Über Eigenschaften eines vielfachen Integrals, welche Verallgemeinerungen zweier Sätze der Theorie der Wirbelbewegung sind.

Von K. Żorawski in Krakau.

Diese Note bildet einen Auszug aus einer Abhandlung, welche ich im Jahre 1902 unter gleichem Titel im XIII. Bande der Zeitschrift „Prace matematyczno-fizyczne“ (Warschau), S. 107–153, in polnischer Sprache veröffentlicht habe. Einige in dieser Abhandlung ausgeführte Untersuchungen beziehen sich auf die Invariantentheorie der vollständigen Systeme partieller Differentialgleichungen, führen auf ein mit dem vollständigen System verbundenes System von partiellen Differentialgleichungen und bestehen teilweise in der Aufstellung von Eigenschaften dieses letzteren Systems.

Wenn nämlich die Gleichungen:

$$X_{\alpha} f = \sum_{i=1}^n \xi_{\alpha i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-r) \quad (A)$$

ein $(n-r)$ -gliedriges vollständiges System bilden, wobei die Beziehungen:

$$(X_{\alpha}, X_l) = \sum_{\tau=1}^{n-r} \Pi_{\alpha l \tau} X_{\tau} f \quad (\alpha, l = 1, 2, \dots, n-r)$$

bestehen, so kann, wie in meiner Abhandlung unter anderen Untersuchungen gezeigt ist, die Aufstellung aller r -fachen Integralinvarianten der unendlichen Gruppe:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-r} \rho_{\alpha} X_{\alpha} f,$$

wo ρ_{α} willkürliche Funktionen der Veränderlichen x_i sind, auf die Bestimmung der Funktion λ aus den Gleichungen:

$$X_{\alpha}(\lambda) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_{\alpha i}}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^{n-r} \Pi_{\alpha \nu \nu} \right) \lambda = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (B)$$

zurückgeführt werden.

Auf dieselben Gleichungen (B) kommen in letzteren paar Jahren auch die Herren Th. de Donder und T. Chella, welche diese Gleichungen bei Weiterführung gewisser von Sophus Lie herrührender, mit Integralinvarianten und Multiplikatoren eng verbundener Integrationstheorien erhalten und auf wertvolle Weise in Anwendung bringen.

Insbesondere hat Herr Th. de Donder im Jahre 1908 bei Behandlung der Theorie der Multiplikatoren der vollständigen Systeme¹⁾ das System (B) als Definitionssystem der Multiplikatoren angenommen und hat sich dabei damit beschäftigt, den Satz zu begründen, daß das genannte System immer Lösungen besitzt, was in meiner erwähnten Abhandlung vom Jahre 1902 bewiesen war.

Ich habe Herrn Th. de Donder auf meine polnische Abhandlung aufmerksam gemacht und ihm brieflich einige in derselben aufgestellte Resultate in deutscher Sprache mitgeteilt. Hierauf ist von ihm in einer zweiten Abhandlung²⁾ im Jahre 1909 unter anderem eine Bearbeitung gewisser weiterer Ergebnisse meiner polnischen Abhandlung veröffentlicht worden, wobei er meine Abhandlung nennt und eigene Beweisführungen benützt.

Im Jahre 1910 erschien eine weitere Abhandlung³⁾ des Herrn Th. de Donder über diesen Gegenstand, in welcher zunächst eine Eigenschaft äquivalenter vollständiger Systeme behandelt wird, welche gleichfalls in meiner Abhandlung vom Jahre 1902 aufgestellt und bewiesen worden war.

In demselben Jahre 1910 erschien die umfangreiche Arbeit⁴⁾ des Herrn Tito Chella, in welcher für die Multiplikatoren des vollständigen Systems (A) die Gleichungen (B) abgeleitet und unter anderen Hilfsmitteln auf Integrationsprobleme verwertet werden.

Herr Th. de Donder veröffentlichte im Jahre 1911 noch eine Note,⁵⁾ in welcher unter anderem das System (B) und die soeben erwähnte Eigenschaft äquivalenter vollständiger Systeme in Anwendung gebracht werden.

Aus diesen Bemerkungen ersieht man, daß gewisse in den letzteren paar Jahren erschienenen Publikationen der Herren Th. de Donder und T. Chella und besonders die Publikationen des Herrn Th. de Donder wesentliche Berührungspunkte mit den Betrachtungen der von mir im Jahre 1902 veröffentlichten Abhandlung besitzen. In bezug darauf ist von Herrn de la Vallée-

¹⁾ Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé. Bulletins de l'Académie royale de Belgique 1908. Siehe auch Atti del IV. Congresso internazionale dei matematici. Vol. II, S. 129 u. ff.

²⁾ Applications du multiplicateur généralisé (dabei auch der Bericht des Herrn de la Vallée-Poussin über diese Abhandlung). Bulletins de l'Académie royale de Belgique 1909.

³⁾ Sur le multiplicateur généralisé. Bulletins de l'Académie de Belgique 1910.

⁴⁾ Tito Chella, Vantaggi che si possono trarre da noti invarianti integrali e differenziali in alcuni problemi di integrazione. Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa. Scienze Fis., Mat. e Naturali. Volume XI, 1910.

⁵⁾ Quelques remarques sur le multiplicateur de Jacobi et le multiplicateur généralisé. Bulletins de l'Académie royale de Belgique. Classe des Sciences 1911.

Poussin in dem Berichte, welchen er über die Abhandlung des Herrn Th. de Donder vom Jahre 1909 veröffentlicht hat, unter anderem die Bemerkung gemacht worden, daß meine Abhandlung vom Jahre 1902 aus sprachlichen Gründen schwer zugänglich ist. Weil dabei in den Abhandlungen des Herrn Th. de Donder die von mir herrührenden Sätze nicht in demselben Zusammenhang und auch teilweise nicht in der gleichen Allgemeinheit auftreten, weil ferner die hier erwähnte unendliche Gruppe in den neuerdings veröffentlichten Untersuchungen des Herrn E. Vessiot über die Integration der vollständigen Systeme¹⁾ eine Rolle spielt, so glaube ich in diesen Umständen Gründe zu erblicken, um einen Auszug aus meiner polnischen Abhandlung in deutscher Sprache zu veröffentlichen. Einige Rechnungen und Erläuterungen, welche für die Darstellung des Hauptinhaltes der Abhandlung nicht unentbehrlich sind, lasse ich dabei der Kürze halber weg. Im übrigen bildet aber der Text des Auszuges eine Darstellung des Textes meiner Abhandlung vom Jahre 1902. Die Fußnoten enthalten dagegen Bemerkungen, welche gegenwärtig von mir hinzugefügt werden.

Dabei will ich noch bemerken, daß ich im Jahre 1909 eine Abhandlung „Über gewisse Transformationseigenschaften der vielfachen Integrale“ im Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie veröffentlicht habe, in welcher unter anderem bei Benützung gewisser symbolischer Bezeichnungsweise Verallgemeinerungen der Betrachtungen der Abhandlung vom Jahre 1902 und Besprechungen verschiedener verwandter Gegenstände enthalten sind. Auf Sätze, welche erst in dieser Abhandlung aufgestellt werden, gehe ich hier gar nicht ein.

Auszug aus der Abhandlung vom Jahre 1902.

In der Arbeit „Über die Erhaltung der Wirbelbewegung“ (Rozprawy Wyzd. mat. przyr. Akad. Umiej. w Krakowie, t. XXXIV, Bulletin international de l'Académie de Cracovie. Classe des Sciences math. et nat., 1900) befaßte ich mich mit solchen Bewegungen eines kontinuierlichen Mediums, während welcher die Wirbellinien aus denselben materiellen Linienelementen bestehen und insbesondere leitete ich Formeln ab, die bestimmen, wie sich während derartiger Bewegungen die Intensitäten der Wirbel ändern. Außerdem habe ich dort alle zweifachen Integrale bestimmt, welche bei allen infinitesimalen Transformationen, deren Bahnkurven Wirbellinien sind, invariant bleiben. In vorliegender Arbeit betrachte ich statt der Differentialgleichungen der Wirbellinien das System von r unabhängigen Pfaffschen Differentialgleichungen im Raume von n Dimensionen und stelle mir die Aufgabe, analoge Untersuchungen durchzuführen.

¹⁾ Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 20 juin 1910, S. 1662 und Annales de l'école normale supérieure, t. XXIX, 1912, S. 209—278.

1. Es sei die Summe:

$$S = \sum_{\sigma_1=1}^n \sum_{\sigma_2=1}^n \dots \sum_{\sigma_r=1}^n A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r} \frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1} \frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2} \dots \frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r},$$

wo $A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r}$ Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind, die wir seinerseits als willkürliche Funktionen der $r < n$ Parameter $p_1, p_2, \dots, p_r$ betrachten. Andererseits betrachten wir die infinitesimale Transformation:

$$Df = \sum_{i=1}^n u_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und versuchen die Operation Df an der Summe S auszuführen, wobei wir annehmen, daß die Parameter nicht transformiert werden.

Auf Grund der Formel:

$$D\left(\frac{\partial x_{\sigma_\kappa}}{\partial p_\kappa}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_{\sigma_\kappa}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_\kappa},$$

ferner der Tatsache, daß wir die Summe:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\sigma_1=1}^n \sum_{\sigma_2=1}^n \dots \sum_{\sigma_r=1}^n A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r} \frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1} \dots \frac{\partial x_{\sigma_{\kappa-1}}}{\partial p_{\kappa-1}} \frac{\partial x_i}{\partial p_\kappa} \frac{\partial x_{\sigma_{\kappa+1}}}{\partial p_{\kappa+1}} \dots \frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r} \frac{\partial u_{\sigma_\kappa}}{\partial x_i}$$

durch Umstellung der Zeichen i und σ_κ in der Form:

$$\sum_{\sigma_1=1}^n \sum_{\sigma_2=1}^n \dots \sum_{\sigma_r=1}^n \left(\sum_{i=1}^n A_{\sigma_1, \dots, \sigma_{\kappa-1}, i, \sigma_{\kappa+1}, \dots, \sigma_r} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\sigma_\kappa}} \right) \frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1} \frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2} \dots \frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r}$$

darstellen können und schließlich unter Benützung der Bezeichnung:

$$W_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r}^{(i)} f = A_{i, \sigma_2, \dots, \sigma_r} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_1}} + A_{\sigma_1, i, \sigma_3, \dots, \sigma_r} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_2}} + \dots \\ \dots + A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{r-1}, i} \frac{\partial f}{\partial x_{\sigma_r}},$$

erhalten wir:

$$D(S) = \sum_{\sigma_1=1}^n \sum_{\sigma_2=1}^n \dots \sum_{\sigma_r=1}^n \left\{ D(A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r}) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n W_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r}^{(i)}(u_i) \right\} \frac{\partial x_{\sigma_1}}{\partial p_1} \frac{\partial x_{\sigma_2}}{\partial p_2} \dots \frac{\partial x_{\sigma_r}}{\partial p_r}.$$

Diese Formel wenden wir auf solche Ausdrücke S an, deren Koeffizienten folgende Eigenschaften besitzen. Wenn zwei beliebige von den Indizes σ_k einander gleich sind, so ist:

$$A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r} = 0,$$

wenn dagegen alle Indizes verschieden sind, so haben wir:

$$A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r} = \pm A_{s_1, s_2, \dots, s_r},$$

wo $s_1, s_2, \dots, s_r$ dieselben Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ sind, aber die Reihenfolge derselben so gewählt ist, daß

$$s_1 < s_2 < \dots < s_r$$

und wo man das Vorzeichen $+$ oder das Vorzeichen $-$ annehmen muß, je nachdem die Reihenfolge $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ aus der Reihenfolge $s_1, s_2, \dots, s_r$ mittels gerader oder ungerader Anzahl von Vertauschungen zweier Buchstaben erhalten wird. Bei diesen Voraussetzungen kann die Summe in der Form:

$$S = \sum_{s_r=1}^n \sum_{s_{r-1}=1}^{s_r-1} \dots \sum_{s_1=1}^{s_2-1} A_{s_1, s_2, \dots, s_r} \frac{d(x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_r})}{d(p_1, p_2, \dots, p_r)} \quad (1)$$

dargestellt werden. Es ist leicht zu beweisen, daß das Symbol:

$$W_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r}^{(i)} f$$

bei Vertauschung der unteren Indizes dieselben Eigenschaften wie das Symbol $A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r}$ besitzt. Daraus ergibt sich, daß wir bei obigen Voraussetzungen für $D(S)$ folgende Formel erhalten:

$$D(S) = \sum_{s_r=1}^n \sum_{s_{r-1}=1}^{s_r-1} \dots \sum_{s_1=1}^{s_2-1} \left\{ D(A_{s_1, s_2, \dots, s_r}) + \sum_{i=1}^n W_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)}(u_i) \right\} \frac{d(x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_r})}{d(p_1, p_2, \dots, p_r)} \quad (2)$$

Auf Grund dieser Formel ergibt sich für das r -fache Integral:

$$M = \iint \dots \int \sum_{s_r=1}^n \sum_{s_{r-1}=1}^{s_r-1} \dots \sum_{s_1=1}^{s_2-1} A_{s_1, s_2, \dots, s_r} dx_{s_1} dx_{s_2} \dots dx_{s_r},$$

die Formel:

$$D(M) = \iiint \dots \int \sum_{s_r=1}^n \sum_{s_{r-1}=1}^{s_r-1} \dots \sum_{s_1=1}^{s_2-1} \left\{ D(A_{s_1, s_2, \dots, s_r}) + \sum_{i=1}^n W_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)}(u_i) \right\} dx_{s_1} dx_{s_2} \dots dx_{s_r}^{1)}$$

und die Bedingungen der Invariabilität dieses Integrals bei Df sind:

$$D(A_{s_1, s_2, \dots, s_r}) + \sum_{i=1}^n W_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)}(u_i) = 0,$$

wo man für $s_1, s_2, \dots, s_r$ der Reihe nach alle Kombinationen von $1, 2, \dots, n$ nach r nehmen muß. Mit der Aufstellung einiger Spezialfälle derartiger Bedingungen beschäftigte sich Herr Th. de Donder in der Abhandlung „Étude sur les invariants intégraux“ (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Band XV, 1901, S. 98—100).

2. Betrachten wir jetzt $n-1$ solche infinitesimale Transformationen:

$$X_{\alpha} f = \sum_{i=1}^n \xi_{\alpha i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-r),$$

daß nicht alle Determinanten $(n-r)^{\text{ten}}$ Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}, & \xi_{12}, & \dots, & \xi_{1n} \\ \xi_{21}, & \xi_{22}, & \dots, & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-r, 1}, & \xi_{n-r, 2}, & \dots, & \xi_{n-r, n} \end{vmatrix}$$

identisch gleich Null sind und bezeichnen mit Δ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_r}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_r}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{11}, & \xi_{12}, & \dots, & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-r, 1}, & \xi_{n-r, 2}, & \dots, & \xi_{n-r, n} \end{vmatrix}.$$

¹⁾ Diese allgemeine Formel wird neuerdings auch von Herrn Goursat in der Abhandlung: Sur les invariants intégraux, im Journal de math. pures et appl., t. IV, 6. Série, 1908, S. 340, abgeleitet.

Diese Determinante ist eine Summe von der Form (1) und wir haben für $S = \Delta$:

$$A_{s_1, s_2, \dots, s_r} = \pm \begin{vmatrix} \xi_{1t_1} & \xi_{1t_2} & \dots & \xi_{1t_{n-r}} \\ \xi_{2t_1} & \xi_{2t_2} & \dots & \xi_{2t_{n-r}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-r, t_1} & \xi_{n-r, t_2} & \dots & \xi_{n-r, t_{n-r}} \end{vmatrix},$$

wo die Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_{n-r}$ alle von $s_1, s_2, \dots, s_r$ verschieden sind und den Ungleichheiten:

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{n-r}$$

genügen, und wo man das Vorzeichen $+$ oder $-$ wählt, je nachdem die Summe:

$$(r+1) + (r+2) + \dots + n + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-r}$$

eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Wir können dabei annehmen, daß auch hier die Symbole $A_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r}$, wo $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ irgend welche Zahlen $1, 2, \dots, n$ sind, mit den Symbolen:

$$A_{s_1, s_2, \dots, s_r} (s_1 < s_2 < \dots < s_r)$$

so verbunden sind, wie wir es in der früheren Nummer auseinander-gesetzt haben.

Wenn wir mit $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-r}$ beliebige Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnen, so wird die Formel:

$$Xf = \sum_{\kappa=1}^{n-r} \rho_{\kappa} (x_1, x_2, \dots, x_n) X_{\kappa} f \quad (3)$$

das Symbol von unendlich vielen infinitesimalen Transformationen des n -fachen Raumes sein. Die Bedingungen der Invariabilität der Schar (3) bei Df wird man in der Form:

$$(D, X_k) = \sum_{\tau=1}^{n-r} \omega_{\kappa\tau} (x_1, x_2, \dots, x_n) X_{\tau} f, \\ (k=1, 2, \dots, n-r)$$

oder in der Form:

$$D(\xi_{ki}) = \sum_{l=1}^n \xi_{kl} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \sum_{\tau=1}^{n-r} \omega_{\kappa\tau} \xi_{\tau i} \quad (4) \\ (k=1, 2, \dots, n-r; i=1, 2, \dots, n)$$

darstellen können.

Außer obigen Bezeichnungen wird es bequem sein, noch die Bezeichnung:

$$B_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}} = \begin{vmatrix} \xi_{1\lambda_1} & \xi_{1\lambda_2} & \dots & \xi_{1\lambda_{n-r}} \\ \xi_{2\lambda_1} & \xi_{2\lambda_2} & \dots & \xi_{2\lambda_{n-r}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-r, \lambda_1} & \xi_{n-r, \lambda_2} & \dots & \xi_{n-r, \lambda_{n-r}} \end{vmatrix}$$

zu benützen. Nehmen wir an, daß die Bedingungen (4) erfüllt sind und führen an dieser Determinante die Operation Df aus, so erhalten wir zwei Summen von Determinanten, von denen die eine, welche keine Funktionen $\omega_{\kappa\tau}$ enthält, auf die Form:

$$\sum_{\mu=1}^{n-r} \sum_{l=1}^n B_{\lambda_1, \dots, \lambda_{\mu-1}, l, \lambda_{\mu+1}, \dots, \lambda_{n-r}} \frac{\partial u_{i_\mu}}{\partial x_l}$$

und die andere, welche die Funktionen $\omega_{\kappa\tau}$ enthält, auf die Form:

$$\tilde{\omega} B_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}},$$

wo

$$\tilde{\omega} = \sum_{\nu=1}^{n-r} \omega_{\nu\nu},$$

gebracht werden kann.

Das erhaltene Resultat für $D(B_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}})$ können wir im Falle, wenn obige Schar von infinitesimalen Transformationen bei Df unverändert bleibt, zur Berechnung von $D(\Delta)$ in Anwendung bringen.

Wenn wir nämlich die Bezeichnung:

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

eingeführen, so erhalten wir auf Grund der früheren Formeln:

$$D(A_{s_1, s_2, \dots, s_r}) = (\Theta + \tilde{\omega}) A_{s_1, s_2, \dots, s_r} - \sum_{i=1}^n W_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)}(u_i), \quad (5)$$

wir gelangen also auf Grund der Formel (2) zu dem Resultat:

$$D(\Delta) = (\Theta + \tilde{\omega}) \Delta. {}^1) \quad (6)$$

¹⁾ Ein Spezialfall dieser Formel wird auf S. 13 der Abhandlung des Herrn Th. de Donder „Applications du multiplicateur généralisé“ (1909) wiedergegeben. Herr Th. de Donder beweist diese Formel unter der Annahme, daß die Gleichungen $X_{\kappa} f = 0$ ein vollständiges System bilden, während dieselbe hier dieser Beschränkung nicht unterworfen ist.

Wir wollen nun voraussetzen, daß unabhängig davon, welche Funktionen der Parameter p_κ für die Größen x_i gewählt werden, die Determinante Δ bei Ausführung von Df sich so verhält, wie durch die Formel (6) angegeben wird, d. h. daß die Formeln (5) bestehen. Wir fragen dabei, wie sich bei dieser Voraussetzung die betrachtete Schar von infinitesimalen Transformationen (3) verhält. Um diese Frage zu beantworten, wollen wir an Stelle der Schar (3) die Schar von infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_{\kappa=1}^{n-r} p_\kappa(x_1, x_2, \dots, x_n) Y_\kappa f$$

eingeführen, wo p_κ willkürliche Funktionen und $Y_\kappa f$ die Operationen:

$$Y_{t_\mu} f = \frac{\partial f}{\partial x_{t_\mu}} - \frac{W_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(t_\mu)} f}{A_{s_1, s_2, \dots, s_r}} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-r) \quad (7)$$

bezeichnen. Diese Schar ist der Schar (3) äquivalent. Man kann verifizieren, daß, wenn die Beziehungen (5) stattfinden, die Symbole (D, Y_{t_μ}) ($\mu = 1, 2, \dots, n-r$) linear und homogen durch die Symbole (7) ausgedrückt werden können, d. h. daß, wenn die Formel (6) besteht, die Schar von infinitesimalen Transformationen (3) bei Df invariant bleibt.

Betrachten wir nun das System von r Pfaffschen Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda i}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, r) \quad (8)$$

und setzen voraus, daß erstens nicht alle Determinanten r^{ten} Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \dots, \alpha_{rn} \end{vmatrix}$$

gleich Null sind und daß zweitens die Größen $\alpha_{\lambda i}$ mit den obigen $\xi_{\kappa i}$ durch die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^n \xi_{\kappa i} \alpha_{\lambda i} = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-r; \lambda = 1, 2, \dots, r)$$

verbunden sind. Bekanntlich wird dann durch diese Transformation, welche die Schar Xf invariant läßt, auch das System der Pfaffschen Gleichungen nicht verändert und gegenseitig. Es wird also durch unsere Betrachtung ein Satz über die Bedingungen der Invariabilität des Systems von Pfaffschen Gleichungen bei der infinitesimalen Transformation Df aufgestellt.

Um diesen Satz in eine Form zu bringen, welche eine direkte Verallgemeinerung des bezüglichen Satzes der Theorie der Wirbelbewegung ist (siehe Bulletin de Cracovie, Band XXXIX, S. 241), beachten wir, daß auf Grund der Formel (6) für das Integral:

$$N = \iint \dots \int \Delta dp_1 dp_2 \dots dp_r,$$

welches auf eine willkürliche r -fache Mannigfaltigkeit erstreckt wird, die Formel:

$$D(N) = \iint \dots \int (\Theta + \tilde{\omega}) \Delta dp_1 dp_2 \dots dp_r \quad (9)$$

erhalten wird.

Wir gelangen also zu dem folgenden Satz:

Wenn ein System von Pfaffschen Gleichungen (8) ein invariantes System der infinitesimalen Transformation Df ist, so wird bei beliebiger r -fachen Mannigfaltigkeit, auf welche die Integration im Integral N erstreckt ist, $D(N)$ durch die Formel (9) ausgedrückt sein, wo $\tilde{\omega}$ eine Funktion der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet und umgekehrt, sobald für jede r -fache Mannigfaltigkeit, auf welche die Integration im Integral N erstreckt ist, $D(N)$ durch die Formel (9) ausgedrückt wird, dann bleibt das System von Pfaffschen Gleichungen (8) bei der infinitesimalen Transformation Df invariant.

3. Betrachten wir nun die Schar der infinitesimalen Transformationen:

$$Xf = \sum_{\kappa=1}^{n-r} \rho_{\kappa}(x_1, x_2, \dots, x_n) X_{\kappa}f$$

sowie die Schar der infinitesimalen Transformationen:

$$Yf = \sum_{\kappa=1}^{n-r} \sigma_{\kappa}(y_1, y_2, \dots, y_n) Y_{\kappa}f,$$

wo die Funktionen σ_{κ} ähnlich wie die früheren Funktionen ρ_{κ} willkürliche Funktionen sind und die Symbole $Y_{\kappa}f$ solche $n-r$ infinitesimale Transformationen:

$$Y_{\kappa}f = \sum_{i=1}^n \eta_{\kappa i}(y_1, y_2, \dots, y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-r)$$

bezeichnen, für welche nicht alle Determinanten $(n-r)^{\text{ten}}$ Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \eta_{11}, & \eta_{12}, & \dots, & \eta_{1n} \\ \eta_{21}, & \eta_{22}, & \dots, & \eta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{n-r,1}, & \eta_{n-r,2}, & \dots, & \eta_{n-r,n} \end{vmatrix} \quad (10)$$

identisch gleich Null sind. Es sei ferner die Transformation:

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Die Bedingungen, daß die Scharen Xf und Yf durch diese Transformation ineinander überführbar seien, bestehen darin, daß solche Funktionen $w_{\kappa\tau}$ mit der Determinante:

$$\Omega = \begin{vmatrix} w_{11}, & w_{12}, & \dots, & w_{1, n-r} \\ w_{21}, & w_{22}, & \dots, & w_{2, n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{n-r, 1}, & w_{n-r, 2}, & \dots, & w_{n-r, n-r} \end{vmatrix},$$

die nicht identisch gleich Null ist, vorhanden sind, bei welchen die Gleichheiten:

$$Y_{\kappa} f = \sum_{\tau=1}^{n-r} w_{\kappa\tau} X_{\tau} f,$$

d. h. die Gleichheiten:

$$\eta_{\kappa i} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\tau=1}^{n-r} w_{\kappa\tau} \xi_{\tau l} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \quad \left(\begin{matrix} \kappa = 1, 2, \dots, n-r \\ i = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right)$$

stattfinden. Es möge dabei die r -fache Mannigfaltigkeit:

$$x_i = x_i(p_1, p_2, \dots, p_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

vermöge der Transformation (11) in die Mannigfaltigkeit:

$$y_i = y_i(p_1, p_2, \dots, p_r) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

übergehen. Durch Differentiation erhalten wir:

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_{\lambda}} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_l}{\partial p_{\lambda}} \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda = 1, 2, \dots, r \end{matrix} \right).$$

Betrachten wir jetzt die Determinante:

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial p_1}, & \dots, & \frac{\partial y_n}{\partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial p_r}, & \frac{\partial y_2}{\partial p_r}, & \dots, & \frac{\partial y_n}{\partial p_r} \\ \eta_{11}, & \eta_{12}, & \dots, & \eta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{n-r, 1}, & \eta_{n-r, 2}, & \dots, & \eta_{n-r, n} \end{vmatrix}.$$

und führen noch die Bezeichnung:

$$F = \frac{d(y_1, y_2, \dots, y_n)}{d(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

ein. Auf Grund früherer Formeln können wir durch entsprechende Multiplikationen folgende Formel erhalten:

$$\nabla = F\Omega\Delta. \quad ^1) \quad (12)$$

Wir wollen uns jetzt mit einer anderen Frage befassen. Setzen wir voraus, daß die Determinanten Δ und ∇ einander derart proportionell sind, daß der Proportionalitätsfaktor eine Funktion der Veränderlichen x_i oder y_i ist und stellen uns die Frage, wie alsdann die Scharen der infinitesimalen Transformationen Xf und Yf miteinander verbunden sind. Offenbar läßt sich der Proportionalitätsfaktor auf die Form $F\Omega$ bringen.

Unsere Voraussetzung besteht also darin, daß wir durch Einführung in die Determinante ∇ der Veränderlichen x_i an Stelle der Veränderlichen y_i auf Grund der Transformation (11) die Gleichheit (12) erhalten, in welcher unabhängig davon, welche Funktionen der Parameter p_κ die Veränderlichen y_i sind, Ω eine bestimmte, von Null verschiedene Funktion der Veränderlichen x_i oder y_i ist. Man betrachte die Größen $\eta_{\kappa i}$ als Unbekannte und führe die Größen $c_{\kappa l}$ ein, welche durch die Gleichungen:

$$\eta_{\kappa i} = \sum_{l=1}^n c_{\kappa l} \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

bestimmt sind. Aus der Gleichheit (12) ergibt sich die Gleichheit:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_r}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_r}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_r} \\ c_{11}, & c_{12}, & \dots, & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-r,1}, & c_{n-r,2}, & \dots, & c_{n-r,n} \end{vmatrix} = \Omega \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_1}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_1}{\partial p_r}, & \frac{\partial x_2}{\partial p_r}, & \dots, & \frac{\partial x_n}{\partial p_r} \\ \xi_{11}, & \xi_{12}, & \dots, & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-r,1}, & \xi_{n-r,2}, & \dots, & \xi_{n-r,n} \end{vmatrix},$$

welche bei jeder Wahl der Funktionen x_i der Parameter p_κ stattfindet. Daraus schließen wir, daß alle Determinanten $(n-r+1)^{\text{ten}}$ Grades der Matrix:

¹⁾ Diese Formel wird von Herrn Th. de Donder in seiner oben genannten Abhandlung vom Jahre 1909 auf S. 15 u. 16 unter der Beschränkung, daß $X_\kappa f = 0$ ein vollständiges System bilden, abgeleitet. Diese Beschränkung ist mit der Beweisführung des Herrn Th. de Donder verbunden, weil in derselben Multiplikatoren des vollständigen Systems in Anwendung gebracht werden.

$$\begin{vmatrix} c_{\kappa 1}, & c_{\kappa 2}, & \dots, & c_{\kappa n} \\ \xi_{11}, & \xi_{12}, & \dots, & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-r,1}, & \xi_{n-r,2}, & \dots, & \xi_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

gleich Null sind, daß also zwischen den Größen:

$$c_{\kappa l}, \xi_{1l}, \xi_{2l}, \dots, \xi_{n-r,l}$$

eine lineare homogene Relation stattfindet, dessen Faktoren vom Index l unabhängig sind. Wir gelangen auf diese Weise zu den Formeln:

$$c_{\kappa l} = \sum_{\tau=1}^{n-r} w_{\kappa \tau} \xi_{\tau l}, \quad \begin{matrix} (\kappa = 1, 2, \dots, n-r) \\ (l = 1, 2, \dots, n) \end{matrix},$$

in denen die Funktionen $w_{\kappa \tau}$ derartig sind, daß ihre Determinante gleich Ω , also von Null verschieden ist. Wir erhalten somit für $\eta_{\kappa i}$ folgende Werte:

$$\eta_{\kappa i} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\tau=1}^{n-r} w_{\kappa \tau} \xi_{\tau l} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \quad \begin{matrix} (\kappa = 1, 2, \dots, n-r) \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{matrix} \quad (13)$$

und können leicht einsehen, daß die Größen $\eta_{\kappa i}$ so beschaffen sind, daß nicht alle Determinanten $(n-r)$ ten Grades der Matrix (10) gleich Null sind. Die Beziehungen (13) sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß die Scharen infinitesimaler Transformationen Xf und Yf ineinander vermöge der Transformation (11) übergehen und wir gelangen also zu dem Schluß, daß bei unserer Voraussetzung bezüglich der Determinanten Δ und ∇ die Scharen Xf und Yf vermöge der Transformation (11) ineinander übergehen.

In Verbindung mit der Schar der infinitesimalen Transformationen (3) betrachteten wir das System von Pfaffschen Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda i}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, r). \quad (8)$$

Wenn wir das System von Pfaffschen Gleichungen, welches in gleicher Weise der Schar Yf entspricht, durch die Formeln:

$$\sum_{i=1}^n \beta_{\lambda i}(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_i = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, r) \quad (14)$$

angeben, so kommen wir auf den folgenden Satz:

Wenn die Systeme von Pfaffschen Gleichungen (8) und (14) ineinander vermöge der Transformation (11) übergehen, so erhalten wir die Gleichheit:

$$\int \int \dots \int \nabla dp_1 dp_2 \dots dp_r = \int \int \dots \int F \Omega \Delta dp_1 dp_2 \dots dp_r,$$

wo eine von den r -dimensionalen Integrationsmannigfaltigkeiten willkürlich gewählt ist und die andere aus jener durch die Transformation (11) folgt. Wenn umgekehrt bei beliebiger Wahl einer dieser Mannigfaltigkeiten die obige Gleichheit stattfindet, so gehen die Systeme der Pfaffschen Gleichungen vermöge der Transformation (11) ineinander über.

Wir können nun von diesen Betrachtungen zu den in der Nummer 2 gewonnenen Formeln übergehen. Wir wollen voraussetzen, daß die Transformation (11) eine infinitesimale Transformation ist, d. h. die Form:

$$y_i = x_i + u_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \delta t \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

besitzt und daß die Funktionen $\eta_{\kappa i}$ geradeso von den Veränderlichen y_i wie die entsprechenden Funktionen $\xi_{\kappa i}$ von den Veränderlichen x_i abhängen. Dann können wir aus den Formeln (13) die Bedingungen für die Invariabilität der Schar Xf bei der infinitesimalen Transformation Df erhalten. Wenn wir die Funktionen $\omega_{\kappa \tau}$ in der Form:

$$\omega_{\kappa \tau} = \varepsilon_{\kappa \tau} + \omega_{\kappa \tau} \delta t \quad (\kappa, \tau = 1, 2, \dots, n-r)$$

darstellen, wo $\varepsilon_{\kappa \tau}$ gleich 1 oder gleich 0 ist, je nachdem die Indizes κ, τ einander gleich oder voneinander verschieden sind, so gelangen wir zu der Gleichheit:

$$D(\xi_{\kappa i}) = \sum_{l=1}^n \xi_{\kappa l} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \sum_{\tau=1}^{n-r} \omega_{\kappa \tau} \xi_{\tau i},$$

d. h. wir erhalten die Bedingungen (4). Man sieht sofort, daß man im gegenwärtigen Falle:

$$F = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta t = 1 + \Theta \delta t,$$

$$\Omega = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n-r} \omega_{\lambda \lambda} \delta t = 1 + \tilde{\omega} \delta t$$

setzen muß und auf Grund dessen folgt aus der Formel (12) die Formel (6) der vorhergehenden Nummer:

$$D(\Delta) = (\Theta + \tilde{\omega}) \Delta.$$

4. Betrachten wir nun den besonderen Fall $n=3$, $r=2$, d. h. den Fall, in welchem die Systeme (3) und (14) zwei zwiefache Kurvenscharen im dreidimensionalen Raum bestimmen. Man kann die Systeme auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{dx_1}{\xi_{11}} = \frac{dx_2}{\xi_{12}} = \frac{dx_3}{\xi_{13}} \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{\eta_{11}} = \frac{dy_2}{\eta_{12}} = \frac{dy_3}{\eta_{13}}$$

und annehmen:

$$X_1 f = \xi_{11} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{12} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_{13} \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$Y_1 f = \eta_{11} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \eta_{12} \frac{\partial f}{\partial y_2} + \eta_{13} \frac{\partial f}{\partial y_3};$$

es werden mithin die bezüglichen Scharen Xf und Yf einfach

$$Xf = \rho_1 X_1 f, \quad Yf = \sigma_1 Y_1 f$$

sein, wo ρ_1 und σ_1 beliebige Funktionen der Veränderlichen x_i bzw. y_i sind. In diesem Falle gestalten sich die Bedingungen (13) folgendermaßen:

$$\eta_{11} = w_{11} \left(\xi_{11} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \xi_{12} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \xi_{13} \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \right),$$

$$\eta_{12} = w_{11} \left(\xi_{11} \frac{\partial y_2}{\partial y_1} + \xi_{12} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \xi_{13} \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \right),$$

$$\eta_{13} = w_{11} \left(\xi_{11} \frac{\partial y_3}{\partial x_1} + \xi_{12} \frac{\partial y_3}{\partial x_2} + \xi_{13} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \right),$$

und wir gelangen zu der folgenden, diesen Bedingungen äquivalenten Gleichheit der Integrale:

$$\begin{aligned} & \iint (\eta_{11} dy_2 dy_3 + \eta_{12} dy_3 dy_1 + \eta_{13} dy_1 dy_2) \\ &= \iint F w_{11} (\xi_{11} dx_2 dx_3 + \xi_{12} dx_3 dx_1 + \xi_{13} dx_1 dx_2). \end{aligned}$$

Diese Beziehungen sowie auch der besondere Fall derselben, welcher sich auf die Theorie der Wirbellinien bezieht, wurden in meiner oben zitierten Abhandlung „Über die Erhaltung der Wirbelbewegung“ behandelt.

5. In der soeben erwähnten Arbeit behandelten wir auch die Frage, welche doppelte Integrale bei allen infinitesimalen Transformationen invariant bleiben, deren Bahnkurven die Kurven einer

vorgelegten Kurvenschar sind. Indem wir nun ein allgemeineres Problem stellen, suchen wir alle Integrale:

$$\iint \dots \int \bar{S} dp_1 dp_2 \dots dp_r \quad (15)$$

zu bestimmen, welche bei der Schar Xf invariant bleiben. Hier hat $\bar{S}$ die Form:

$$\bar{S} = \sum_{s_r=1}^n \sum_{s_{r-1}=1}^{s_r-1} \dots \sum_{s_1=1}^{s_2-1} \bar{A}_{s_1, s_2, \dots, s_r} \frac{d(x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_r})}{d(p_1, p_2, \dots, p_r)},$$

wo mit $A_{s_1, s_2, \dots, s_r}$ die unbekannten Koeffizienten bezeichnet sind, in bezug auf welche vorausgesetzt wird, daß sie durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier von den Indizes $s_1, s_2, \dots, s_r$ in Größen von gleichem absoluten Werte und entgegengesetztem Vorzeichen übergehen, dagegen durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indizes völlig unverändert bleiben. Wenn wir die Transformation Xf auf die Form:

$$Xf = \sum_{\kappa=1}^{n-r} \rho_{\kappa} X_{\kappa} f = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\kappa=1}^{n-r} \rho_{\kappa} \xi_{\kappa i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

bringen und mit dem Symbol $\bar{W}_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)} f$ eine Transformation bezeichnen, welche aus $W_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)} f$ derart entsteht, daß wir die Koeffizienten A durch die Koeffizienten $\bar{A}$ ersetzen, so gestalten sich die Bedingungen der Invariabilität des Integrals (15) in folgender Weise:

$$\sum_{\kappa=1}^{n-r} \rho_{\kappa} X_{\kappa} (\bar{A}_{s_1, s_2, \dots, s_r}) + \sum_{i=1}^n \bar{W}_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)} \left(\sum_{\kappa=1}^{n-r} \rho_{\kappa} \xi_{\kappa i} \right) = 0.$$

Diese Gleichungen müssen bei allen möglichen Indizes $s_1, s_2, \dots, s_r$ bestehen. In etwas anderer Form können wir diese Bedingungen schreiben:

$$\sum_{\kappa=1}^{n-r} \left[\left\{ X_{\kappa} (\bar{A}_{s_1, s_2, \dots, s_r}) + \sum_{i=1}^n \bar{W}_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)} (\xi_{\kappa i}) \right\} \rho_{\kappa} + \sum_{i=1}^n \xi_{\kappa i} \bar{W}_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)} (\rho_{\kappa}) \right] = 0.$$

Sie müssen bei beliebigen Funktionen ρ_{κ} erfüllt sein, d. h. es müssen sowohl die Koeffizienten bei den ρ_{κ} , wie auch bei deren Differentialquotienten gleich Null sein.

eingeführen, so können wir auf Grund der Rechnung, die uns in der Nummer 2 zu der Formel (5) geführt hat, die folgende Formel angeben:

$$X_{\kappa}(A_{s_1, s_2, \dots, s_r}) = (\Theta_{\kappa} + \bar{\Pi}_{\kappa}) A_{s_1, s_2, \dots, s_r} - \sum_{i=1}^n W_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)}(\xi_{\kappa i}).$$

Die Bedingungen des invarianten Verhaltens des Integrals (15) kann man auf Grund der Lösungen (16) in folgender Form darstellen:

$$A_{s_1, s_2, \dots, s_r} X_{\kappa}(\lambda) + \lambda \left[X_{\kappa}(A_{s_1, s_2, \dots, s_r}) + \sum_{i=1}^n W_{s_1, s_2, \dots, s_r}^{(i)}(\xi_{\kappa i}) \right] = 0$$

und unter der Benützung der soeben angegebenen Formel erhalten wir für λ das System von Differentialgleichungen:

$$X_{\kappa}(\lambda) + (\Theta_{\kappa} + \bar{\Pi}_{\kappa})\lambda = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-r), \quad {}^1) \quad (19)$$

welches ein System von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür bildet, daß das betrachtete Integral bei der Schar Xf invariant bleibe.

Wenn wir in dem Integral:

$$\iint \dots \int \lambda \Delta dp_1 dp_2 \dots dp_r$$

die Größen $\xi_{\kappa i}$ durch die Größen:

$$\xi'_{li} = \sum_{\kappa=1}^{n-r} a_{l\kappa} \xi_{\kappa i} \quad (l = 1, 2, \dots, n-r; i = 1, 2, \dots, n)$$

ersetzen, wo die Determinante U der Koeffizienten $a_{l\kappa}$ von Null verschieden ist, so erhalten wir das Integral:

$$\iint \dots \int \lambda' \Delta' dp_1 dp_2 \dots dp_r,$$

wo die Determinante Δ' ebenso von den Größen $\xi'_{\kappa i}$ abhängt, wie die Determinante Δ von den Größen $\xi_{\kappa i}$ und der Faktor λ' die Form:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{U} \quad (20)$$

besitzt. Weil sich aber das Integral dabei nicht verändert hat, so müssen die Bedingungen des invarianten Verhaltens des letzteren

¹⁾ Diese Gleichungen nimmt Herr Th. de Donder als Definitionsgleichungen eines Multiplikators des vollständigen Systems an. Bulletin de l'Académie de Belgique 1908, „Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé“, S. 6. Siehe auch Atti del IV. Congresso dei Matematici 1909. Vol. II, Sezione I, S. 133. Dieselben Gleichungen werden auch von Herrn T. Chella für die Multiplikatoren des vollständigen Systems auf S. 14—17 seiner oben zitierten Abhandlung (1910) abgeleitet.

Integrals Folgen der Bedingungen (19) sein. Wenn wir die Bezeichnung:

$$X'_l f = \sum_{i=1}^n \xi'_{li} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (l = 1, 2, \dots, n-r)$$

benützen, d. h. wenn wir setzen:

$$X'_l f = \sum_{\kappa=1}^{n-r} a_{l\kappa} X_{\kappa} f \quad (l = 1, 2, \dots, n-r) \quad (21)$$

und annehmen:

$$(X'_{\mu}, X'_{\nu}) = \sum_{\sigma=1}^{n-r} \Pi'_{\mu\nu\sigma} X'_{\sigma} f, \quad (22)$$

so können wir unter Benützung der Bezeichnungen:

$$\Theta'_l = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi'_{li}}{\partial x_i}, \quad \bar{\Pi}'_l = \sum_{\nu=1}^{n-r} \Pi'_{l\nu\nu}$$

diese Bedingungen in folgender Form darstellen:

$$X'_l (\lambda') + (\Theta'_l + \bar{\Pi}'_l) \lambda' = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n-r). \quad (23)$$

Daß diese Bedingungen durch Umformung der Bedingungen (19) sich ergeben, kann auch leicht unmittelbar verifiziert werden. Wir haben die Formeln:

$$(X'_{\mu}, X'_{\nu}) = \sum_{\kappa=1}^{n-r} [X'_{\mu}(a_{\nu\kappa}) - X'_{\nu}(a_{\mu\kappa})] X_{\kappa} f + \sum_{\kappa=1}^{n-r} \sum_{l=1}^{n-r} a_{\mu\kappa} a_{\nu l} (X_{\kappa}, X_l)$$

und vermöge der Gleichheiten (18) und (22) ergeben sich daraus die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^{n-r} \Pi'_{\mu\nu\sigma} X'_{\sigma} f &= \sum_{\kappa=1}^{n-r} [X'_{\mu}(a_{\nu\kappa}) - X'_{\nu}(a_{\mu\kappa})] X_{\kappa} f \\ &+ \sum_{\kappa=1}^{n-r} \sum_{l=1}^{n-r} a_{\mu\kappa} a_{\nu l} \sum_{\tau=1}^{n-r} \Pi_{\kappa l \tau} X_{\tau} f. \end{aligned} \quad (24)$$

Wenn wir die Gleichungen (21) in bezug auf $X_{\kappa} f$ auflösen, erhalten wir:

$$U X_{\kappa} f = \sum_{l=1}^{n-r} b_{l\kappa} X'_l f,$$

wo $b_{l\kappa}$ das algebraische Komplement des Elements $a_{l\kappa}$ der Determinante U bezeichnet. Setzt man diese Werte in (24) ein, so kommt man auf die Formeln:

$$U \Pi'_{\mu\nu\sigma} = \sum_{\kappa=1}^{n-r} [X'_\mu(a_{\nu\kappa}) - X'_\nu(a_{\mu\kappa})] b_{\sigma\kappa} \\ + \sum_{\kappa=1}^{n-r} \sum_{l=1}^{n-r} a_{\mu\kappa} a_{\nu l} \sum_{\tau=1}^{n-r} \Pi_{\kappa l \tau} b_{\sigma \tau},$$

aus welchen die Beziehung:

$$U \sum_{\nu=1}^{n-r} \Pi'_{\mu\nu\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-r} \sum_{\kappa=1}^{n-r} [X'_\mu(a_{\nu\kappa}) - \sum_{l=1}^{n-r} a_{\nu l} X_l(a_{\mu\kappa})] b_{\nu\kappa} \\ + \sum_{\nu=1}^{n-r} \sum_{\kappa=1}^{n-r} \sum_{l=1}^{n-r} a_{\mu\kappa} a_{\nu l} \sum_{\tau=1}^{n-r} \Pi_{\kappa l \tau} b_{\nu \tau}$$

folgt und wenn wir die Relationen berücksichtigen, welche die Elemente der Determinante U und deren algebraische Komplemente miteinander verbinden, so ergibt sich:

$$U \sum_{\nu=1}^{n-r} \Pi'_{\mu\nu\nu} = \sum_{\kappa=1}^{n-r} \sum_{l=1}^{n-r} b_{\kappa l} X'_\mu(a_{\nu l}) - U \sum_{\kappa=1}^{n-r} X_\kappa(a_{\mu\kappa}) \\ + U \sum_{\kappa=1}^{n-r} a_{\mu\kappa} \sum_{\tau=1}^{n-r} \Pi_{\kappa \tau \tau},$$

bemerkt man aber, daß die erste Doppelsumme gleich $X'_\mu(U)$ ist, so erhält man:

$$U \bar{\Pi}'_\mu = U \sum_{\kappa=1}^{n-r} a_{\mu\kappa} \bar{\Pi}_\kappa + X'_\mu(U) - U \sum_{\kappa=1}^{n-r} X_\kappa(a_{\mu\kappa}).$$

Anderseits ist es klar, daß:

$$\Theta'_\mu = \sum_{\kappa=1}^{n-r} a_{\mu\kappa} \Theta_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{n-r} X_\kappa(a_{\mu\kappa}).$$

Aus diesen Gleichheiten, wenn wir den Index μ durch l ersetzen, erhalten wir die Beziehung:

$$X'_l\left(\frac{1}{U}\right) + \frac{1}{U} (\Theta_l + \bar{\Pi}_l) = \frac{1}{U} \sum_{\kappa=1}^{n-r} a_{l\kappa} (\Theta_\kappa + \bar{\Pi}_\kappa). \quad (25)$$

Auf Grund der Beziehung (20) zwischen λ und λ' ergeben sich also die Relationen:

$$U[X'_l(\lambda') + (\Theta'_l + \bar{\Pi}'_l)\lambda'] = \sum_{\kappa=1}^{n-r} a_{l\kappa} [X_\kappa(\lambda) + (\Theta_\kappa + \bar{\Pi}_\kappa)\lambda],$$

wodurch wirklich verifiziert wird, daß die Bedingungen (23) Folgen der Bedingungen (19) und umgekehrt sind.¹⁾

Die Bedingungen (19) bestimmen den Faktor λ und man kann sie durch das Gleichungssystem:

$$Y_\kappa f = X_\kappa f - (\Theta_\kappa + \bar{\Pi}_\kappa)\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-r) \quad (26)$$

ersetzen und ebenso lassen sich auch die Bedingungen (23) durch das System:

$$Y'_l f = X'_l f - (\Theta'_l + \bar{\Pi}'_l)\lambda' \frac{\partial f}{\partial \lambda'} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n-r) \quad (27)$$

ersetzen. Wenn wir nun beachten, daß vermöge der Relation (25)

$$Y'_l \lambda = \lambda' X'_l U - U \lambda' (\Theta'_l + \bar{\Pi}'_l) = -\lambda \sum_{\kappa=1}^{n-r} a_{l\kappa} (\Theta_\kappa + \bar{\Pi}_\kappa)$$

ist, so erhalten wir:

$$Y'_l f = \sum_{\kappa=1}^{n-r} a_{l\kappa} Y_\kappa f.$$

Daraus ergibt sich, daß, wenn eines von den Systemen (26) und (27) ein $(n-r)$ -gliedriges vollständiges System ist, dies auch für das andere System der Fall ist. Auf Grund dessen ist es leicht zu beweisen, daß das System (26) wirklich ein $(n-r)$ -gliedriges vollständiges System ist. Bekanntlich kann man die Koeffizienten $a_{l\kappa}$ immer so wählen, daß das vollständige System:

$$X'_l f = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n-r)$$

¹⁾ Hiemit ist auf zwei Weisen bewiesen worden, daß, wenn man das vollständige System (17) durch ein äquivalentes System vermöge der Formeln (21) ersetzt und dabei statt λ die Größe $\lambda' = \frac{\lambda}{U}$ nimmt, die Differentialgleichungen (19), denen λ genügt, gehen in solche Differentialgleichungen (23) für λ' über, welche für das äquivalente System nach demselben Gesetze gebildet werden, wie die Differentialgleichungen (19) für das ursprüngliche vollständige System gebildet waren. Dies ist aber das Theorem, welches Herr Th. de Donder an die Spitze seiner Abhandlung „Sur le multiplicateur généralisé“, Bulletin de l'Académie de Belgique 1910, stellt. Siehe insbesondere S. 4–6 dieser Abhandlung des Herrn Th. de Donder. Dieses Theorem wird auch in der oben erwähnten Note des Herrn Th. de Donder vom Jahre 1911 auf S. 5 dieser Note in Anwendung gebracht.

ein Jacobisches System sein wird, d. h. daß für dasselbe alle Koeffizienten $\Pi'_{\mu\nu\sigma}$ gleich Null sind. Dann hat das System (27) die einfachere Form:

$$Y'_l f = X'_l f - \Theta'_l \lambda' \frac{\partial f}{\partial \lambda'} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n-r) \quad (28)$$

und man kann leicht beweisen, daß auch dieses System ein Jacobi-sches System ist. Wir haben die Identitäten:

$$X'_\mu(\xi'_{\nu i}) - X'_\nu(\xi'_{\mu i}) = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n-r)$$

und wenn man ferner die Poissonschen Symbole des Systems (28) berechnet, so erhalten wir:

$$(Y'_\mu, Y'_\nu) = [X'_\nu(\Theta'_\mu) - X'_\mu(\Theta'_\nu)] \lambda' \frac{\partial f}{\partial \lambda'}.$$

Beachten wir nun, daß:

$$\frac{\partial X'_\nu(\xi'_{\mu s})}{\partial x_s} = X'_\nu \left(\frac{\partial \xi'_{\mu s}}{\partial x_s} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi'_{\nu i}}{\partial x_s} \frac{\partial \xi'_{\mu s}}{\partial x_i},$$

so ergibt sich daraus durch Summierung in bezug auf s :

$$X'_\nu(\Theta'_\mu) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X'_\nu(\xi'_{\mu i})}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi'_{\nu i}}{\partial x_s} \frac{\partial \xi'_{\mu s}}{\partial x_i}$$

und wir erhalten durch Vertauschung der Indizes μ und ν :

$$X'_\mu(\Theta'_\nu) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X'_\mu(\xi'_{\nu i})}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi'_{\mu i}}{\partial x_s} \frac{\partial \xi'_{\nu s}}{\partial x_i}.$$

Man erhält mithin:

$$X'_\nu(\Theta'_\mu) - X'_\mu(\Theta'_\nu) = 0,$$

d. h. das System (27) ist ein Jacobisches System. Infolgedessen ist das System (26) ein $(n-r)$ -gliedriges vollständiges System und hat deshalb $r+1$ unabhängige Lösungen, von denen eine notwendig die Größe λ enthält.¹⁾

Dies ist ein Beweis, daß die von uns betrachteten infinitesimalen Transformationen immer invariante Integrale von der Form:

$$\iint \dots \int \lambda \Delta dp_1 dp_2 \dots dp_r$$

¹⁾ Dies ist der Satz, welcher von Herrn Th. de Donder auf S. 6—12 der Abhandlung: „Sur le multiplicateur de Jacobi généralisé“ vom Jahre 1908 aufs neue bewiesen wird.

besitzen. Die allgemeinste r -fache Integralinvariante hat die Form:

$$\iint \dots \int \bar{\lambda} \Phi(J_1, J_2, \dots, J_r) \Delta dp_1 dp_2 \dots dp_r,$$

wo $\bar{\lambda}$ eine beliebige Lösung des Systems (19), Φ eine willkürliche Funktion und $J_1, J_2, \dots, J_r$ die r voneinander unabhängige Integrale des unbeschränkt integrierbaren Systems von Pfaffschen Gleichungen bezeichnen.

Bemerkung. In dieser Abhandlung haben wir vorausgesetzt, daß

$$Df = \sum_{i=1}^n u_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

d. h. indem wir diese infinitesimale Transformation als Bewegung einer Flüssigkeit im n -fachen Raume interpretieren, haben wir vorausgesetzt, daß diese Bewegung stationär ist. Es erhellt aber, daß unsere Ausführungen auch auf den Fall:

$$Df = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

bezogen werden können, wo mit t die Zeit bezeichnet ist, d. h. auf den Fall der nichtstationären Bewegung, wobei auch die Koeffizienten der unter den Integralzeichen stehenden Funktionen und die Koeffizienten der Systeme Pfaffscher Gleichungen von t abhängig sein können.