ÜBER DIE ENTWICKLUNG ALGEBRAISCHER FUNCTIONEN.

Von **Leo Koenigsberger** (Heidelberg).

Adunanza del 23 giugno 1907.

Sei eine algebraische Gleichung von der Form gegeben

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f(t, y) &= (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_\mu t^\mu) y^m + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_\mu t^\mu) y^{m-1} + \dots \\ &\quad + (l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \dots + l_\mu t^\mu) y + (n_0 + n_1 t + n_2 t^2 + \dots + n_\mu t^\mu) = 0, \end{aligned} \right.$$

in welcher die Coefficienten ganze Functionen von t sind, deren Grad wir als gleich voraussetzen dürfen ¹⁾, so wird dieselbe, wenn $n_0 = 0$ und l_0 von Null verschieden ist, für $t = 0$ die einfache Lösung $y = 0$ besitzen, und sich somit y in der Umgebung von $t = 0$ in eine convergente Potenzreihe von der Form

$$(2) \quad y = \frac{y_0}{1!} t + \frac{y_0'}{2!} t^2 + \frac{y_0''}{3!} t^3 + \dots$$

entwickeln lassen; die Coefficienten derselben ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y} y' + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3 + 3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' \right) y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y''' = 0,$$

.....

oder für $t = 0$ aus

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} n_1 &= -l_0 \frac{y_0'}{1!}, \\ n_2 + l_1 y_0' + k_0 y_0'^2 &= -l_0 \frac{y_0''}{2!}, \\ n_3 + l_2 y_0' + k_1 y_0'^2 + h_0 y_0'^3 + (l_1 + 2k_0 y_0') \frac{y_0''}{2!} &= -l_0 \frac{y_0'''}{3!}, \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

¹⁾ Wobei der Fall nicht ausgeschlossen ist, dass diese Coefficienten sämtlich oder zum Theil im Einheitskreise convergirende Potenzreihen sind.

wie ich bei Gelegenheit der Verallgemeinerung eines EISENSTEIN'schen Satzes gezeigt habe ²⁾, in der Gestalt

$$(4) \quad \frac{y_o^{(\rho)}}{\rho!} = \frac{G_\rho}{l_o^{2\rho-1}},$$

worin die G_ρ ganze und ganzzahlige Functionen der Grössen $a_o, \dots b_o, \dots l_o, \dots n_1, \dots$ sind.

Ist nun M der grösste der Moduln dieser Zahlen, und bildet man der Gleichung (I) analog die Gleichung

$$(5) \quad \begin{cases} F(t, \chi) = (M + Mt + \dots + Mt^\mu) \chi''' + (M + Mt + \dots + Mt^\mu) \chi''' + \dots \\ \quad + (\lambda_o + Mt + \dots + Mt^\mu) \chi + (Mt + Mt^2 + \dots + Mt^\mu) = 0, \end{cases}$$

worin λ_o reell negativ und $-\lambda_o \leq \text{mod } l_o$ ist, so wird wieder dem $t=0$ die einfache Lösung $\chi=0$ entsprechen, und sich daher ebenso χ als Function von t in der Form darstellen lassen

$$(6) \quad \chi = \frac{\chi_o'}{1!} t + \frac{\chi_o''}{2!} t^2 + \frac{\chi_o'''}{3!} t^3 + \dots,$$

worin sich die Werthe $\frac{\chi_o'}{1!}, \frac{\chi_o''}{2!}, \dots$ aus den Gleichungen

$$(7) \quad \begin{cases} M = -\lambda_o \frac{\chi_o'}{1!} \\ M + M\chi_o' + M\chi_o'^2 = -\lambda_o \frac{\chi_o''}{2!} \\ M + M\chi_o' + M\chi_o'^2 + M\chi_o'^3 + (M + 2M\chi_o') \frac{\chi_o'''}{2!} = -\lambda_o \frac{\chi_o'''}{3!} \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

wiederum in der Gestalt ergeben

$$(8) \quad \frac{\chi_o^{(\rho)}}{\rho!} = \frac{H_\rho}{\lambda_o^{2\rho-1}},$$

und die Grössen H_ρ ganze und ganzzahlige Functionen von M und λ_o sind.

Nun folgt aber durch Vergleichung der Systeme (3) und (7), dass

$$\text{mod } l_o \cdot \text{mod } \frac{y_o'}{1!} = \text{mod } n_1 \leq M \leq -\lambda_o \frac{\chi_o'}{1!},$$

und somit nach der für λ_o festgesetzten Bedingung, $\text{mod } \frac{y_o'}{1!} \leq \frac{\chi_o'}{1!}$; ebenso

$$\begin{aligned} \text{mod } l_o \cdot \text{mod } \frac{y_o''}{2!} &\leq \text{mod } n_2 + \text{mod } l_1 \text{ mod } y_o' + \text{mod } k_o \text{ mod } y_o'^2 \\ &\leq M + M\chi_o' + M\chi_o'^2 \leq -\lambda_o \frac{\chi_o''}{2!}, \end{aligned}$$

und daher wieder $\text{mod } \frac{y_o''}{2!} \leq \frac{\chi_o''}{2!}$, allgemein

$$(9) \quad \text{mod } \frac{y_o^{(\rho)}}{\rho!} \leq \frac{\chi_o^{(\rho)}}{\rho!},$$

²⁾ Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. CXXX (1905), S. 259-269.

so dass der Convergenzkreis der Reihe (6) jedenfalls auch den Convergenzbereich der Reihe (2) umfassen wird.

Setzt man nunmehr

$$(10) \quad 1 + t + t^2 + \dots + t^h = \tau,$$

so dass die Gleichung (5) in

$$(11) \quad M\tau(1 + \chi + \chi^2 + \dots + \chi^m) + (\lambda_0 - M)\chi - M = 0$$

übergeht, so werden die mehrfachen Punkte der algebraischen Function χ durch die Lösungen der Discriminante der Gleichung (11), oder durch die Werthe von τ und die sich sodann aus (10) ergebenden Werthe von t definirt sein, welche man durch Elimination von χ aus den Gleichungen (11) und

$$(12) \quad M\tau(1 + 2\chi + 3\chi^2 + \dots + m\chi^{m-1}) + \lambda_0 - M = 0$$

erhält. Die Gleichungen (11) und (12) können aber für keinen Werth von τ die gemeinsame Lösung $\chi = 1$ besitzen, da sich unter dieser Annahme

$$M(m+1)\tau + \lambda_0 - 2M = 0 \quad \text{und} \quad Mm(m+1)\tau + 2\lambda_0 - 2M = 0,$$

oder durch Elimination von τ

$$2M(m-1) - \lambda_0(m-2) = 0$$

ergeben würde, während λ_0 negativ ist, und es wird daher kein mehrfacher Punkt t existiren, für welchen die gleichen Werthe von χ den Werth 1 annehmen. Multiplicirt man daher die Gleichung (11) mit $\chi - 1$, so dass dieselbe in

$$(13) \quad M\tau\chi^{m+1} + (\lambda_0 - M)\chi^2 - \lambda_0\chi + M(1 - \tau) = 0$$

übergeht, so werden die mehrfachen Punkte durch das Eliminationsresultat von χ zwischen den Gleichungen (13) und

$$(14) \quad (m+1)M\tau\chi^m + 2(\lambda_0 - M)\chi - \lambda_0 = 0,$$

oder wie unmittelbar zu sehen, zwischen der Gleichung (14) und der Gleichung

$$(15) \quad (\lambda_0 - M)(m-1)\chi^2 - \lambda_0 m\chi + M(m+1)(1 - \tau) = 0$$

definirt sein, wenn derjenige Werth von τ ausgeschlossen wird, für welchen die Gleichung (11) den Werth $\chi = 1$ ergibt, also der Werth

$$\tau = \frac{2M - \lambda_0}{M(m+1)}.$$

Bezeichnet man nun die nur von λ_0 , m und M abhängigen Lösungen des Eliminationsresultates $m+2^{\text{ten}}$ Grades mit

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m+2},$$

so werden die sämtlichen Verzweigungspunkte der algebraischen Function χ , die alle unter den mehrfachen Punkten derselben enthalten sind, nach (10) unter den Wurzeln der $m+2$ Gleichungen

$$(16) \quad t^h + t^{h-1} + \dots + t^2 + t + 1 = \tau_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m+2)$$

zu suchen sein, welche nunmehr ausser von λ_0 , m , M noch von μ abhängen werden.

Der Convergencebereich der Potenzreihe (6), also auch der der Reihe (2) wird sich somit jedenfalls bis zu derjenigen der Lösungen der $m+2$ Gleichungen (16) erstrecken, welche den kleinsten Modul besitzt.

Da aber bekanntlich die Moduln der Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$A_0 t^\mu + A_1 t^{\mu-1} + \dots + A_{\mu-1} t + A_\mu = 0$$

stets grösser sind als

$$\frac{1}{q+1},$$

wenn q die grösste der Zahlen

$$\text{mod } \frac{A_0}{A_\mu}, \quad \text{mod } \frac{A_1}{A_\mu}, \quad \dots \quad \text{mod } \frac{A_{\mu-1}}{A_\mu}$$

bedeutet, so werden für ein bestimmt gewähltes τ_σ die sämtlichen Lösungen der Gleichung (16) ausserhalb des mit dem Radius

$$(17) \quad \frac{1}{\frac{1}{\text{mod}(1-\tau_\sigma)} + 1} = \frac{\text{mod}(1-\tau_\sigma)}{1 + \text{mod}(1-\tau_\sigma)} < 1$$

um den Nullpunkt gezogenen Kreises liegen, und dieser Radius von μ unabhängig, nur von λ_0 , m , M abhängig sein. Sämtliche Verzweigungspunkte t der Function z werden somit ausserhalb des mit dem kleinsten Werthe der für $\sigma = 1, 2, \dots, m+2$ sich ergebenden Ausdrücke (17) als Radius um den Nullpunkt gezogenen Kreises liegen, oder des Kreises, dessen Radius durch (17) für den kleinsten der Werthe

$$\text{mod}(1-\tau_1), \quad \text{mod}(1-\tau_2) \quad \dots \quad \text{mod}(1-\tau_{m+2})$$

bestimmt ist, wobei wir nur noch zeigen wollen, dass wir für diesen von λ_0 , m , M , aber nicht von μ abhängigen Radius den Werth Null ausschliessen können. Wäre nämlich vermöge (17) $\tau_\sigma = 1$, so würden nach (16) nur $t = 0$ und die μ^{ten} Einheitswurzeln ausser $t = 1$ in Frage kommen. Sollen aber für $\tau = 1$ die beiden Gleichungen (14) und (15) eine gemeinsame Lösung haben, so müsste, da $z = 0$ wegen $\lambda_0 \neq 0$ ausgeschlossen ist, der aus (15) sich ergebende Werth

$$z = \frac{m\lambda_0}{(\lambda_0 - M)(m-1)}$$

die Gleichung (14) befriedigen, oder es müsste die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{M m^m \lambda_0^{m-1}}{(\lambda_0 - M)^m (m-1)^{m-1}} + 1 = 0,$$

was möglich ist, da λ_0 eine negative, M eine positive reelle Grösse darstellt und der erste Summand daher für grade und ungrade m stets negativ ist; will man diesen Fall jedoch vermeiden, so braucht man daher λ_0 , welches nur negativ und dessen Modul kleiner als $\text{mod } l_0$ sein sollte, nur so zu wählen, dass es nicht eine Lösung der Gleichung

$$(\lambda_0 - M)^m (m-1)^{m-1} + M m^m \lambda_0^{m-1} = 0$$

ist.

Ist daher eine algebraische Function durch die Gleichung definiert

$$(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_\mu t^\mu) y^m + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_\mu t^\mu) y^{m-1} + \dots + (l_0 + l_1 t + l_2 t^2 + \dots + l_\mu t^\mu) y + (n_1 t + n_2 t^2 + \dots + n_\mu t^\mu) = 0,$$

worin l_0 von Null verschieden ist, so wird derjenige Zweig derselben, welcher für $t = 0$ den Werth $y = 0$ annimmt, sich in eine Potenzreihe entwickeln lassen, welche jedenfalls convergent ist innerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises, dessen Radius von μ unabhängig durch den Ausdruck

$$(18) \quad \frac{\text{mod}(1 - \tau)}{1 + \text{mod}(1 - \tau)} = \frac{1}{Q}$$

bestimmt ist, worin $\text{mod}(1 - \tau)$ den kleinsten der Moduln der Werthe $1 - \tau_\sigma$ bezeichnet, wenn τ_σ die $m + 2$ Lösungen der Discriminante der Gleichung $m + 1^{\text{ten}}$ Grades

$$(19) \quad M \tau \chi^{m+1} + (\lambda_0 - M) \chi^2 - \lambda_0 \chi + M(1 - \tau) = 0$$

darstellen, M den grössten Modul der Coefficienten $a_0, \dots, b_0, \dots, n_1, \dots$, und λ_0 eine willkürlich angenommene negative Zahl bedeutet, deren Modul $\leq l_0$ ist, und, falls $\tau_\sigma = 1$ ausgeschlossen werden soll, nicht der Gleichung

$$(20) \quad (\lambda_0 - M)^m (m - 1)^{m-1} + M m^m \lambda_0^{m-1} = 0$$

genügen darf.

Es wird somit die Gleichung

$$\left(a_0 + \frac{a_1}{Q} + \frac{a_2}{Q^2} + \dots + \frac{a_\mu}{Q^\mu}\right) y^m + \left(b_0 + \frac{b_1}{Q} + \frac{b_2}{Q^2} + \dots + \frac{b_\mu}{Q^\mu}\right) y^{m-1} + \dots + \left(l_0 + \frac{l_1}{Q} + \frac{l_2}{Q^2} + \dots + \frac{l_\mu}{Q^\mu}\right) y + \left(\frac{n_1}{Q} + \frac{n_2}{Q^2} + \dots + \frac{n_\mu}{Q^\mu}\right) = 0$$

oder

$$(a_\mu + a_{\mu-1} Q + \dots + a_1 Q^{\mu-1} + a_0 Q^\mu) y^m + (b_\mu + b_{\mu-1} Q + \dots + b_1 Q^{\mu-1} + b_0 Q^\mu) y^{m-1} + \dots + (l_\mu + l_{\mu-1} Q + \dots + l_1 Q^{\mu-1} + l_0 Q^\mu) y + (n_\mu + n_{\mu-1} Q + \dots + n_1 Q^{\mu-1}) = 0$$

durch die convergente Potenzreihe

$$y = \frac{y'_0}{1!} \frac{1}{Q} + \frac{y''_0}{2!} \frac{1}{Q^2} + \frac{y'''_0}{3!} \frac{1}{Q^3} + \dots$$

identisch befriedigt, in welcher Q nur von m und M abhängt, da λ_0 von den gemachten Einschränkungen abgesehen willkürlich war, von μ jedoch unabhängig ist; die Reihe wird ferner für jedes grössere Q convergent bleiben und nach Bestimmung der Coefficienten mittels der Gleichungen (3) der algebraischen Gleichung identisch genügen.

Es erübrigt nur noch der folgenden Bemerkungen wegen, an einem speciellen Falle zu zeigen, dass nicht stets $Q \leq M$ sein muss; so wird für die Gleichung

$$(a_0 + a_1 t) y^2 + (b_0 + b_1 t) y + c_1 t = 0,$$

worin $\text{mod } b_0 \geq 1$ sein soll, die Gleichung (5), wenn den Bedingungen entsprechend $\lambda_0 = -1$ gesetzt wird, in

$$M(1 + t) \chi^2 + (-1 + Mt) \chi + Mt = 0$$

übergehen, und die Auflösung der Discriminantengleichung

$$(-1 + Mt)^2 - 4M^2 t(1 + t) = 0$$

durch

$$t = \frac{1}{3M} [-(2M + 1) \pm \sqrt{4M^2 + 4M + 4}]$$

gegeben sein, für welche der absolute Betrag der kleinsten derselben unter $6M$ liegt, also $Q > 6M$ liefert.

Eine genauere Untersuchung des Convergenzradius der Reihe (6), deren Coefficienten sich aus (7) als ganze und ganzzahlige Functionen von M ergeben, ist vermöge einer früher von mir entwickelten Beziehung durchführbar, nach welcher

$$\sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_{\rho-1} \geq 0 \\ n_1 + 2n_2 + \dots + (\rho-1)n_{\rho-1} = \rho}} A_{n_1, n_2, \dots, n_{\rho-1}} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \lambda' \right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2 + n_3 + \dots + n_{\rho-1}} F}{\partial \lambda^{n_2 + n_3 + \dots + n_{\rho-1}}} \lambda''^{n_2} \lambda'''^{n_3} \dots \lambda^{(\rho-1)n_{\rho-1}} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \lambda^{(\rho)} = 0$$

ist, worin die Differentialquotienten in bekannter symbolischer Weise aufzufassen und die Coefficienten durch den Ausdruck bestimmt sind

$$A_{n_1, n_2, \dots, n_{\rho-1}} = \frac{\rho!}{n_1! n_2! \dots n_{\rho-1}! (1!)^{n_1} (2!)^{n_2} (3!)^{n_3} \dots (\rho-1!)^{n_{\rho-1}}},$$

oder aus der für $t = 0$, $\lambda = 0$ nach (5) sich ergebenden Beziehung

$$\sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_{\rho-2} \geq 0 \\ n_1 + 2n_2 + \dots + (\rho-2)n_{\rho-2} = \rho}} A_{n_1, n_2, \dots, n_{\rho-2}} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \lambda' \right)^{n_1} \frac{\partial^{n_2 + n_3 + \dots + n_{\rho-2}} F}{\partial \lambda^{n_2 + n_3 + \dots + n_{\rho-2}}} \right]_{t=0, \lambda=0} \lambda_0''^{n_2} \lambda_0'''^{n_3} \dots \lambda_0^{(\rho-2)n_{\rho-2}} + \rho M (1 + 2\lambda_0' \lambda_0^{(\rho-1)}) + \lambda_0 \lambda_0^{(\rho)} = 0.$$

Ist daher eine ganzzahlige Gleichung m^{ten} Grades von der Form gegeben

$$(21) \quad Ay^m + By^{m-1} + \dots + Ly + N = 0,$$

und wählt man eine beliebige positive Grösse M , bestimmt ferner den Gleichungen (18), (19), (20) gemäss die Grösse Q , so wird für jede über Q hinausliegende Zahl p der Gleichung (21) durch eine convergente Reihe

$$(22) \quad y = \frac{y'_0}{1!} \frac{1}{p} + \frac{y''_0}{2!} \frac{1}{p^2} + \frac{y'''_0}{3!} \frac{1}{p^3} + \dots$$

in der Weise genügt werden können, dass man, je nachdem $A, B, \dots$ positive oder negative Zahlen sind, durch Absonderung der grössten positiven oder negativen unter M liegenden ganzen Zahlen die Coefficienten der Gleichung in die Form setzt

$$\begin{aligned} A &= a_\mu + a_{\mu-1}p + a_{\mu-2}p^2 + \dots + a_0p^\mu, \\ B &= b_\mu + b_{\mu-1}p + b_{\mu-2}p^2 + \dots + b_0p^\mu, \\ &\dots \dots \dots \\ L &= l_\mu + l_{\mu-1}p + l_{\mu-2}p^2 + \dots + l_0p^\mu, \\ N &= n_\mu + n_{\mu-1}p + n_{\mu-2}p^2 + \dots + n_0p^\mu, \end{aligned}$$

worin $a_1, \dots, b_1, \dots, n_1, \dots$ ganze Zahlen sind — Null nicht ausgeschlossen —, während $a_0, b_0, \dots, n_0$ auch aechte Brüche sein können; die Coefficienten $\frac{y'_0}{1!}, \frac{y''_0}{2!}, \dots$ der Reihe (22) werden dann aus den Gleichungen (3) oder den oben aufgestellten allgemeinen Ausdrücken zu berechnen sein, wenn man noch den Bedingungen, dass l_0 von Null verschieden und $n_0 = 0$ sein muss, genügen kann. Ist aber $l_0 = 0$, so wird man nur L in die Form

$$L = l_\mu + l_{\mu-1}p + \dots + l_1 p^{\mu-1} - p^\mu + p^\mu$$

zu bringen und p^μ durch den Ausdruck

$$p^\mu = \lambda_\mu + \lambda_{\mu-1}p + \lambda_{\mu-2}p^2 + \dots + \lambda_1 p^{\mu-1} + \lambda p^\mu$$

zu ersetzen brauchen, worin die Coefficienten der Potenzen von p ganze unter M liegende Zahlen darstellen, während λ ein aechter Bruch ist, um L die verlangte Gestalt zu geben. Was endlich noch die nach den obigen Auseinandersetzungen nothwendig zu erfüllende Bedingung betrifft, dass $n_0 = 0$ ist, also die Zerlegung von N nur bis zur $\mu - 1^{\text{ten}}$ Potenz reicht, so braucht man nur, wenn N vom μ^{ten} Grade in Bezug auf p ist, sämtliche Grössen $A, B, \dots, L$ durch Hinzufügen von $0 \cdot p^{\mu+1}$ in ihrem Grade um eine Einheit zu erhöhen, und ebenso wie vorher unter der Annahme von $l_0 = 0$ geschehen, den Grad von L auf den $\mu + 1^{\text{ten}}$ zu erheben, so dass der letzte Coefficient von Null verschieden ist, wobei aber auch der Coefficient von p^μ eine gebrochene Zahl werden kann.

Ist Q selbst eine Primzahl, oder nimmt man für p irgend eine über Q hinausliegende Primzahl P , deren untere Graenze nach dem Früheren nur von m und einer willkürlich angenommenen positiven Zahl M abhängt, und zerlegt in der bekannten Weise jeden der Coefficienten der Gleichung (21) in der Form

$$A = a_\mu + a_{\mu-1}P + a_{\mu-2}P^2 + \dots + a_0 P^\mu,$$

$$B = b_\mu + b_{\mu-1}P + b_{\mu-2}P^2 + \dots + b_0 P^\mu,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L = l_\mu + l_{\mu-1}P + l_{\mu-2}P^2 + \dots + l_0 P^\mu,$$

$$N = n_\mu + n_{\mu-1}P + n_{\mu-2}P^2 + \dots + n_0 P^\mu,$$

worin $a_\mu, \dots, b_\mu, \dots, l_\mu, \dots, n_\mu, \dots$ ganze Zahlen bedeuten, welche kleiner als P sind, so wird, wenn alle diese Coefficienten unter M liegen, l_0 von Null verschieden und $n_0 = 0$ ist, die Gleichung (21) eine durch die convergente Reihe

$$y = A_1 \frac{1}{P} + A_2 \frac{1}{P^2} + A_3 \frac{1}{P^3} + \dots$$

darstellbare Lösung besitzen, worin die Coefficienten aus den Gleichungen

$$- l_0 A_1 = n_1,$$

$$- l_0^2 A_2 = n_2 l_0^2 - n_1 l_0 l_1 + k_0 n_1^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

oder

$$l_o^{2\rho-1} A_\rho = G_\rho$$

bestimmt sind, und G_ρ ganze und ganzzahlige Functionen der Coefficienten $a_o, \dots b_o, \dots l_o, \dots n_1, \dots$ darstellen.

Heidelberg, den 15. Juni 1907.

L. KOENIGSBERGER.