quad (14)$$

et particulièrement pour $p = 2$

$$c_{2,1} = s_3. \quad (14^{\text{bis}})$$

Écrivons maintenant dans la somme figurant au second membre de (14) les termes dans l'ordre invers puis ajoutons à (14) la formule ainsi obtenue, nous aurons, en vertu de (7), cette formule récursive

$$\sum_2^{p-2} s_\nu s_{p-\nu+1} = p \cdot s_{p+1} - 2 c_{p,1}; \quad (15)$$

posons ensuite dans (12) $p = 2$, $q = 2n - 2$, nous trouvons pour $n > 1$

$$(2n - 2)(c_{2n-1,1} + s_{2n}) = \sum_0^{2n-4} (-1)^\nu (\nu + 1) s_{\nu+2} \cdot s_{2n-\nu-2},$$

d'où, en écrivant dans l'ordre inverse les termes de la somme figurant au second membre, cette formule nouvelle

$$2(c_{2n-1,1} + s_{2n}) = \sum_1^{n-1} s_{2\nu} \cdot s_{2n-2\nu} - \sum_1^{n-2} s_{2\nu+1} \cdot s_{2n-2\nu-1}. \quad (15^{\text{bis}})$$

Cela posé, mettons dans (15) $p = 2n - 1$, nous aurons immédiatement, en vertu de (15^{bis}), ces deux formules

$$\sum_1^{n-1} s_{2\nu} \cdot s_{2n-2\nu} = \frac{2n+1}{2} \cdot s_n \quad (16)$$

$$\sum_1^{n-2} s_{2\nu+1} \cdot s_{2n-2\nu-1} = \frac{2n-3}{2} \cdot s_{2n} - 2 c_{2n-1,1}, \quad (16^{\text{bis}})$$

dont la première est bien connue; on la démontre ordinairement en s'appuyant sur des propriétés fondamentales des fonctions trigonométriques.

Prenons maintenant pour point de départ la formule (11), et posons-y $q = 1$, nous aurons

$$d_{p,1} = s_p \sigma_1 - \sum_0^{p-1} d_{p-\nu,\nu+1},$$

ce qui donnera, en vertu de (9) et en appliquant (8) pour $s_p \sigma_1$, cette autre formule récursive

$$\sum_1^p \sigma_\nu \sigma_{p-\nu+1} = p s_{p+1} - 2 \sigma_{p+1} + 2 \gamma_{1,p}; \quad (17)$$

mettons ensuite dans (10) $p = 1$, $q = 2n - 1$, nous aurons de même

$$\sum_0^{2n-2} (-1)^r \sigma_{r+1} \cdot \sigma_{2n-r-1} = 2 \gamma_{1,2n-1}, \quad (17^{\text{bis}})$$

d'où, en vertu de (17) pour $p = 2n - 1$,

$$\sum_1^{n-1} \sigma_{2r} \cdot \sigma_{2n-2r} = \frac{2n-1}{2} \cdot s_{2n} - \sigma_{2n} \quad (18)$$

$$\sum_0^{n-1} \sigma_{2r+1} \cdot \sigma_{2n-2r-1} = \frac{2n-1}{2} \cdot s_{2n} - \sigma_{2n} + 2 \gamma_{1,2n-1}, \quad (18^{\text{bis}})$$

formules dont la première est bien connue comme une conséquence immédiate des propriétés fondamentales des fonctions trigonométriques.

Pour obtenir une troisième catégorie des formules récursives posons dans (10) et dans (13) $q = 1$, nous aurons respectivement

$$2 \gamma_{p,1} = \sigma_p \sigma_1 - \sum_0^{p-2} \gamma_{p-r,r+1}$$

$$\delta_{p,1} + \gamma_{p,1} = \sigma_{p+1} - \sum_0^{p-2} \delta_{p-r,r+1};$$

soustrayons maintenant ces deux formules, puis appliquons (8) et transformons à l'aide de (9) le produit $\sigma_p \sigma_1$, nous aurons

$$\gamma_{p,1} + \delta_{1,p} = \sum_0^{p-2} s_{p-r} \cdot \sigma_{r+1} + s_{p+1} - p \sigma_{p+1}. \quad (19)$$

La formule (13^{bis}) donnera de même, pour $q = 2n - 1$, cette expression analogue

$$\gamma_{2n-1,1} + \delta_{1,2n-1} = \sum_0^{2n-3} (-1)^r \sigma_{r+1} \cdot s_{2n-r-1} + \sigma_{2n}, \quad (19^{\text{bis}})$$

d'où, en vertu de (19) ces deux nouvelles formules récursives

$$\sum_1^{n-1} \sigma_{2r} \cdot s_{2n-2r} = n \sigma_{2n} - \frac{1}{2} s_{2n} \quad (20)$$

$$\sum_0^{n-2} \sigma_{2r+1} \cdot s_{2n-2r-1} = (n-1) \sigma_{2n} - \frac{1}{2} s_{2n} + \gamma_{1,2n-1} + \delta_{1,2n-1}. \quad (20^{\text{bis}})$$

Considérons encore cette autre série numérique

$$t_n = \frac{1}{2^n} \cdot s_n \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \dots, \quad n > 1,$$

ou, ce qui vaut autant,

$$t_n = \frac{1}{2}(s_n + \sigma_n),$$

nous aurons de (16) et (20) ou de (18) et (20) respectivement ces deux autres formules récursives

$$\sum_1^{n-1} t_{2r} \cdot s_{2n-2r} = n t_{2n} \quad (21)$$

$$\sum_1^{n-1} t_{2r} \cdot \sigma_{2n-2r} = (n-1) t_{2n}, \quad (21^{\text{bis}})$$

de façon qu'une addition de ces deux formules donnera cette autre

$$\sum_1^{n-1} t_{2r} \cdot t_{2n-2r} = \frac{2n-1}{2} \cdot t_{2n}. \quad (22)$$

IV. APPLICATIONS AUX FONCTIONS $(s_1(x))^2$, $s_1(x)\sigma_1(x)$ ET $(\sigma_1(x))^2$.

Les formules purement numériques que nous venons d'établir s'appliqueront immédiatement à l'évaluation de six produits formés de deux facteurs pris parmi ces quatre fonctions $s_1(x)$, $s_1(1-x)$, $\sigma_1(x)$ et $\sigma_1(1-x)$. Considérons d'abord le carré de $s_1(x)$, nous aurons, en vertu de (1^{bis}), et en appliquant la règle de CAUCHY

$$(s_1(1-x))^2 = \sum_{n=1}^{n=\infty} (s_2 s_{n-2} + s_3 s_{n-3} + \dots + s_{n-2} s_2) x^{n-2},$$

d'où, en vertu de (15) et de (14^{bis}),

$$(s_1(1-x))^2 = s_2(1-x) - s_2 - 2 \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} c_{n,1} x^{n-1}.$$

Pour transformer ensuite la série infinie figurant au second membre de cette formule introduisons au lieu des $c_{n,1}$ les séries infinies correspondantes, nous trouvons pour le coefficient du terme

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r-1}$$

cette expression

$$\frac{x}{r^2} + \frac{x^2}{r^3} + \frac{x^3}{r^4} + \dots = \frac{x}{r(r-x)} = \frac{1}{r-x} - \frac{1}{r},$$

et nous aurons finalement, après avoir posé $1-x$ au lieu de x , cette formule

$$(s_1(x))^2 = s_2(x) - s_2 + 2\xi(x), \quad (23)$$

où nous aurons posé pour abréger

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right) \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \quad (23^{\text{bis}})$$

La formule (23) n'est démontrée pour le moment que si $|x| < 1$, il est vrai; or, les deux membres de cette formule représentent des fonctions holomorphes dans toute l'étendue du plan des x , à l'exception des points isolés $0, -1, -2, -3, \dots$; c'est-à-dire que notre formule susdite est applicable pour une valeur quelconque de x .

Cherchons maintenant directement, d'après la règle de CAUCHY le carré du second membre de (1), nous aurons, en vertu de (23), pour la fonction

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1} \right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+n-1} \right) \quad (24)$$

cette autre expression remarquable

$$\rho(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)(n+1)} - s_2. \quad (24^{\text{bis}})$$

Prenons encore une fois comme point de départ la formule (1^{bis}), nous aurons de la même manière, en appliquant (15^{bis}), cette autre formule

$$s_1(1+x)s_1(1-x) = -2 \cdot \sum_{n=2}^{n=\infty} (c_{2n-1,1} + s_{2n}) x^{2n-2},$$

de sorte que l'identité

$$s_1(1+x) = s_1(x) - \frac{1}{x}$$

donnera immédiatement

$$s_1(x)s_1(1-x) = -2 \cdot \sum_2^{\infty} c_{2n-1,1} x^{2n-2} - \sum_2^{\infty} (-1)^n s_n x^{n-2} + 2s_2,$$

d'où, après une légère transformation, cette autre formule remarquable

$$s_1(x)s_1(1-x) = 2s_2 - \xi(x) - \xi(1-x) \quad (25)$$

Pour trouver les formules correspondantes qui contiennent la fonction $\sigma_1(x)$ prenons pour point de départ la formule (4^{bis}), nous trouvons immédiatement, en vertu de (17),

$$(\sigma_1(1-x))^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \left((n-1)s_n + 2\gamma_{1,n-1} - 2\sigma_n \right) x^{n-2},$$

d'où, en posant $1-x$ au lieu de x , cette autre formule générale

$$(\sigma_1(x))^2 = s_2(x) - 2\eta(x), \quad (26)$$

où nous avons posé pour abréger

$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \dots + \frac{1}{x+n-1} \right). \quad (26^{\text{bis}})$$

Appliquons maintenant la formule (17^{bis}), nous aurons de même

$$\sigma_1(1+x)\sigma_1(1-x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1,n-1} \cdot x^{2n-2},$$

de sorte que l'identité

$$\sigma_1(1+x) = \frac{1}{x} \sigma_1(x)$$

donnera, après une légère transformation

$$\sigma_1(x)\sigma_1(1-x) = \eta(x) + \eta(1-x). \quad (27)$$

Enfin, pour évaluer le produit $s_1(x)\sigma_1(x)$, appliquons ces deux identités

$$2s_1(x) + 2\sigma_1 = s_1\left(\frac{x}{2}\right) + s_1\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$2\sigma_1(x) = s_1\left(\frac{x}{2}\right) - s_1\left(\frac{x+1}{2}\right),$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (23),

$$s_1(x)\sigma_1(x) = s_2(x) - \sigma_1 \cdot \sigma_1(x) - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\xi\left(\frac{x+1}{2}\right). \quad (28)$$

De la même manière nous aurons, à l'aide de (13^{bis}), cette dernière formule de ce genre

$$s_1(x)\sigma_1(1-x) = \sigma_1 \cdot \sigma_1(x) - \xi_1(1-x) + \xi_2(x), \quad (29)$$

où nous avons posé pour abréger

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ \xi_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) \end{aligned} \right\} \quad (29^{\text{bis}})$$

Certainement, les six produits que nous venons d'évaluer nous fournissent un simple moyen pour généraliser beaucoup les formules numériques données dans la section III. Différentions par exemple $(n-2)$ fois par rapport à x la formule (23), nous aurons

$$\sum_1^{n-1} s_r(x) s_{n-r}(x) = (n-1) s_n(x) - \\ - 2 \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \frac{1}{(x+r)^{n-1}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r} \right),$$

formule qui, pour $x=1$, donnera immédiatement la relation (15).

De la même manière nous obtenons de (26) et de (27) ces deux autres formules

$$\sum_1^{n-1} \sigma_r(x) \sigma_{n-r}(x) = (n-1) s_n(x) - \frac{(-1)^n \cdot 2}{(n-2)!} \cdot D_x^{n-2} \eta(x) \\ \sum_1^{n-1} (-1)^{r-1} \sigma_{n-r}(x) \sigma_r(1-x) = \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \left(D_x^{n-2} \eta(x) + D_x^{n-2} \eta(1-x) \right);$$

posons dans ces formules $x = \frac{1}{2}$ et $2n$ au lieu de n , nous aurons pour cette série numérique

$$\tau_n = \frac{1}{2^n} \cdot \sigma_n \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{1^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \cdots, \quad n \geq 1$$

cette formule réursive

$$\sum_0^{n-1} \tau_{2r+1} \cdot \tau_{2n-2r-1} = \left(n - \frac{1}{2} \right) t_{2n}. \quad (30)$$

Remarquons encore que (28) et (29) donnent respectivement ces deux autres formules

$$\sum_1^{n-1} s_r(x) \sigma_{n-r}(x) = (n-1) \sigma_n(x) - \sigma_1 \cdot \sigma_{n-1}(x) - \\ - \frac{(-1)^n}{2(n-2)!} \left(D_x^{n-2} \xi \left(\frac{x}{2} \right) - D_x^{n-2} \xi \left(\frac{x+1}{2} \right) \right) \\ \sum_1^{n-1} (-1)^{r-1} s_{n-r}(x) \sigma_r(1-x) = \sigma_1 \cdot \sigma_{n-1}(x) - \\ - \frac{(-1)^n}{(n-2)!} \left(D_x^{n-2} \xi_1(1-x) - D_x^{n-2} \xi_2(x) \right),$$

nous aurons cette autre relation numérique

$$\sum_0^{n-1} \tau_{2r+1} \cdot t_{2n-2r} = n \cdot \tau_{2n+1}. \quad (30^{bis})$$

L'analogie entre les formules que nous venons d'indiquer et celles de la section III est évidente; cependant, l'essai de trouver pour $s_n(x)$ ou $\sigma_n(x)$ des formules récurrentes analogues à (16), (18) et (20) doit être désigné à l'avance comme infructueux. En effet, M. HÖLDER (*) a démontré que la fonction de GAUSS $\Psi(x)$, ou ce qui revient au même, la fonction $s_1(x)$ ne peut satisfaire à aucune équation différentielle algébrique, et M. STADIGH (**) a démontré récemment, par une méthode analogue, que la fonction

$$s_1\left(\frac{x}{2}\right) + s_1\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

possède la même propriété; de plus, il est évident que la même démonstration peut être appliquée à la fonction

$$2s_1(x) = s_1\left(\frac{x}{2}\right) - s_1\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

aussi.

V. EXPRESSIONS INTÉGRALES DES SIX PRODUITS DE DEUX FONCTIONS

$s_1(x)$ ou $\sigma_1(x)$.

Pour établir, à l'aide des formules de la section IV, des expressions intégrales pour les six produits de deux fonctions $s_1(x)$ ou $\sigma_1(x)$ appliquons cette méthode générale: Supposons égal à un au moins le rayon de convergence de cette série de puissances

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots, \quad (31)$$

et supposons de plus que cette série

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \dots,$$

(*) *Mathematische Annalen*, t. 28, p. 7.

(**) *Ein Satz über Funktionen, die algebraische Differentialgleichungen befriedigen*, p. 32, (Thèse de doctorat, Helsingfors, 1902).

nous aurons, en appliquant un théorème bien connu (*), cette formule fondamentale dans les recherches qui nous occupent ici

$$\int_0^1 f(t) t^{x-1} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \dots, \quad \Re(x) > 0. \quad (31^{\text{bis}})$$

De plus, il est clair que la série infinie figurant au second membre de (31^{bis}) est convergente dans toute l'étendue du plan des x , à l'exception des points isolés $0, -1, -2, -3, \dots$, où un des termes de la série susdite deviendra infini.

Pour appliquer maintenant à la fonction $\xi(x)$, définie par (23^{bis}), notre méthode générale, il s'agit d'étudier cette série de puissances

$$f(t) = \frac{1}{1} t + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) t^2 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) t^3 + \dots, \quad |t| < 1,$$

ce qui donnera immédiatement

$$f(t) = \frac{1}{1} \cdot \frac{t}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{1-t} + \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{1-t} + \dots = -\frac{1}{1-t} \cdot \log(1-t),$$

de sorte que nous obtenons cette expressions intégrale

$$\xi(x) = -\int_0^1 \frac{(t^{x-1} - 1) \log(1-t)}{1-t} dt, \quad \Re(x) > 0, \quad (32)$$

d'où, en vertu de (3^{bis}) et (23),

$$(s_1(x))^2 = \int_0^1 \frac{(t^{x-1} - 1)(2 \log(1-t) - \log t)}{1-t} dt, \quad \Re(x) > 0, \quad (33)$$

tandis que (25) donnera de même cette expression correspondante

$$s_1(x) s_1(1-x) = \int_0^1 \frac{(t^{x-1} + t^{-x} - 2) \log(1-t) - \log t}{1-t} dt, \quad 2 > \Re(x) > 0 \quad (34)$$

(*) Voir M. DINI: *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse*, p. 525; Leipsic, 1892.

enfin les formules (6^{bis}) et (22) donneront cette troisième formule analogue

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(x) \sigma_1(x) &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{(t^{\frac{x}{2}-1} - t^{\frac{x-1}{2}}) \log(1-t)}{1-t} dt - \\ &- \int_0^1 \frac{t^{x-1} \log(2t)}{1+t} dt, \quad \Re(x) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Considerons ensuite la fonction $\eta(x)$, nous trouverons cette série de puissances

$$f(t) = \log 2 + \left(\log 2 - \frac{1}{1}\right)t + \left(\log 2 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)t^2 + \dots$$

on bien

$$f(t) = (1 + t + t^2 + \dots) \log 2 - (t + t^2 + \dots) \frac{1}{1} + (t^2 + t^3 + \dots) \frac{1}{2} - \dots,$$

ce qui donnera

$$f(t) = \frac{\log 2 - \log(1+t)}{1-t},$$

d'où cette expression intégrale

$$\eta(x) = \int_0^1 \frac{\log 2 - \log(1+t)}{1-t} \cdot t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > 0, \quad (36)$$

et nous obtenons par suite, en vertu de (3^{bis}) et de (26),

$$(\sigma_1(x))^2 = \int_0^1 \frac{2 \log(1+t) - 2 \log 2 - \log t}{1-t} \cdot t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > 0, \quad (37)$$

tandis que (27) donnera cette formule analogue

$$\sigma_1(x) \sigma_1(1-x) = \int_0^1 \frac{(\log 2 - \log(1+t))(t^{x-1} + t^{-x})}{1-t} dt, \quad 1 > \Re(x) > 0. \quad (38)$$

Nous avons encore à étudier les deux fonctions $\xi_1(x)$ et $\xi_2(x)$; considérons d'abord $\xi_1(x)$, la fonction $f(t)$ correspondante se détermine à l'aide de cette série

$$f(t) = \frac{1}{1} \cdot t - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) \cdot t^2 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) t^3 - \dots;$$

c'est-à-dire que nous aurons

$$f(t) = \frac{1}{1} \cdot \frac{t}{1+t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{1+t} + \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{1+t} - \dots = \frac{\log(1+t)}{1+t},$$

de sorte que nous obtenons

$$\xi_1(x) = \int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t} \cdot t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > -1. \quad (39)$$

Quant à la fonction $\xi_2(x)$, nous aurons

$$f(t) = \frac{1}{1} t - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) t^2 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) t^3 - \dots$$

ou bien

$$f(t) = \frac{t}{1} \cdot \frac{1}{1+t} + \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{1+t} + \dots = -\frac{\log(1+t)}{1+t},$$

ce qui donnera

$$\xi_2(x) = -\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{1+t} \cdot t^{x-1} dt, \quad \Re(x) > -1. \quad (40)$$

Cela posé, la formule (29) donnera, en vertu de (6^{bis}),

$$\left. \begin{aligned} & s_1(x) \sigma_1(1-x) = \\ & = \int_0^1 \frac{(\log 2 + \log(1-t)) t^{x-1} - \log(1+t) \cdot t^{-x}}{1+t} dt, \quad 2 > \Re(x) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Enfin, nous avons à étudier la fonction $\rho(x)$ définie par (24^{bis}), ce qui nous conduira à cette fonction auxiliaire

$$f(t) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} t + \frac{1}{3} t^2 + \frac{1}{4} t^3 + \dots = -\frac{\log(1-t)}{t},$$

d'où, nous obtiendrons, en vertu de (3^{bis}),

$$\rho(x) = \int_0^1 \left(\frac{\log t}{1-t} - \log(1-t) \cdot t^{x-2} \right) dt, \quad \Re(x) > 0. \quad (42)$$

VI. DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE FACTORIELLES.

Les expressions intégrales que nous venons de développer pour nos fonctions nous fournissent un moyen infaillible pour décider si une telle fonction est développable ou non en série de factorielles de cette forme

$$\Omega(x) = \frac{b_0}{x} + \frac{1!b_1}{x(x+1)} + \frac{2!b_2}{x(x+1)(x+2)} + \dots, \quad (\alpha)$$

où les coefficients b sont indépendants de x , et de plus les mêmes intégrales nous permettent de déduire ce développement, s'il est possible.

En effet, dans un mémoire récent (*) j'ai démontré que la condition suffisante et nécessaire qui doit être remplie par une fonction développable en série de la forme (α) est que la fonction en question se présente sous cette forme

$$\Omega(x) = \int_0^1 f(t) \cdot t^{x-1} dt, \quad (\beta)$$

où la fonction $f(t)$ doit être holomorphe aux environs du point $t=1$ et cela de sorte que la série de puissances

$$f(1-t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots, \quad f^{(n)}(1) = (-1)^n n! b_n, \quad (\gamma)$$

a son rayon de convergence égal à un au moins, et, de plus, cette fonction $f(t)$ doit satisfaire à quelques autres conditions faciles à indiquer mais sans influence sur la question qui nous occupe ici.

Cela posé, on verra sur-le-champ que la condition (γ) est en défaut pour $\xi(x)$, $\xi_2(x)$ et $\rho(x)$ et pour toutes leurs dérivées, parce que les fonctions correspondantes $f(t)$ possèdent en $t=1$ un point critique.

Pour développer en série de factorielles la fonction $\eta(x)$, écrivons sous cette forme l'expression intégrale (36)

$$\eta(x) = - \int_0^1 \frac{\log\left(1 - \frac{t}{2}\right)}{t} (1-t)^{x-1} dt = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s \cdot 2^s} \cdot \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{x-1} dt$$

(*) *Annales de l'École Normale*. 3.^e série, t. 19, p. 419. Paris, 1902.

Annali di Matematica, Serie III, tomo IX.

ce qui donnera immédiatement cette série de factorielles

$$\eta(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(s-1)!}{s \cdot 2^s} \cdot \frac{1}{x(x+1)\dots(x+s-1)} \quad (43)$$

qui est valable dans toute l'étendue du plan des x .

Nous aurons de la même manière, en vertu de (3^{bis}), cet autre développement

$$s_2(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(s-1)!}{s} \cdot \frac{1}{x(x+1)\dots(x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0, \quad (44)$$

d'où, en vertu de (26),

$$(\sigma_1(x))^2 = \sum_{s=2}^{s=\infty} \frac{2^{s-1} - 1}{s \cdot 2^{s-1}} \cdot \frac{1}{x(x+1)\dots(x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0. \quad (45)$$

Quant à la fonction $\xi_1(x)$, il s'agit de déterminer ce coefficient

$$f^{(n)}(2), \quad \text{où} \quad f(t) = \frac{\log t}{t};$$

or, un calcul direct donnera, à l'aide de la formule de LEIBNITZ,

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n n!}{t^{n+1}} (\log t - \lambda(n)),$$

où nous avons posé pour abréger $\lambda(0) = 0$ et généralement pour $n \geq 1$

$$\lambda(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n};$$

cela posé, les formules générales (α) et (γ) donnent ici

$$\xi_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{2^{s+1}} \cdot \frac{\log 2 - \lambda(s)}{x(x+1)\dots(x+s)}, \quad (46)$$

développement qui est valable dans toute l'étendue du plan des x . Remarquons que nous aurons

$$\sigma_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{2^{s+1}} \cdot \frac{1}{x(x+1)\dots(x+s)},$$

la formule (46) s'écrira sous cette forme aussi

$$\sigma_1(x) \log 2 - \xi_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!}{2^{s+1}} \cdot \frac{\lambda(s)}{x(x+1)\dots(x+s)}. \quad (46^{\text{bis}})$$

Considérons maintenant les séries de factorielles d'une forme entièrement

différente de (α) que M. PINCHERLE (*) a étudiées récemment. Pour l'intégrale (β) on obtiendra de tels développements en posant dans cette intégrale $1 - t$ au lieu de t , ce qui donnera

$$\Omega(1-x) = \int_0^1 f(1-t) (1-t)^{-x} dt; \quad (\delta)$$

cela posé, supposons intégrable de $t=0$ à $t=1$ la fonction $f(1-t)$, une application de la formule du binôme donnera immédiatement ce développement

$$\Omega(1-x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \binom{x}{s}, \quad (\epsilon)$$

où nous avons posé pour abréger

$$a_s = \int_0^1 f(1-t) t^s dt. \quad (\xi)$$

L'application de ces formules générales aux fonctions particulières que nous venons d'introduire est évidente; considérons d'abord $\xi(1-x)$, nous aurons immédiatement

$$a_0 = 0 \quad a_s = - \int_0^1 t^{s-1} \log t dt = \frac{1}{s^2},$$

ce qui donnera

$$\xi(1-x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \cdot \binom{x}{s}, \quad \Re(x) < 1, \quad (47)$$

tandis que nous aurons pour $s_2(1-x)$ ces coefficients

$$a_s = - \int_0^1 t^{s-1} \log(1-t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+s)},$$

ou bien

$$a_0 = \frac{\pi^2}{6}, \quad a_s = \frac{1}{s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right) = \frac{1}{s} \cdot \lambda(s),$$

de façon que nous obtiendrons

$$s_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda(s)}{s} \cdot \binom{x}{s}, \quad \Re(x) < 1. \quad (48)$$

(*) *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei*, serie 5.^a, t. 11, p. 139, p. 417; 1902.

Ces deux développements trouvés, nous aurons immédiatement, en vertu de (23), cet autre

$$(s_1(1-x))^2 = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \left(\lambda(s) - \frac{2}{s} \right) \cdot \binom{x}{s}. \quad (49)$$

Quant à la fonction $\eta(1-x)$, nous aurons

$$a_s = - \int_0^1 \log \left(1 - \frac{t}{2} \right) t^{s-1} dt = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n(n+s)} \cdot \frac{1}{2^n},$$

d'où, en vertu d'une formule de **LEGENDRE** (*),

$$a_0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2$$

et plus généralement pour $s \geq 1$

$$a_s = \frac{1}{s} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right) \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{2^s}{s} \mu(s) - \frac{2^s - 1}{s} \log 2,$$

où nous avons posé pour abréger $\mu(1) = 0$ et, pour $s \geq 1$,

$$\mu(s) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{2^s}.$$

Cela posé, nous aurons

$$\eta(1-x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2 + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \left(2^s \mu(s) - (2^s - 1) \log 2 \right) \cdot \binom{x}{s}, \quad (50)$$

où, en vertu de (26) et (48), cet autre développement

$$\left. \begin{aligned} (\tau_1(1-x))^2 &= (\log 2)^2 + \\ &+ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \left(\lambda(s) - 2^{s+1} \mu(s) + (2^{s+1} - 2) \log 2 \right) \cdot \binom{x}{s}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Le développement correspondant pour $\xi_1(1-x)$ deviendra plus compliqué; pour la fonction $\xi_s(1-x)$ nous trouvons, au contraire, ce coefficient général

$$a_s = - \int_0^1 \frac{\log t}{2-t} \cdot t^s dt = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{(n+s)^2},$$

(*) *Exercices de calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 244.

d'où, en vertu de la formule de LEGENDRE,

$$a_s = 2^s \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2 - \mu_1(s) \right),$$

où nous avons posé pour abrégé $\mu_1(0) = 0$ et plus généralement, pour $s \geq 1$,

$$\mu_1(s) = \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{2^s},$$

ce qui donnera

$$\xi_2(1-x) = \sum_{s=0}^{\infty} 2^s \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2 - \mu_1(s) \right) \cdot \binom{x}{s}. \quad (52)$$

Considérons maintenant la dernière des fonctions particulières que nous avons introduites, savoir la fonction $\rho(1-x)$, nous aurons sans peine ce développement nouveau

$$\rho(1-x) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{s^2} \right) \cdot \binom{x}{s}. \quad (53)$$

En terminant ces recherches nous avons encore à donner quelques développements qui contiennent des séries de factorielles et du premier et du second genre. En premier lieu, la formule (27) donnera, en vertu de (43) et (50), ce développement

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) \sigma_1(1-x) = & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(s-1)!}{s \cdot 2^s} \cdot \frac{1}{x(x+1) \cdots (x+s-1)} + \\ & + \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} (\log 2)^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \left(2^s \mu(s) - (2^s - 1) \log 2 \right) \cdot \binom{x}{s}. \end{aligned} \quad (54)$$

Écrivons encore sous cette forme la formule (29)

$$s_1(1-x) \sigma_1(x) = \sigma_1 \cdot \sigma_1(1-x) - \xi_1(x) + \xi_2(1-x).$$

il s'agit d'abord de développer la fonction $\sigma_1(1-x)$; or, nous trouvons, en vertu de (6),

$$a_s = \int_0^1 \frac{t^s}{2-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{s+n} = 2^s \left(\log 2 - \mu(s) \right),$$

d'où

$$\sigma_1 \cdot \sigma_1(1-x) = \sum_{s=0}^{\infty} 2^s \left((\log 2)^2 - \mu(s) \log 2 \right) \cdot \binom{x}{s},$$

de sorte que nous obtiendrons finalement, en vertu de (46) et (52), ce développement

$$s_1(1-x)\sigma_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty} 2^s \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} (\log 2)^2 - \mu(s) \log 2 - \mu_1(s) \right) \cdot \binom{x}{s} - \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!}{2^{s+1}} \cdot \frac{\log 2 - \lambda(s)}{x(x+1)\dots(x+s)} \right\} \quad (55)$$

Copenhague, le 19 avril 1903.