**7. Über nahezu gesättigten Strom in einem von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Luftraume;
von Eduard Riecke.**

(Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. Heft 4. 1903.)

In einem Aufsätze „Über die Zerstreuung der Elektrizität in abgeschlossenen Räumen“¹⁾ habe ich den Fall einer nahezu gesättigten Strömung in dem Hohlraume zwischen zwei konzentrischen Kugeln behandelt. Die positive elektrostatische Ladung der inneren Kugel wurde mit e bezeichnet; die elektrische Feldstärke sei $\mathfrak{E}$, die räumliche Dichte der positiven Ionen $\bar{N}^+$, die der negativen $\bar{N}^-$, die Dichte der elektrischen Strömung c . Unter U und V sind die absoluten Beweglichkeiten der Ionen, unter k^+ und k^- ihre Diffusionskoeffizienten verstanden; r bezeichnet den Abstand irgend eines Punktes von dem Mittelpunkte der Kugeln, r_i den Halbmesser der inneren, r_a den der äußeren Kugel. ϵ ist das elektrische Elementarquantum, v die Lichtgeschwindigkeit, q die Ionisierungsstärke, α der Koeffizient der Wiedervereinigung.

Die Gleichungen, auf welche das Problem führt, sind folgende:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{N}^+ - \bar{N}^- = \frac{\text{div } \mathfrak{E}}{4 \pi \epsilon}, \\ \epsilon v (U \bar{N}^+ + V \bar{N}^-) \mathfrak{E} = c + \epsilon \frac{d}{dr} (k^+ \bar{N}^+ - k^- \bar{N}^-), \\ v U \text{div} (\bar{N}^+ \mathfrak{E}) = q - \alpha \bar{N}^+ \bar{N}^- + k^+ \Delta \bar{N}^+, \\ - v V \text{div} (\bar{N}^- \mathfrak{E}) = q - \alpha \bar{N}^+ \bar{N}^- + k^- \Delta \bar{N}^-. \end{array} \right.$$

1) E. Riecke, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. Heft 1. 1903.

Vernachlässigt man den Einfluß der Wiedervereinigung und den Einfluß der Diffusion, so erhält man Sättigungsstrom und es wird:

$$\bar{N}_0^+ = \frac{q}{3\nu U} \cdot \frac{r}{\mathfrak{E}_0} \left(1 - \frac{r_i^3}{r^3}\right), \quad \bar{N}_0^- = \frac{q}{3\nu V} \cdot \frac{r}{\mathfrak{E}_0} \left(\frac{r_a^3}{r^3} - 1\right).$$

Diese Werte werden in den Gleichungen (I) für $\bar{N}^+$ und $\bar{N}^-$ in den Gliedern benutzt, die mit α oder mit den Diffusionskoeffizienten multipliziert sind. Dann ergeben sich die Gleichungen:

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{4\pi\epsilon q}{9} \frac{U+V}{\nu UV} r^2 + \frac{\Phi_1}{r} + \frac{\Phi_4}{r^4},$$

$$\Phi_1 = -\frac{8}{3}\pi\epsilon\alpha \frac{U+V}{\nu UV} \int r^2 \bar{N}_0^+ \bar{N}_0^- dr + \frac{8\pi\epsilon}{3\nu} \frac{k^+ + k^-}{U+V} \int r^2 \Delta(\bar{N}_0^+ + \bar{N}_0^-) dr$$

$$\Phi_4 = -\frac{8}{3}\pi\epsilon\alpha \frac{U+V}{\nu UV} \int r^5 \bar{N}_0^+ \bar{N}_0^- dr - \frac{8\pi\epsilon}{3\nu} \frac{k^+ + k^-}{U+V} \int r^5 \Delta(\bar{N}_0^+ + \bar{N}_0^-) dr$$

$$\begin{aligned} \bar{N}^+ \mathfrak{E} &= \frac{c}{\epsilon\nu(U+V)} + \frac{q}{3\nu U} r + \frac{1}{\nu(U+V)} \frac{d}{dr} (k^+ \bar{N}_0^+ - k^- \bar{N}_0^-) \\ &\quad + \frac{3}{8\pi\epsilon} \frac{V}{U+V} \frac{\Phi_1}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{N}^- \mathfrak{E} &= \frac{c}{\epsilon\nu(U+V)} - \frac{q}{3\nu V} r + \frac{1}{\nu(U+V)} \frac{d}{dr} (k^+ \bar{N}_0^+ - k^- \bar{N}_0^-) \\ &\quad - \frac{3}{8\pi\epsilon} \frac{U}{U+V} \frac{\Phi_1}{r^2}. \end{aligned}$$

Die in Φ_1 und Φ_4 auftretenden Integrationskonstanten müssen durch die *Grenzbedingungen* bestimmt werden.

Eine davon besteht jedenfalls darin, daß an der Oberfläche der inneren Kugel

$$(II) \quad \mathfrak{E}_i = \frac{e}{r_i^2}$$

sein muß.

Als *zweite Grenzbedingung* habe ich in dem früheren Aufsatze die Annahme benutzt, daß an der Oberfläche der inneren Kugel die Dichte der positiven Ionen gleich Null sei, ebenso wie im Falle des Sättigungsstromes. Diese Annahme trifft aber nur *näherungsweise* zu, und es erscheint daher richtig, sie *nicht* zu benutzen.

Wenn die Dichte der positiven Ionen an der Oberfläche der inneren Kugel nicht verschwindet, so tritt allerdings die Möglichkeit der Ionenadsorption ein. Von einer Berücksichtigung dieser Wirkung sehen wir aber bei der ganzen Untersuchung ab.

Eine *einwandsfreie zweite Grenzbedingung* ergibt sich, wenn wir berücksichtigen, daß nach den von uns gemachten Annahmen die ganze Elektrizitätsabgabe an die innere Kugel durch die negativen Ionen besorgt wird. Es folgt daraus für die Oberfläche der inneren Kugel die zweite Bedingung:

$$(III) \quad \varepsilon \nu \nabla (\bar{N}\mathfrak{E})_i = c_i - \varepsilon \bar{k} \left(\frac{d \bar{N}_0}{d r} \right)_i.$$

Aus den Bedingungsgleichungen (II) und (III) folgt:

$$\Phi_i = -\frac{8\pi r_i^2 c_i}{3\nu V} - \frac{8\pi \varepsilon q(U+V)}{9\nu UV} r_i^3 + \frac{8\pi \varepsilon}{3\nu} r_i^2 \frac{k^+ + \bar{k}}{U+V} \left[\frac{d}{dr} (\bar{N}_0^+ + \bar{N}_0^-) \right]_i,$$

$$\Phi_i = e^4 + \frac{8\pi r_i^2 c_i}{3\nu V} + \frac{4\pi \varepsilon q(U+V)}{9\nu UV} r_i^3 - \frac{8\pi \varepsilon}{3\nu} r_i^5 \frac{k^+ + \bar{k}}{U+V} \left[\frac{d}{dr} (\bar{N}_0^+ + \bar{N}_0^-) \right]_i;$$

die Werte weichen von den in dem früheren Aufsätze angegebenen in den von $\bar{N}_0^+$ abhängenden Teilen der Diffusionsglieder ab.

Die Funktionen Φ_1 und Φ_4 selber werden, ebenso wie früher:

$$\Phi_1 = \Phi_i - \frac{8}{3} \pi \varepsilon \alpha \frac{U+V}{\nu UV} \int_{r_i}^r r^2 \bar{N}_0^+ \bar{N}_0^- dr + \frac{8\pi \varepsilon}{3\nu} \frac{k^+ + \bar{k}}{U+V} \int_{r_i}^r r^2 \Delta(\bar{N}_0^+ + \bar{N}_0^-) dr,$$

$$\Phi_4 = \Phi_i + \frac{8}{3} \pi \varepsilon \alpha \frac{U+V}{\nu UV} \int_{r_i}^r r^5 \bar{N}_0^+ \bar{N}_0^- dr - \frac{8\pi \varepsilon}{3\nu} \frac{k^+ + \bar{k}}{U+V} \int_{r_i}^r r^5 \Delta(\bar{N}_0^+ + \bar{N}_0^-) dr.$$

Benutzen wir diese Werte zur Berechnung von $\bar{N}\mathfrak{E}$ und von $\bar{N}\mathfrak{E}$, so ergibt sich:

$$\bar{N}\mathfrak{E} = \frac{q}{3\nu U} r \left(1 - \frac{r_i^3}{r^3} \right) - \frac{\alpha}{\nu U} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r r^2 \bar{N}_0^+ \bar{N}_0^- dr + \frac{k^+}{\nu U} \frac{d \bar{N}_0^+}{dr},$$

$$\bar{N}\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon \nu V} \frac{r_i^2 c_i}{r^2} - \frac{q}{3\nu V} r \left(1 - \frac{r_i^3}{r^3} \right) + \frac{\alpha}{\nu V} \int_{r_i}^r r^2 \bar{N}_0^+ \bar{N}_0^- dr - \frac{\bar{k}}{\nu V} \frac{d \bar{N}_0^-}{dr}.$$

Wir wenden uns nun zu der *Verwertung der Gleichungen*:

$$\nu U \operatorname{div}(\vec{N} \mathfrak{E}) = q - \alpha \vec{N} \bar{N} + \vec{k} \Delta \vec{N}$$

und

$$- \nu \nabla \operatorname{div}(\bar{N} \mathfrak{E}) = q - \alpha \vec{N} \bar{N} + \bar{k} \Delta \bar{N}.$$

Die erste ergibt, über das Volumen Ω des Hohlraumes integriert:

$$\nu U \int_i^a \operatorname{div}(\vec{N} \mathfrak{E}) dv = q \Omega - \alpha \int_i^a \vec{N}_0 \bar{N}_0 dv + \vec{k} \int_i^a \Delta \vec{N} dv,$$

oder

$$\begin{aligned} - 4 \pi r_i^2 \nu U \vec{N}_i \mathfrak{E}_i + 4 \pi r_a^2 \nu U \vec{N}_a \mathfrak{E}_a &= q \Omega - \alpha \int_i^a \vec{N}_0 \bar{N}_0 dv \\ &- 4 \pi r_i^2 \vec{k} \left(\frac{d \vec{N}_0}{d r} \right)_i + 4 \pi r_a^2 \vec{k} \left(\frac{d \vec{N}_0}{d r} \right)_a. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\nu U (\vec{N} \mathfrak{E})_i = \vec{k} \left(\frac{d \vec{N}}{d r} \right)_i,$$

somit:

$$4 \pi r_a^2 \left\{ \nu U \vec{N}_a \mathfrak{E}_a - \vec{k} \left(\frac{d \vec{N}_0}{d r} \right)_a \right\} = \varepsilon q \Omega - \varepsilon \alpha \int_i^a \vec{N}_0 \bar{N}_0 dv.$$

Der auf der linken Seite stehende Ausdruck stellt den ganzen Betrag der elektrischen Strömung durch die äußere Kugelfläche dar; bezeichnen wir diese durch $\mathfrak{E}$, so ergibt sich:

$$(IV) \quad \mathfrak{E} = \varepsilon q \Omega - \varepsilon \alpha \int_i^a \vec{N}_0 \bar{N}_0 dv.$$

Die Gleichung enthält *keine von der Diffusion abhängende Glieder*.

Die Integration der Gleichung

$$- \nu \nabla \operatorname{div}(\bar{N} \mathfrak{E}) = q - \alpha \vec{N} \bar{N} + \bar{k} \Delta \bar{N}$$

gibt:

$$\begin{aligned} 4 \pi r_a^2 \varepsilon \nu \nabla \bar{N}_a \mathfrak{E}_a &= 4 \pi r_i^2 \varepsilon \bar{c}_i - \varepsilon q \Omega + \varepsilon \alpha \int_i^a \vec{N}_0 \bar{N}_0 dv \\ &- 4 \pi r_a^2 \varepsilon \bar{k} \left(\frac{d \bar{N}}{d r} \right)_a. \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$4 \pi r_i^2 \zeta_i = \varepsilon q \Omega - \varepsilon \alpha \int_i^a \dot{N}_0^+ \bar{N}_0 d v,$$

somit:

$$\nu U \bar{N}_a \mathfrak{E}_a = - \bar{k} \left(\frac{d \bar{N}}{d r} \right)_a.$$

Mit Hilfe von Gleichung (IV) läßt sich auch der für $\bar{N} \mathfrak{E}$ gefundene Ausdruck auf eine einfachere Form bringen. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} \bar{N} \mathfrak{E} = & \frac{1}{\varepsilon \nu V} \frac{r_i^2 \zeta_i}{r^2} - \frac{q}{3 \nu V} r \left(1 - \frac{r_i^3}{r^3} \right) + \frac{\alpha}{\nu V} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^{r_a} r^2 \dot{N}_0^+ \bar{N}_0 d r \\ & - \frac{\alpha}{\nu V} \frac{1}{r^2} \int_r^{r_a} r^2 \dot{N}_0^+ \bar{N}_0 d r - \frac{\bar{k}}{\nu V} \frac{d \bar{N}_0}{d r}. \end{aligned}$$

Gleichung (IV) gibt:

$$\frac{\alpha}{\nu V} \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^{r_a} r^2 \dot{N}_0^+ \bar{N}_0 d r = - \frac{1}{\varepsilon \nu V} \frac{r_i^2 \zeta_i}{r^2} + \frac{q}{3 \nu V} r \left(\frac{r_a^3}{r^3} - \frac{r_i^3}{r^3} \right).$$

Aus der Addition beider Gleichungen folgt:

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} \bar{N} \mathfrak{E} = \frac{q}{3 \nu V} r \left(\frac{r_a^3}{r^3} - 1 \right) - \frac{\alpha}{\nu V} \frac{1}{r^2} \int_r^{r_a} r^2 \dot{N}_0^+ \bar{N}_0 d r - \frac{\bar{k}}{\nu V} \frac{d \bar{N}_0}{d r}, \\ \text{ganz analog mit:} \\ \dot{N} \mathfrak{E} = \frac{q}{3 \nu U} r \left(1 - \frac{r_i^3}{r^3} \right) - \frac{\alpha}{\nu U} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r r^2 \dot{N}_0^+ \bar{N}_0 d r + \frac{\bar{k}}{\nu U} \frac{d \dot{N}_0}{d r}. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen sind etwas einfacher, als die mit Hilfe der früheren, nur näherungsweise geltenden Grenzbedingung erhaltenen.

Für $r = r_i$ wird:

$$(\dot{N} \mathfrak{E})_i = \frac{\bar{k}}{\nu U} \left(\frac{d \dot{N}_0}{d r} \right)_i.$$

Daß dieser Wert klein ist, ergibt sich einmal aus der Kleinheit des Faktors $\frac{k^+}{\nu U}$; überdies zeigt der Verlauf der für N_0^+ in dem früheren Aufsätze mitgeteilten Kurven, daß auch (dN_0^+/dr) für $r = r_i$ nur einen kleinen Wert hat. Es ergibt sich also in der Tat, daß man die bei der früheren Rechnung benutzte Grenzbedingung nahezu, aber nicht streng, als erfüllt betrachten kann. Eine etwas größere Abweichung von dem Werte Null tritt an der äußeren Kugelfläche ein:

$$(\bar{N} \mathcal{E})_a = - \frac{\bar{k}}{\nu V} \left(\frac{d \bar{N}_0}{d r} \right)_a.$$

Was die numerischen Werte anbelangt, die in der früheren Arbeit berechnet worden sind, so werden sie durch die Anwendung der verbesserten Formeln nur unwesentlich verändert. Es erklärt sich dies dadurch, daß die Abweichungen in Gliedern liegen, die von der Diffusion abhängen; in dem früher behandelten Falle tritt aber der Einfluß der Diffusion gegen den der Wiedervereinigung zurück. In der Figur, welche der früheren Mitteilung beigegeben ist, würden die ausgezogenen Kurven den verbesserten Formeln entsprechend parallel mit sich selber ein wenig nach oben zu verschieben sein.

(Eingegangen 20. Juli 1903.)*