Cauchy'schen Formel erhalten hat. Dass sie nicht so vollkommen ist, wie bei den Beobachtungen in Luft, erklärt sich wohl durch die oben erörterten Umstände zur Genüge; Hr. Lundquist macht übrigens selbst noch darauf aufmerksam, dass die Beobachtungen der Ellipticität und Intensität an ganz verschiedenen Stellen der Fuchsinsschicht, also unter verschiedenen Umständen angestellt werden mussten. Das durchweg positive Vorzeichen der Differenz bei ρ zeigt übrigens, dass das für die Berechnung gewählte $\alpha = 0,34$ ein wenig zu gross ist.

Sämmtliche berechnete Beobachtungsreihen über die bei der Reflexion an Fuchsin auftretende elliptische Polarisation, über die reflectirte Intensität, über die absolute Phasenänderung sowie über die Absorption bei normalem und schiefe Durchgang zeigen eine vollständige Uebereinstimmung mit der entwickelten Theorie absorbirender Medien.

Göttingen, Juni 1884.

IV. *Zur Theorie der Absorption des Lichtes in Krystallen; von W. Voigt.*

(Aus den Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1884, Nr. 9 mitgetheilt vom Herrn Verfasser.)

Nach meinen früheren Untersuchungen¹⁾ sind die allgemeinsten absorbirenden Kräfte, welche man in ponderablen Körpern auf die Volumeneinheit Aether wirksam annehmen kann, gegeben durch:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A) = A - \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right), \\ (B) = B - \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right), \\ (C) = C - \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right), \end{array} \right.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 104 u. f. 1884.

worin ABC lineare Functionen von $\partial u/\partial t = u'$, $\partial v/\partial t = v'$, $\partial w/\partial t = w'$ sind, welche die Functionen:

$$(2) \quad \Psi_1 = Au' + Bv' + Cw'$$

zu einer negativen Summe von Quadraten machen, und A_x , A_y . . lineare Functionen von $\partial u'/\partial x$, $\partial v'/\partial x$ sind, welche die Function:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_2 = & A_x \frac{\partial u'}{\partial x} + A_y \frac{\partial u'}{\partial y} + A_z \frac{\partial u'}{\partial z} + B_x \frac{\partial v'}{\partial x} + B_y \frac{\partial v'}{\partial y} + B_z \frac{\partial v'}{\partial z} \\ & + C_x \frac{\partial w'}{\partial x} + C_y \frac{\partial w'}{\partial y} + C_z \frac{\partial w'}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

ebenso zu einer negativen Summe von Quadraten machen. $\Psi_1 + \Psi_2$ ist dann die pro Volumen- und Zeiteinheit verlorene Energie.

Ich werde im Folgenden eine Untersuchung dieser Kräfte für krystallinische Medien vornehmen.

Da das Problem ziemlich umständlich ist, so empfiehlt es sich von vorn herein, einige geeignete Vereinfachungen stattfinden zu lassen.

Erstens sollen die Kräfte ABC gleich Null genommen werden, weil dieselben, wie die Untersuchung der unkrystallinischen Medien gezeigt hat¹⁾, in den Bedingungen für den Uebergang des Lichtes aus einem Medium ins andere eine gewisse Schwierigkeit ergeben, man aber bei ihrer Vernachlässigung Uebereinstimmung mit der Beobachtung erhält. Das Analoge soll mit denjenigen der Energie-erhaltenden Kräften gethan werden, die sich ebenso verhalten wie ABC , d. h. ebenso, wie diese, nur von der Verschiebung des Volumenelementes als Ganzen abhängen.²⁾ Die sonach übrig bleibenden Kräfte von der Form:

$$-(A) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ u. s. f.}$$

haben dann die Eigenschaft, ebensowohl als innere Kräfte des Aethers aufgefasst werden zu können, wie als Wirkungen der ponderabeln Theile auf den Aether. Das letztere ziehe ich der Anschaulichkeit halber vor.

1) W. Voigt, l. c. p. 117 und 120.

2) Vgl. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 877 und 885.

Zweitens will ich mich von vorn herein auf dreifach-symmetrische Krystalle beschränken. Hat es vielleicht auch später einmal Interesse, die allgemeineren Fälle zu untersuchen, bei welchen die Absorptionskräfte sich um andere Hauptrichtungen ordnen als die Energie-erhaltenden¹⁾, so dürfte es gegenwärtig, wo es noch fast ganz an exacten Messungen der Aenderung der Absorption mit der Richtung fehlt, doch genügen, einen einfacheren Fall zu behandeln.

Ich gehe demnach zuerst dazu über, die allgemeinsten Werthe $A_x, A_y \dots$ gemäss der Annahme der Symmetrie des Krystalles in Bezug auf die Coordinatenebenen zu specialisiren.

Diese allgemeinsten Werthe der $A_x \dots$ schreibe ich in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} -A_x &= c_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{13} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{14} \frac{\partial v'}{\partial x} + c_{15} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{16} \frac{\partial v'}{\partial z} \\ &\quad + c_{17} \frac{\partial w'}{\partial x} + c_{18} \frac{\partial w'}{\partial y} + c_{19} \frac{\partial w'}{\partial z}, \\ -A_y &= c_{21} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{23} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{24} \frac{\partial v'}{\partial x} + c_{25} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{26} \frac{\partial v'}{\partial z} \\ &\quad + c_{27} \frac{\partial w'}{\partial x} + c_{28} \frac{\partial w'}{\partial y} + c_{29} \frac{\partial w'}{\partial z}. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Damit die Function Ψ_2 eine Summe von Quadraten sei, müssen für die Constanten c_{hk} noch gewisse Relationen bestehen, auf welche ich zunächst nicht eingehe.

Ist die XY -Ebene eine Symmetrieebene, so muss ein Verrückungssystem:

$$u = U(x, y, z, t), \quad v = V(x, y, z, t), \quad w = W(x, y, z, t)$$

und ein dazu symmetrisches:

$$u = U(x, y, -z, t), \quad v = V(x, y, -z, t), \quad w = -W(x, y, -z, t)$$

die gleiche Arbeit absorbiren und symmetrische Componenten (A), (B), (C) erregen. Ganz analoge Schlüsse gelten, wenn auch die YZ - und ZX -Ebenen Symmetrieebenen sind.

Demzufolge darf Ψ_2 , wenn man w mit $-w$ und z mit

1) H. Laspeyres, Zeitschr. f. Kryst. 4. p. 435. 1880. Beibl. 4. p. 791. 1880.

— z , oder u mit — u und x mit — x , oder v mit — v und y mit — y vertauscht, seinen Werth nicht ändern.

Dies ergibt die Relation:

$$c_{hk} = -c_{kh} \text{ für } h \geq k;$$

ausgenommen sind nur die Coëfficienten von:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} \cdot \frac{\partial v'}{\partial y}, \quad \frac{\partial v'}{\partial y} \cdot \frac{\partial w'}{\partial z}, \quad \frac{\partial w'}{\partial z} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x}, \quad \frac{\partial u'}{\partial y} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} \cdot \frac{\partial w'}{\partial y}, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} \cdot \frac{\partial u'}{\partial z},$$

d. h.: $c_{15}, c_{51}; c_{19}, c_{91}; c_{59}, c_{95}; c_{24}, c_{42}; c_{68}, c_{86}; c_{37}, c_{73}.$

Die Constanten, welche der Bedingung:

$$c_{hk} = -c_{kh}$$

genügen, kann man nun aber ohne weiteres gleich Null setzen, denn jene Terme, die aus der absorbirten Arbeit Ψ_2 verschwinden, können gar nicht den Charakter absorbirender Kräfte haben; in der That sind sie auch unter den Energieerhaltenden Kräften vorhanden, welche auf die elliptische und circulare Polarisation in durchsichtigen Medien führen.¹⁾

Sonach bleiben nur folgende Formeln übrig:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} -A_x = c_{11} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{15} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{19} \frac{\partial w'}{\partial z}; \quad -A_y = c_{22} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{24} \frac{\partial v'}{\partial x}; \\ \quad \quad \quad -A_z = c_{33} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{37} \frac{\partial w'}{\partial x}; \\ -B_x = c_{42} \frac{\partial u'}{\partial y} + c_{44} \frac{\partial v'}{\partial x}; \quad -B_y = c_{51} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{55} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{59} \frac{\partial w'}{\partial z}; \\ \quad \quad \quad -B_z = c_{66} \frac{\partial v'}{\partial z} + c_{68} \frac{\partial w'}{\partial y}; \\ -C_x = c_{73} \frac{\partial u'}{\partial z} + c_{77} \frac{\partial w'}{\partial x}; \quad -C_y = c_{86} \frac{\partial v'}{\partial z} + c_{98} \frac{\partial w'}{\partial y}; \\ \quad \quad \quad -C_z = c_{91} \frac{\partial u'}{\partial x} + c_{95} \frac{\partial v'}{\partial y} + c_{99} \frac{\partial w'}{\partial z} \end{array} \right.$$

und daher:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} -\Psi_2 = c_{11} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + c_{55} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + c_{99} \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + (c_{15} + c_{51}) \frac{\partial u'}{\partial y} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} \\ \quad \quad \quad + (c_{19} + c_{91}) \frac{\partial w'}{\partial z} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x} + (c_{59} + c_{95}) \frac{\partial v'}{\partial y} \cdot \frac{\partial w'}{\partial z} \end{array} \right.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 877 und 890. 1883.

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} + c_{22} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 + (c_{24} + c_{42}) \frac{\partial u'}{\partial y} \cdot \frac{\partial v'}{\partial x} + c_{44} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} \right)^2 \\ + c_{33} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 + (c_{37} + c_{73}) \frac{\partial u'}{\partial z} \cdot \frac{\partial w'}{\partial x} + c_{77} \left(\frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 \\ + c_{66} \left(\frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + (c_{68} + c_{86}) \frac{\partial v'}{\partial z} \cdot \frac{\partial w'}{\partial y} + c_{88} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} \right)^2. \end{array} \right.$$

Damit hier rechts eine Summe von neun Quadraten stehe, ist nöthig, dass alle Coëfficienten:

$$c_{ii} > 0$$

sind, die übrigen können auch negativ sein, dürfen aber in keinem Falle eine für jede leicht angebbare Grösse überschreiten.

Die Componenten (A), (B), (C) werden hiernach:

$$(A) = c_{11} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + (c_{15} + c_{24}) \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} + (c_{19} + c_{37}) \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z},$$

$$(B) = c_{44} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + c_{55} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} + (c_{59} + c_{68}) \frac{\partial^2 w'}{\partial y \partial z} + (c_{42} + c_{51}) \frac{\partial^2 u'}{\partial y \partial x},$$

$$(C) = c_{77} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + c_{88} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + c_{99} \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + (c_{73} + c_{91}) \frac{\partial^2 u'}{\partial z \partial x} + (c_{95} + c_{86}) \frac{\partial^2 v'}{\partial z \partial y},$$

d. h., sie gewinnen genau dieselbe Form, in welcher die Energie-erhaltenden Kräfte für dreifach symmetrische Krystalle in die Bewegungsgleichungen eingehen¹⁾, nur dass bei jenen die letzten beiden Coëfficienten in jeder Gleichung zusammen drei einfachen Bedingungen genügen, die auch in unserem Falle erfüllt wären, wenn für die allein noch übrigen Constanten:

$$c_{hk} = c_{kh}$$

wäre. Da die Annahme dieser Relationen die Berechnung bedeutend vereinfacht, so will ich sie einführen und zugleich ihr entsprechend abkürzen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{15} + c_{24} = c_{51} + c_{42} = c_3, \quad c_{19} + c_{37} = c_{91} + c_{73} = c_2, \\ c_{59} + c_{68} = c_{95} + c_{86} = c_1; \end{array} \right.$$

es ist dabei zu bemerken, dass dieselben zwar bei der vollkommen gleichen Weise, in welcher die Energie-erhaltenden

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 886. 1883.

und absorbirenden Kräfte nebeneinander stehen sehr wahrscheinlich, nichtsdestoweniger aber eine willkürliche Specialisirung des allgemeinsten Falles sind, also der Rechtfertigung durch die Beobachtung bedarf.

Ihre Einführung gestattet wegen der Relation:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

zu schreiben:

$$(7) \begin{cases} (A) = (c_{11} + c_1 - c_2 - c_3) \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ (B) = c_{44} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + (c_{55} + c_2 - c_3 - c_1) \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ (C) = c_{77} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + c_{88} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + (c_{99} + c_3 - c_1 - c_2) \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{cases}$$

worin $\varphi = c_1 (\partial u' / \partial x) + c_2 (\partial v' / \partial y) + c_3 (\partial w' / \partial z)$ ist.

Setzt man diese Werthe neben den Energie-erhaltenden Kräften¹⁾ in die Bewegungsgleichungen, führt für die Constanten (die, wie früher erörtert²⁾, die Schwingungsdauer enthalten können) beiderseitig übereinstimmende Bezeichnungen ein und fasst $-\varphi$ mit dem entsprechenden Glied der anderen Kräfte und dem hydrostatischen Druck zu L zusammen, so erhält man folgende Formeln:

$$(8) \begin{cases} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + B_{13} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C_{11} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + C_{13} \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial x}, \\ m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = B_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + B_{23} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + C_{21} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + C_{23} \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial y}, \\ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = B_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + C_{31} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + C_{32} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + C_{33} \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + \frac{\partial L}{\partial z}, \end{cases}$$

während zugleich $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$ ist.

Für den Fall der Fortpflanzung ebener Wellen in einer durch μ , ν , π gegebenen Richtung setze ich zur Integration:

$$u = M\Phi + M'\tau\Phi', \quad v = N\Phi + N'\tau\Phi', \quad w = P\Phi + P'\tau\Phi',$$

$$L = \frac{1}{\tau\omega} (Q\tau\Phi' + Q'\Phi),$$

$$\text{worin } \Phi = c^{-\frac{\pi q}{\tau\omega}} \sin \frac{1}{\tau} \left(t - \frac{q}{\omega} \right), \quad \tau = T/2\pi \text{ und } q = \mu x + \nu y + \pi z.$$

1) l. c. p. 886.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. Nr. 7. p. 264. 1884. Wied. Ann. 23. p. 557. 1884.

Die Ausrechnung ergibt die folgenden acht Bedingungen:

$$\begin{aligned}
 & \mu(Q - Q'x) = M[B_1(1-x^2) + 2x\Gamma_1 - m\omega^2] + M'[2xB_1 - (1-x^2)\Gamma_1], \\
 & \nu(Q - Q'x) = N[B_2(1-x^2) + 2x\Gamma_2 - m\omega^2] + N'[2xB_2 - (1-x^2)\Gamma_2], \\
 & \pi(Q - Q'x) = P[B_3(1-x^2) + 2x\Gamma_3 - m\omega^2] + P'[2xB_3 - (1-x^2)\Gamma_3], \\
 (9) \quad & \mu(Qx + Q') = M[2xB_1 - (1-x^2)\Gamma_1] - M'[B_1(1-x^2) + 2x\Gamma_1 - m\omega^2], \\
 & \nu(Qx + Q') = N[2xB_2 - (1-x^2)\Gamma_2] - N'[B_2(1-x^2) + 2x\Gamma_2 - m\omega^2], \\
 & \pi(Qx + Q') = P[2xB_3 - (1-x^2)\Gamma_3] - P'[B_3(1-x^2) + 2x\Gamma_3 - m\omega^2], \\
 & M\mu + N\nu + P\pi = 0, \quad M'\mu + N'\nu + P'\pi = 0.
 \end{aligned}$$

Hierin ist:

$$(10) \quad \begin{cases} B_1 = B_{11}\mu^2 + B_{12}\nu^2 + B_{13}\pi^2, & \tau\Gamma_1 = C_{11}\mu^2 + C_{12}\nu^2 + C_{13}\pi^2, \\ B_2 = B_{21}\mu^2 + B_{22}\nu^2 + B_{23}\pi^2, & \tau\Gamma_2 = C_{21}\mu^2 + C_{22}\nu^2 + C_{23}\pi^2, \\ B_3 = B_{31}\mu^2 + B_{32}\nu^2 + B_{33}\pi^2, & \tau\Gamma_3 = C_{31}\mu^2 + C_{32}\nu^2 + C_{33}\pi^2. \end{cases}$$

Schreibt man diese acht Gleichungen in der Form:

$$(11) \quad \begin{cases} -\mu R = M(i_1 - m\omega^2) + M'h_1, & +\mu R' = Mh_1 - M'(i_1 - m\omega^2), \\ -\nu R = N(i_2 - m\omega^2) + N'h_2, & +\nu R' = Nh_2 - N'(i_2 - m\omega^2), \\ -\pi R = P(i_3 - m\omega^2) + P'h_3, & +\pi R' = Ph_3 - P'(i_3 - m\omega^2), \\ M\mu + N\nu + P\pi = 0, & M'\mu + N'\nu + P'\pi = 0. \end{cases}$$

so bemerkt man, dass durch Elimination von $M, M', N, N', P, P', R, R'$ die Gleichung folgt:

$$(12) \quad \begin{bmatrix} \mu & 0 & i_1 - m\omega^2 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -h & i_1 - m\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 0 & i_2 - m\omega^2 & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 & -h_2 & i_2 - m\omega^2 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_3 - m\omega^2 & h_3 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & -h_3 & i_3 - m\omega^2 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & \nu & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \nu & 0 & \pi \end{bmatrix} = 0.$$

Diese Determinante ist nach einem früher mitgetheilten Satze¹⁾ gleich einer Summe von zwei Quadraten, die also einzeln verschwinden müssen. Hierdurch erhält man:

1) W. Voigt, Wied. Ann. 16. p. 314. 1882.

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \mu^2 (i_2 - m\omega^2)(i_3 - m\omega^2) - h_2 h_3 \\ \quad + \nu^2 (i_3 - m\omega^2)(i_1 - m\omega^2) - h_3 h_1 \\ \quad + \pi^2 (i_1 - m\omega^2)(i_2 - m\omega^2) - h_1 h_2 \\ 0 = \mu^2 (i_2 - m\omega^2) h_3 + (i_3 - m\omega^2) h_2 \\ \quad + \nu^2 (i_3 - m\omega^2) h_1 + (i_1 - m\omega^2) h_3 \\ \quad + \pi^2 (i_1 - m\omega^2) h_2 + (i_2 - m\omega^2) h_1. \end{array} \right.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist ω und κ zu bestimmen; die erhaltenen Werthe in (11) eingesetzt, gestatten dann die Bestimmung der zugehörigen Werthe MNP etc., d. h. der Richtung der bezüglichen Schwingungen. Man bemerkt, dass man im allgemeinen vier elliptisch polarisirte Wellen erhält.

Die Formeln (13) sind aber trotz der schon getroffenen Vereinfachung noch zu allgemein, denn sie führen bei verschwindender Absorption auf ein complicirteres Gesetz für ω , als das Fresnel'sche. Wie früher für durchsichtige Medien gezeigt¹⁾, haben zwei verschiedene Verfügungen über die neun Constanten B die Wirkung jenes einfachere Gesetz zu ergeben und zugleich die Fresnel'sche und Neumann'sche Definition der Polarisationssebene zu liefern. Es erscheint passend, über die Constanten C der absorbirenden Kräfte, wegen des eigenthümlichen Verhältnisses, in welchem sie zu den Energie-erhaltenden stehen, die gleichen Verfügungen zu treffen, — abermals eine Specialisirung, die die Beobachtung zu rechtfertigen hat.

Setzt man:

$$\begin{array}{ll} B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_1, & C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_1, \\ B_{21} = B_{22} = B_{23} = B_2, & C_{21} = C_{22} = C_{23} = C_2, \\ B_{31} = B_{32} = B_{33} = B_3, & C_{31} = C_{32} = C_{33} = C_3, \end{array}$$

so entspricht das Resultat der Fresnel'schen Anschauung und gibt auch die Resultate der Beobachtung über Absorption in Krystallen in einer damit übereinstimmenden Weise wieder.

Wie indess schon bei der Betrachtung der durchsichtigen Medien hervorgehoben ist, hat diese Verfügung über die

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 888 1883.

Größen B keine besondere innere Wahrscheinlichkeit, und die Betrachtung der Werthe der Constanten C gibt für sie analoge Resultate. $C_{12} = C_{13}$ oder in der früheren Bezeichnung $c_{22} = c_{33}$ genommen, ergäbe z. B. nach (5), dass ein Verschiebungssystem u' , welches das eine mal nur eine Function von y , das andere mal dieselbe von z ist, die gleiche Energie absorbiert; dies erscheint aber neben der Annahme der kystallographischen Verschiedenheit aller drei Coordinatenachsen gewiss sehr willkürlich.

Weniger bedenklich erscheint diejenige Verfügung, welche zu den Neumann'schen Resultaten führt, nämlich:

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} B_{12} = B_{21} = B_3, \quad B_{23} = B_{32} = B_1, \quad B_{31} = B_{13} = B_2, \\ B_{11} = B_3 + B_2 - B_1, \quad B_{22} = B_1 + B_3 - B_2, \quad B_{33} = B_1 + B_2 - B_3, \\ \text{nebst den entsprechenden für die } C: \\ C_{12} = C_{21} = C_3, \quad C_{23} = C_{32} = C_1, \quad C_{31} = C_{13} = C_2, \\ C_{11} = C_2 + C_3 - C_1, \quad C_{22} = C_1 + C_3 - C_2, \quad C_{33} = C_1 + C_2 - C_3. \end{array} \right.$$

Das erste Tripel der Bedingungen für C sagt nämlich aus, dass in der absorbierten Arbeit Ψ_2 nach (5) die Größen $\partial u' / \partial y$, $\partial v' / \partial x$, $\partial v' / \partial z$, $\partial w' / \partial y$, $\partial w' / \partial x$, $\partial u' / \partial z$ nur in den Combinationen:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}, & \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}, & \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}, \\ \frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x}, & \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial y}, & \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z} \end{array}$$

vorkommen. Nun sind die ersten drei hiervon eben dieselben, welche allein neben $\partial u' / \partial x$, $\partial v' / \partial y$, $\partial w' / \partial z$ die Deformation des Volumenelementes bestimmen, die letzteren aber bedeuten seine Drehungscomponenten um die Coordinatenachsen; dass nur sie in Ψ_2 auftreten, hat also einen guten physikalischen Sinn. Das letzte Tripel Bedingungen für die B und C hat zwar keine so anschauliche Bedeutung, enthält aber durchaus nichts an sich Unwahrscheinliches.

Durch Einführung der Relationen (14) kann man nun die obigen Gleichungen auf neue einfachere Formen bringen.

Man erhält nach einiger Rechnung aus (13) die neuen Gleichungen für ω und κ :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \mu^2 [(J_2 - m\omega^2)(J_3 - m\omega^2) - H_2 H_3] \\ \quad + \nu^2 [(J_3 - m\omega^2)(J_1 - m\omega^2) - H_3 H_1] \\ \quad + \pi^2 [(J_1 - m\omega^2)(J_2 - m\omega^2) - H_1 H_2], \\ 0 = \mu^2 [(J_2 - m\omega^2)H_3 + (J_3 - m\omega^2)H_2] \\ \quad + \nu^2 [(J_3 - m\omega^2)H_1 + (J_1 - m\omega^2)H_3] \\ \quad + \pi^2 [(J_1 - m\omega^2)H_2 + (J_2 - m\omega^2)H_1], \end{array} \right.$$

in denen nun aber J und H die $\mu \nu \pi$ nicht mehr explicite enthalten, sondern nur κ , und zwar ist:

$$(16) \quad \left\{ J_n = B_n(1 - \kappa^2) + 2\kappa \frac{C_n}{\tau}, \quad H_n = 2\kappa B_n - \frac{C_n}{\tau}(1 - \kappa^2). \right.$$

Da sich auch i und h durch J und H ausdrücken lassen, so kann man zu den obigen Gleichungen (15) auch die aus (11) durch Einführung dieser Grössen folgenden stellen. Sie werden:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mu R = M[J_2 + J_3 - (J_1\mu^2 + J_3\nu^2 + J_3\pi^2) - m\omega^2] \\ \quad + M'[H_2 + H_3 - (H_1\mu^2 + H_2\nu^2 + H_3\pi^2)], \\ -\nu R = N[J_3 + J_1 - (J_1\mu^2 + J_2\nu^2 + J_3\pi^2) - m\omega^2] \\ \quad + N'[H_3 + H_1 - (H_1\mu^2 + H_2\nu^2 + H_3\pi^2)], \\ -\pi R = P[J_1 + J_2 - (J_1\mu^2 + J_2\nu^2 + J_3\pi^2) - m\omega^2] \\ \quad + P'[H_1 + H_2 - (H_1\mu^2 + H_2\nu^2 + H_3\pi^2)], \\ \mu R' = M[H_2 + H_3 - (H_1\mu^2 + H_2\nu^2 + H_3\pi^2)] \\ \quad - M'[J_2 + J_3 - (J_1\mu^2 + J_2\nu^2 + J_3\pi^2) - m\omega^2], \\ \nu R' = N[H_3 + H_1 - (H_1\mu^2 + H_2\nu^2 + H_3\pi^2)] \\ \quad - N'[J_3 + J_1 - (J_1\mu^2 + J_2\nu^2 + J_3\pi^2) - m\omega^2], \\ \pi R' = P[H_1 + H_2 - (H_1\mu^2 + H_2\nu^2 + H_3\pi^2)] \\ \quad - P'[J_1 + J_2 - (J_1\mu^2 + J_2\nu^2 + J_3\pi^2) - m\omega^2]. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (15), (16) und (17) enthalten die Lösung des gestellten Problems.

Wir wenden sie zuerst auf optisch einaxige Krystalle an, und zwar sei die Z -Axe zur Hauptaxe gewählt. Dann ist in den Formeln (15)–(17) $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, also $J_1 = J_2$, $H_1 = H_2$ und $\mu^2 + \nu^2 = \sigma^2$ zu setzen, und man gewinnt folgende Wurzelsysteme für die ordinäre und extraordinäre Welle, die durch die Indices o und e unterschieden sind:

$$(18) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & J_1 = m\omega_o^2, \quad H_1 = 0; \\ \text{(b)} & J_1\pi^2 + J_3\sigma^2 = m\omega_e^2, \quad H_1\pi^2 + H_3\sigma^2 = 0, \quad P = P' = 0. \end{array}$$

Die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind hier mit den Fresnel'schen fast identisch. Constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit entspricht auch constante Absorption. Hierin liegt das durch die Beobachtung bestätigte Resultat, dass bei einfallendem weissen Lichte die ordinäre Welle in jeder Richtung dieselbe Farbe zeigt, welche in der Richtung der optischen Axe wahrnimmt.¹⁾ Ausführlich schreiben sich diese Gleichungen in (18):

$$(18_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } B_1(1 - x_0^2) + 2 \frac{C_1}{\tau} x_0 = m \omega_0^2, \\ \quad 2 B_1 x_0 - \frac{C_1}{\tau} (1 - x_0^2) = 0. \\ \text{b) } [B_1(1 - x_e^2) + 2 \frac{C_1}{\tau} x_e] \pi^2 + [B_3(1 - x_e^2) + 2 \frac{C_3}{\tau} x_e] \sigma^2 = m \omega_e^2 \\ \quad [2 B_1 x_e - \frac{C_1}{\tau} (1 - x_e^2)] \pi^2 + [2 B_3 x_e - \frac{C_3}{\tau} (1 - x_e^2)] \sigma^2 = 0. \end{array} \right.$$

Die Werthe x ergeben sich hieraus:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } x_0 = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{B_1}{C_1} \right)^2} - \tau \frac{B_1}{C_1}, \\ \text{b) } x_e = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{B_1 \pi^2 + B_3 \sigma^2}{C_1 \pi^2 + C_3 \sigma^2} \right)^2} - \tau \left(\frac{B_1 \pi^2 + B_3 \sigma^2}{C_1 \pi^2 + C_3 \sigma^2} \right). \end{array} \right.$$

Oder für gegen B kleine Werthe C unter Beschränkung auf Glieder erster Ordnung:

$$(19_a) \quad \text{a) } 2\tau x_0 = \frac{C_1}{B_1}, \quad \text{b) } 2\tau x_e = \frac{C_1 \pi^2 + C_3 \sigma^2}{B_1 \pi^2 + B_3 \sigma^2}.$$

Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht stark mit der Richtung variabel, also B_3 und B_1 nicht wesentlich verschieden, so genügt es, dafür einen mittleren Werth B einzuführen und zu schreiben:

$$(19_b) \quad \text{a) } 2\tau x_0 = \frac{C_1}{B}, \quad \text{b) } 2\tau x_e = \frac{C_1 \pi^2 + C_3 \sigma^2}{B}.$$

Wir wollen nun das Verhalten einer Platte von der Dicke L aus einem einaxigen absorbirenden Krystall im divergenten polarisirten Lichte untersuchen und dabei in vielbenutzter Weise annehmen, die Platte sei so klein, dass man sie als ein Stück einer von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzten Kugelschale ansehen kann, aus deren Mittelpunkt die Lichtstrahlen ausgehen.

1) Haidinger, Pogg. Ann. 65. p. 1. 1845.

Setze ich dann die gegenseitige Verzögerung des ordinären und extraordinären Strahles in einer Richtung, welche den Winkel γ mit der optischen Axe macht, gleich δ , den Winkel, den in dieser Richtung die Schwingungsebene des Polarisators mit dem Hauptschnitt macht, α , den analogen für die Schwingungsrichtung des Analysators β , die einfallende Amplitude A , so wird parallel der Schwingungsebene des Analysators nach dem Austritt aus demselben eine Intensität erhalten werden, welche ist:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} J = A^2 [& \cos^2 \alpha \cos^2 \beta e^{-2\kappa_o l_o} + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta e^{-2\kappa_e l_e} \\ & + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta \cos \delta e^{-(\kappa_o l_o + \kappa_e l_e)}] . \end{aligned} \right.$$

Hier ist kurz gesetzt:

$$\frac{L}{1 \omega_o} = l_o, \quad \frac{L}{1 \omega_e} = l_e,$$

und von dem Verlust durch die innere und äussere Reflexion abgesehen.

Da δ mit wachsendem γ selbst wächst, so folgt, dass sich im allgemeinen abwechselnd helle und dunkle Ringe um die Axe zeigen müssen. Ist dies, trotzdem parallel der optischen Axe die Absorption gering ist, nicht der Fall — wie es Hr. Lommel im blauen Licht am Magnesiumplatin-cyanür beobachtet hat¹⁾, — so folgt daraus, dass in einiger Entfernung von der Axe das δ enthaltende Glied unmerklich werden, d. h. der Absorptionsindex κ_e mit γ wachsen muss. Wegen der Natur der Exponentialgrösse ist dabei noch kein besonders schnelles Wachsen nöthig, um in kleiner Entfernung schon das Glied vernachlässigen zu können.

Führt man diese Eigenschaft von κ_e ein, welche nach dessen Werth (19_b) nur verlangt, dass $C_3 > C_1$ ist, so enthält obige Formel (20) die vollständige Erklärung der Lommel'schen Beobachtungen am Magnesiumplatin-cyanür.

Nehmen wir zunächst die der Axe unmittelbar benachbarten Richtungen, so ergibt sich, da dort $\kappa_e = \kappa_o$, $l_e = l_o$ ist, die gewöhnliche Formel für durchsichtige Medien und dem-

1) Lommel, Wied. Ann. 9. p. 108. 1880.

gemäss bei gekreuzten Schwingungsebenen Dunkelheit, bei parallelen Helligkeit.

Schon in kleiner Entfernung von der Axe ist aber die Formel gültig:

$$(21) \quad J = A^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta e^{-2\pi_0 l_0}.$$

Diese sagt den Inhalt von Hrn. Lommel's Beobachtung¹⁾ aus:

„Bei gekreuzten Schwingungsebenen sieht man ein rechtwinkliges Kreuz ohne Interferenzringe.“

„Dreht man nun das Polariskop, so bleibt der zu der Schwingungsrichtung des Polarisators senkrechte Balken des Kreuzes unverändert stehen, während der andere Balken sich mit dem Polariskop dreht, indem er zu der Schwingungsebene desselben normal bleibt.“

„Man erhält also ein schiefwinkliges Kreuz, dessen Arme wie vorher vollkommen dunkel sind“, d. h. J ist gleich Null für $\alpha = \pi/2$ und $\beta = \pi/2$. „Zugleich erscheinen die spitzwinkligen Quadranten dunkler als die stumpfwinkligen.“

„Stellt man endlich die Schwingungsebene des Polariskops parallel zu derjenigen des Polarisators, so bleiben nur noch die auf dieser gemeinsamen Richtung normalen Kreuzarme übrig als zwei dunkle Sektoren, welche durch einen schmalen, gegen die Sektoren scharf begrenzten Zwischenraum voneinander getrennt sind.“

Wie aus der Erscheinung im blauen polarisirten Lichte die im weissen sich ableitet, hat Hr. Lommel selbst erörtert.

Für den Fall natürliches blaues Licht einfällt und nach dem Durchgang durch einen Analysator betrachtet wird²⁾, ergibt sich die Formel aus (20), indem man den Mittelwerth für alle möglichen Werthe α bildet. Man erhält dann:

$$(22) \quad J = \frac{A^2}{2} \cos^2 \beta e^{-2\pi_0 l_0},$$

1) Lommel, l. c. p. 109. In den citirten Sätzen ist nur gemäss unserer Auffassung, dass Schwingungs- und Polarisationsrichtung zusammenfallen, das Wort „parallel“ überall durch „normal“ ersetzt.

2) Analoges gilt für den Fall, dass polarisirtes Licht einfällt und ohne Analysator mit blossen Auge beobachtet wird.

d. h. „man gewahrt im blauen Lichte bei jeder Stellung des Polariscope und stets normal zu dessen Schwingungsebene zwei dunkle Büschel . . . ohne Interferenzringe¹⁾“ — dabei ein helles Axenbild.

Fällt unpolarisirtes blaues Licht ein, so ist auch für alle Werthe β das Mittel in Formel (22) zu nehmen. Die Büschel verschwinden dann, und es bleibt nur ein hellerer Fleck in der Richtung der Axe übrig.²⁾ Dass mit der starken Absorption des extraordinären Strahles für blaues Licht die theilweise Polarisation des durchgegangenen in dem Hauptschnitt, sowie die blaue Farbe des von einfallendem weissen Lichte herrührenden reflectirten direct zusammenhängt, ist nach unserer Theorie ohne weiteres klar.

Die bisher erörterten Phänomene entsprechen dem Falle, dass in dem Werthe von κ_e die Grösse $C_3 > C_1$ war. Im umgekehrten Falle

$$C_1 > C_3$$

folgen etwas andere Erscheinungen. κ_o ist dann gross, und κ_e nimmt mit wachsendem γ ab, sodass in der Richtung der Axe aus (20) stets Dunkelheit folgt und erst in einiger, möglicherweise ziemlich bedeutender Entfernung das Glied:

$$J = A^2 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha e^{-2\kappa_e l_e}$$

merkliche Werthe bekommt. Hier würden also zwei dunkle Büschelpaare parallel zur Schwingungsebene des Polarisators und Analysators liegen, desgleichen wenn natürliches Licht einfällt, ein Büschelpaar parallel der Schwingungsebene des Analysators auftreten. Auch diese Erscheinung ist stets von Dunkelheit in der Richtung der Axe begleitet. Die Voraussetzung $C_1 > C_3$ ist beim Turmalin erfüllt und demgemäss der dunkle Fleck in der Richtung der Axe auch beobachtet worden³⁾; eine Notiz über die Büschel bei Anwendung polarisirten Lichtes habe ich nicht finden können.

Wir gehen nun zu optisch zweiaxigen Krystallen (nach der gemachten Beschränkung zunächst nur solchen des rhombischen Systemes) über.

1) Lommel l. c. p. 111, schon früher beobachtet von Bertrand, Zeitschr. f. Kryst. 3. p. 645. 1879.

2) Bertrand l. c. p. 645.

3) Bertrand l. c. p. 645.

Da hier die allgemeinen und sehr complicirten Formeln (15) bis (17) eintreten, so betrachten wir zunächst specielle Fälle, und zwar zuerst die Fortpflanzung des Lichtes parallel den drei Hauptaxen.

1) Es wird für die:

$$X\text{-Axe, } \nu = \pi = 0, \quad \mu = 1, \quad M = M' = 0.$$

Daher:

$$\begin{aligned} (J_2 - m\omega^2)(J_3 - m\omega^2) - H_2 H_3 &= 0, \quad (J_2 - m\omega^2)H_3 + (J_3 - m\omega^2)H_2 = 0 \\ \nu &= N(J_3 - m\omega^2) + N' H_3, \quad 0 = N H_3 - N'(J_3 - m\omega^2) \\ \nu &= P(J_2 - m\omega^2) + P' H_2, \quad 0 = P H_2 - P'(J_2 - m\omega^2). \end{aligned}$$

Also zwei Wurzelsysteme:

$$(23_a) \begin{cases} a) & J_2 = m\omega^2, \quad H_2 = 0, \quad N = N' = 0, \quad \text{also } \parallel Z \\ b) & J_3 = m\omega^2, \quad H_3 = 0, \quad P = P' = 0, \quad \text{also } \parallel Y. \end{cases}$$

Dieselbe Betrachtung gibt für die anderen Hauptrichtungen folgende Werthpaare:

$$\begin{aligned} 2) & \text{ Y-Axe, } \mu = \pi = 0, \quad \nu = 1, \quad N = N' = 0, \\ (23_b) & \begin{cases} a) & J_3 = m\omega^2, \quad H_3 = 0, \quad P = P' = 0, \quad \text{also } \parallel X \\ b) & J_1 = m\omega^2, \quad H_1 = 0, \quad M = M' = 0, \quad \text{also } \parallel Z. \end{cases} \\ 3) & \text{ Z-Axe, } \mu = \nu = 0, \quad \pi = 1, \quad P = P' = 0, \\ (23_c) & \begin{cases} a) & J_1 = m\omega^2, \quad H_1 = 0, \quad M = M' = 0, \quad \text{also } \parallel Y \\ b) & J_2 = m\omega^2, \quad H_2 = 0, \quad N = N' = 0, \quad \text{also } \parallel X. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Zusammenstellung zeigt, dass in den drei Hauptrichtungen der gleichen Geschwindigkeit (gegeben durch ein bestimmtes J_h) auch die gleiche Absorption entspricht. Oder mit anderen Worten: diejenigen Wellen, welche bei zu einander senkrechter Fortpflanzungsrichtung auch zu einander senkrechte Schwingungen haben, werden gleich stark absorbiert, zeigen also die gleiche Farbe.

Damit ist das experimentelle Resultat, welches zuerst von Haidinger¹⁾ und nach ihm von anderen fälschlich gegen die Neumann'sche Definition der Polarisationssebene geltend gemacht ist, als mit dieser Definition durchaus verträglich streng aus der Theorie abgeleitet und anscheinend sogar wahrscheinlicher gemacht, als das entgegengesetzte.²⁾

1) Haidinger, Pogg. Ann. 86. p. 131. 1852 reproducirt von Mousson, Physik 2. p. 630. 1872. Müller-Pouillet, Physik 1. p. 804. 1864.

2) Ich kann den Beweis, welchen Hr. Lommel (Wied. Ann. 8. p. 634. 1879) für die Fresnel'sche Ansicht anführt, nicht für sicherer

Ferner seien die Hauptebenen betrachtet.

Für die XZ -Ebene ist: $\nu=0$, $\mu M + \pi P = 0$, $\mu M' + \pi P' = 0$.

Man erhält demgemäss aus den zwei Gleichungen (15) folgende zwei zusammengehörige Paare neuer, welche den beiden Wellen entsprechen:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } J_2 = m\omega^2, H_2 = 0 \text{ dazu nach (17) } N = N' = 0; \\ \text{diese Welle schwingt also parallel der } XZ\text{-Ebene.} \\ \text{b) } J_1\pi^2 + J_3\mu^2 = m\omega^2, H_1\pi^2 + H_3\mu^2 = 0. \end{array} \right.$$

Die Formeln für die anderen Hauptebenen folgen hieraus durch cyclische Vertauschung der Indices und der $\mu\nu\pi$ und MNP . Man bemerkt, dass in den Hauptebenen sich nur zwei Wellen fortpflanzen, und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch Formeln gegeben werden, die den bezüglichlichen Fresnel'schen völlig analog gebildet sind. Constanter Geschwindigkeit entspricht constante Absorption.

Die Gleichungen für die beiden Wurzeln κ lassen sich in diesem Falle auch leicht lösen. Man erhält die beiden Werthe:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \kappa = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{B_2}{C_2} \right)^2} - \tau \frac{B_2}{C_2} \\ \text{b) } \kappa = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{B_1\pi^2 + B_3\mu^2}{C_1\pi^2 + C_3\mu^2} \right)^2} - \tau \frac{B_1\pi^2 + B_3\mu^2}{C_1\pi^2 + C_3\mu^2}, \end{array} \right.$$

oder für so kleine Werthe C , dass man ihr Quadrat neben dem der B vernachlässigen kann:

$$(25_a) \quad \text{a) } 2\tau\kappa = \frac{C_2}{B_2}, \quad \text{b) } 2\tau\kappa = \frac{C_1\pi^2 + C_3\mu^2}{B_1\pi^2 + B_3\mu^2};$$

das für die übrigen Hauptebenen Gültige folgt hieraus durch cyclische Vertauschung der Indices.

halten, als den Haidinger's. Bei den angezogenen Fluorescenzerscheinungen dringt das Licht doch in endliche Tiefen des fluorescirenden Mediums ein und tritt aus endlichen Tiefen aus; es erscheint demnach durchaus nicht selbstverständlich, dass die Fluorescenz derselben Kry stallfläche nur von der Schwingungsrichtung des einfallenden Lichtes abhängt. Wie aber die theoretische Behandlung einer zu erklärenden Erscheinung die entgegengesetzte Entscheidung wahrscheinlich machen kann, als die directe Anschauung der Erscheinung selbst, wird durch das oben behandelte Problem bedeutungsvoll illustriert.

Ist $B_3 > B_2 > B_1$ so erhält die XZ -Ebene die optischen Axen; ihre Winkel χ mit der Z -Axe sind in obiger Annäherung gegeben durch:

$$(26) \quad \cos^2 \chi = \frac{B_3 - B_2}{B_3 - B_1}, \quad \sin^2 \chi = \frac{B_2 - B_1}{B_3 - B_1}.$$

Man bemerkt, dass sich bei absorbirenden optisch zwei-axigen Krystallen in der Richtung der optischen Axen zwar für die Geschwindigkeiten nur ein Werth ergibt, nicht aber für die Absorptionsindices. Bezeichnet man die parallel der XZ -Ebene schwingende Welle in der Richtung der optischen Axe mit o , die normal dazu mit e , so wird:

$$(27) \quad 2\tau\kappa_o = \frac{C_2}{B_2}, \quad 2\tau\kappa_e = \frac{C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)}{B_2(B_3 - B_1)}.$$

Bei stark verschiedenen Werthen C_1, C_2, C_3 wird also auch das parallel einer optischen Axe fortgepflanzte Licht mehr oder weniger polarisirt sein. Dass dies der Wirklichkeit entspricht, kann man leicht z. B. am Epidot wahrnehmen.

Für beliebige Richtungen werden die Gesetze für ω und κ so complicirt, dass man kaum für die Vergleichung mit der Beobachtung geeignete Formeln erhalten dürfte, so lange man beliebig grosse Werthe κ zulässt. Da indessen bei allen Krystallen, die im durchgehenden Licht beobachtet sind, κ sehr klein ist, so genügt für sie vollständig eine Annäherung, welche die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf C_1, C_2, C_3 und κ vernachlässigt.

Dieselbe liefert die folgenden einfacheren Formeln aus den Gleichungen (15):

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu^2}{B_1 - m\omega^2} + \frac{\nu^2}{B_2 - m\omega^2} + \frac{\pi^2}{B_3 - m\omega^2} = 0, \\ 2\tau\kappa = \frac{\mu^2[C_3(B_2 - m\omega^2) + C_2(B_3 - m\omega^2)] + \nu^2[C_1(B_3 - m\omega^2) + C_3(B_1 - m\omega^2)] + \pi^2[C_2(B_1 - m\omega^2) + C_1(B_2 - m\omega^2)]}{\mu^2[B_3(B_2 - m\omega^2) + B_2(B_3 - m\omega^2)] + \nu^2[B_1(B_3 - m\omega^2) + B_3(B_1 - m\omega^2)] + \pi^2[B_2(B_1 - m\omega^2) + B_1(B_2 - m\omega^2)]} \end{array} \right.$$

Das Gesetz der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten wird also hiernach mit dem Fresnel'schen identisch, und dies macht begreiflich, dass die Beobachtungen an gefärbten Krystallen dasselbe bestätigt haben.

Die Amplituden M' N' P' werden mit den C zugleich unendlich klein erster Ordnung. Da die Wurzeln der ersten Gleichung (28) sich bekanntlich in rationaler Form gesondert darstellen lassen, wenn man statt der Winkel der Wellennormale gegen die Symmetrieachsen des Krystalls diejenigen gegen die optischen Axen einführt, so kann man in der benutzten Annäherung dasselbe mit den zugehörigen Absorptionsindices κ thun.

Nennt man die Winkel der Wellennormale mit den beiden optischen Axen u und v , so ist bekanntlich für die sogenannte ordinäre und extraordinäre Welle:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \omega_o^2 = B_1 + (B_3 - B_1) \sin^2 \frac{u-v}{2}, \\ m \omega_e^2 = B_1 + (B_3 - B_1) \sin^2 \frac{u+v}{2}. \end{array} \right.$$

Ausserdem ist:

$$\mu \sqrt{\frac{B_2 - B_1}{B_3 - B_1}} = \sin \frac{u-v}{2} \cdot \sin \frac{u+v}{2},$$

$$\pi \sqrt{\frac{B_3 - B_2}{B_3 - B_1}} = \cos \frac{u-v}{2} \cdot \cos \frac{u+v}{2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe folgt:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \tau \kappa_o = \frac{\left((B_3 - B_1) \sin^2 \frac{u-v}{2} \cdot \cos^2 \frac{u-v}{2} \left(\frac{C_1 - C_2}{B_1 - B_2} \sin^2 \frac{u+v}{2} + \frac{C_2 - C_3}{B_2 - B_3} \cos^2 \frac{u+v}{2} \right) \right.}{\left(B_3 \sin^2 \frac{u-v}{2} + B_1 \cos^2 \frac{u-v}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{u-v}{2} - \cos^2 \frac{u+v}{2} \right)} \\ \quad \left. + C_1 \cos^2 \frac{u-v}{2} \cdot \sin^2 \frac{u+v}{2} - C_3 \sin^2 \frac{u-v}{2} \cdot \cos^2 \frac{u+v}{2} \right) \\ 2 \tau \kappa_e = \frac{\left((B_3 - B_1) \sin^2 \frac{u+v}{2} \cdot \cos^2 \frac{u+v}{2} \left(\frac{C_1 - C_2}{B_1 - B_2} \sin^2 \frac{u-v}{2} + \frac{C_2 - C_3}{B_2 - B_3} \cos^2 \frac{u-v}{2} \right) \right.}{\left(B_3 \sin^2 \frac{u+v}{2} + B_1 \cos^2 \frac{u+v}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{u+v}{2} - \cos^2 \frac{u-v}{2} \right)} \\ \quad \left. + C_1 \cos^2 \frac{u+v}{2} \cdot \sin^2 \frac{u-v}{2} - C_3 \cos^2 \frac{u-v}{2} \cdot \sin^2 \frac{u+v}{2} \right) \end{array} \right.$$

Diese Formeln geben die Absorption beider Wellen in beliebigen Richtungen. Setzt man hinein $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$, $u = v$, so gelangt man zu:

$$2\tau\kappa_o = \frac{C_1}{B_1}, \quad 2\tau\kappa_e = \frac{C_1 \cos^2 u + C_3 \sin^2 u}{B_1 \cos^2 u + B_3 \sin^2 u},$$

d. h. zu den obigen Formeln (19_a) für einaxige Krystalle.

Besondere Wirkungen der Absorption werden in optisch zweiaxigen Krystallen in der unmittelbaren Umgebung der optischen Axen beobachtet. Um die Formeln dafür abzuleiten, will ich eine Richtung betrachten, die den gegen 2χ kleinen Winkel u mit der einen optischen Axe macht und in einer Ebene liegt, die um den Winkel ψ gegen die Ebene XZ d. h. die der optischen Axen geneigt ist. Dabei mag $\psi = 0$ sein, wenn die betrachtete Richtung nach der Z -Axe hin liegt. Da 2χ der Winkel der optischen Axen ist, so folgt:

$$v = 2\chi - u \cos \psi$$

und, wenn man die Quadrate von u vernachlässigt, erhält man aus den Formeln (30) die für Richtungen in der Nähe der einen optischen Axe gültigen:

$$(31) \quad \begin{cases} 2\tau\kappa_o = \frac{[C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)] \cos^2 \frac{\psi}{2} + C_2(B_3 - B_1) \sin^2 \frac{\psi}{2}}{B_2(B_3 - B_1)} \\ 2\tau\kappa_e = \frac{[C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)] \sin^2 \frac{\psi}{2} + C_2(B_3 - B_1) \cos^2 \frac{\psi}{2}}{B_2(B_3 - B_1)} \end{cases}$$

oder in anderer Form:

$$(31_a) \quad \begin{cases} 2B_2\tau\kappa_o = (C_1 \cos^2 \chi + C_3 \sin^2 \chi) \cos^2 \frac{\psi}{2} + C_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ 2B_2\tau\kappa_e = (C_1 \cos^2 \chi + C_3 \sin^2 \chi) \sin^2 \frac{\psi}{2} + C_2 \cos^2 \frac{\psi}{2} \end{cases}$$

Sie ergeben κ_o und κ_e von ψ , nicht aber von u abhängig, und zeigen, dass wenn man aus der XZ -Ebene heraus in einem engen Kreiskegel um die optische Axe herumgeht bis wieder in die XZ -Ebene, κ_o sich ebenso ändert, als κ_e beim Gehen in der entgegengesetzten Richtung.

Für die optische Axe selbst werden diese Formeln unbestimmt, weil dort ψ seine Bedeutung verliert; man muss daher für diese Richtung, welche durch den Index angedeutet werden mag, die Formeln (27) benutzen, welche ergeben, dass der in der XZ -Ebene schwingenden Welle entspricht:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\tau\kappa'_o = \frac{C_2}{B_2} \\ \text{der senkrecht dazu schwingenden:} \\ 2\tau\kappa'_e = \frac{C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)}{B_2(B_3 - B_1)} \end{array} \right.$$

oder auch:

$$(27_a) \quad 2B_2\tau\kappa'_o = C_2, \quad 2B_2\tau\kappa'_e = C_1 \cos^2 \chi + C_3 \sin^2 \chi.$$

Man kann hiernach die Werthe κ für die optischen Axen aus den allgemeinen Ausdrücken (31) erhalten, indem man $\psi = \pi$ setzt.

Für die Discussion bieten sich ausser dem singulären Fall constanter Absorption, für welchen $C_1 = C_2 = C_3 = C$ und daher $2\tau\kappa_o = 2\tau\kappa_e = C/B_2$ ist, besonders die zwei speciellen Fälle, dass in den Gleichungen (31) entweder der erste oder der zweite Factor des Zählers den anderen an Grösse bedeutend übertrifft, sodass man diesen verschwindend setzen kann. Wir unterscheiden sie in folgender Weise:

I. Specialfall: $C_2 = 0$, d. h. die in der Ebene der optischen Axen fortgepflanzte und ihr parallel schwingende Welle wird nur unmerklich absorbirt, wie dies angenähert beim Andalusit stattfindet. Dann ist:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa_o = k \cos^2 \frac{\psi}{2}, \quad \kappa_e = k \sin^2 \frac{\psi}{2} \quad \text{und} \\ k = \frac{C_1(B_3 - B_2) + C_3(B_2 - B_1)}{2\tau B_2(B_3 - B_1)}. \end{array} \right.$$

In der Richtung der optischen Axe ist nach der obigen Regel:

$$\kappa'_o = 0, \quad \kappa'_e = k.$$

II. Specialfall: $C_1 = C_3 = 0$, d. h. die in der Ebene der optischen Axen fortgepflanzte und dazu normal schwingende Welle wird nur unmerklich absorbirt, wie dies für gewisse Farben angenähert beim Epidot der Fall ist.¹⁾ Dann ist:

1) Der Epidot ist zwar nicht rhombisch, sondern monoklinisch, die obigen Entwicklungen sind also nicht streng auf ihn anwendbar. Indessen dürfte es, so lange die Winkel zwischen den Elasticitäts- und Absorptionsaxen nur klein sind, unbedenklich sein, auf ihn zu exemplificiren, zumal wenn es sich nicht um die Aufstellung und Prüfung quantitativer Gesetze handelt.

$$(33) \quad \kappa_o = k \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad \kappa_e = k \cos^2 \frac{\psi}{2} \quad \text{und} \quad k = \frac{C_2}{2\tau B_2},$$

also in der Richtung der optischen Axe:

$$\kappa_o' = k, \quad \kappa_e' = 0.$$

Betrachtet man eine Platte von der Dicke L senkrecht zu einer optischen Axe geschnitten in einer so kleinen Ausdehnung, dass man sie wiederum als Stück einer Kugelschale um die Lichtquelle als Mittelpunkt ansehen kann, im Polarisationsapparat, bezeichnet mit α den Winkel der Schwingungsebene des Polarisators mit der Ebene der optischen Axen, mit β den analogen Winkel für den Analysator, so ist die beobachtete Intensität gegeben durch:

$$(34) \quad J = A^2 \left[\sin^2 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \sin^2 \left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2\kappa_o' l_o} + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \cos^2 \left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2\kappa_e' l_e} + 2 \sin \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \sin \left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) \cos \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) \cos \left(\beta - \frac{\psi}{2} \right) \cos \delta e^{-(\kappa_o' l_o + \kappa_e' l_e)} \right].$$

Hierin ist δ der Gangunterschied der beiden in der durch u und ψ gegebenen Richtung fortgepflanzten Wellen, deren Schwingungsebenen, resp. die Winkel $-(\pi - \psi)/2$ und $\psi/2$ mit der Ebene der optischen Axen machen. Ferner ist kurz gesetzt:

$$L/\tau \omega_o = l_o, \quad L/\tau \omega_e = l_e.$$

In der Richtung der optischen Axe selbst aber gilt, da auch da zwei Componenten in verschiedener Intensität, wenn auch mit gleicher Geschwindigkeit, fortgepflanzt werden:

$$(34_a) \quad J = A^2 \left(\cos \alpha \cos \beta e^{-\kappa_o' l_o} + \sin \alpha \sin \beta e^{-\kappa_e' l_e} \right)^2.$$

Man kann also auch auf die Intensität J die obige Regel anwenden, dass man den für die Richtung der optischen Axen gültigen Werth durch Einführung von $\psi = \pi$, ausserdem von $\delta = 0$ erhält.

Da $\cos \delta$ mit wachsender Entfernung u von der optischen Axe periodisch Maxima und Minima erreicht, so erhält man im allgemeinen helle und dunkle Ringe um die Axen. Der Einfluss der Absorption auf die Erscheinung stellt sich am klarsten heraus, wenn man die Platte so dick nimmt, dass

das Ringsystem verschwindet, indem die in $\cos \delta$ multiplicirte Exponentialgrösse in Formel (34) sehr klein wird.

Dann sind trotzdem die beiden ersten Glieder in (34) beizubehalten, weil ihre Exponenten in gewissen Richtungen sehr klein werden können, der des dritten nach seiner Bedeutung (31) — (33) aber nicht.

Zunächst sei Polarisator und Analysator gekreuzt, also:

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2},$$

dann folgt:

$$J = \frac{A^2}{4} \sin^2(2\alpha - \psi) \left(e^{-2x_o l_o} + e^{-2x_e l_e} \right),$$

oder in derselben Annäherung:

$$(35) \quad J = \frac{A^2}{4} \sin^2(2\alpha - \psi) \left(e^{-x_o l_o} + e^{-x_e l_e} \right)^2,$$

daraus durch Einführung von $\psi = \pi$:

$$(35_a) \quad J' = \frac{A^2}{4} \sin^2 2\alpha \left(e^{-x_o' l_o'} + e^{-x_e' l_e'} \right)^2.$$

Da α der Winkel der einfallenden Schwingungsebene, ψ das Azimuth der betrachteten Richtung gegen die Ebene der optischen Axen ist, so gibt der erste Factor von J die Intensität Null in Ebenen, die durch $\psi = 2\alpha$ defnirt sind, d. h. die für $\alpha = 0$ oder $\pi/2$ (Normallage) in die Ebene der optischen Axen fallen und bei einer Drehung des Krystalles gegen die Schwingungsebene des Polarisators sich doppelt so schnell gegen diesen drehen, bei $\alpha = \pi/4$ (Diagonallage), also normal gegen die Ebene der optischen Axen stehen u. s. f.

Dies sind die gewöhnlichen dunkeln Curven, welche auch durchsichtige Krystalle im Polarisationsapparat zeigen. Doch erscheinen sie in der Richtung der optischen Axen durch die Absorption modificirt, denn Formel (35_a) zeigt, dass sie in der Diagonallage des Krystalles ($\alpha = \pi/4$) dort unterbrochen sind durch eine helle Stelle und nur in der Normallage ($\alpha = 0$ oder $\pi/2$) sich durch die optischen Axen fortsetzen. Diese Erscheinung ist bei vielen Krystallen zu beobachten, die zu schwach absorbiren, um das Folgende auch zu zeigen.

J hängt nämlich auch noch von dem zweiten Factor in

(35) ab, welcher, wie man leicht nachweisen kann, ganz allgemein für alle Werthe der Absorptionsconstanten C

ein Maximum für $\psi = 0$ und π ,

ein Minimum für $\psi = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$

besitzt. Es ergeben sich demnach allgemein für alle Lagen der Krystallplatte im Polarisationsapparat dunkle Büschel in der Richtung normal zur Ebene der optischen Axen. Man erkennt dieselben am deutlichsten, wenn sie in den Raum zwischen die intensiveren Minima fallen, welche durch den ersten Factor gegeben sind, d. h. in der Normallage der Krystallplatte, aber sie sind auch in den anderen Lagen zu bemerken. Sie drehen sich zusammen mit der Krystallplatte.

Die Beobachtung bestätigt diese Schlüsse in allen Einzelheiten. —

Stehen Polarisator und Analysator parallel, so ist $\alpha = \beta$, also unter der Annahme beträchtlicher Dicke der Platte:

$$(36) \quad J = A^2 \left[\sin^4 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2\kappa_o l_o} + \cos^4 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2\kappa_e l_e} \right],$$

in der Richtung der optischen Axe:

$$(36_a) \quad J' = A^2 \left[\cos^4 \alpha e^{-2\kappa_o' l_o'} + \sin^4 \alpha e^{-2\kappa_e' l_e'} \right].$$

Dieser Fall wird am bequemsten mit dem folgenden zusammengefasst, dass entweder der Polarisator oder Analysator beseitigt ist, man z. B. nur eine Turmalinplatte vor oder hinter die Krystallplatte hält. Die Formel hierfür folgt aus (34), indem man den Mittelwerth für alle möglichen Werthe α oder β nimmt, und lautet:

$$(37) \quad J = \frac{A^2}{2} \left[\sin^2 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2\kappa_o l_o} + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\psi}{2} \right) e^{-2\kappa_e l_e} \right],$$

$$(37_a) \quad J' = \frac{A^2}{2} \left[\cos^2 \alpha e^{-2\kappa_o' l_o'} + \sin^2 \alpha e^{-2\kappa_e' l_e'} \right].$$

Die Vergleichung der Gleichungen (36) und (37) zeigt zunächst das Resultat:

Die Erscheinung bei parallelen Polarisationssebenen ist im wesentlichen identisch mit derjenigen, welche man nach Entfernung des Polarisators oder Analysators erhält.

Auch dies merkwürdige Resultat bestätigt die Beobachtung.

Ferner zeigt sich bei näherem Eingehen, dass in diesen Fällen (36) und (37) verschiedenartig absorbirende Krystalle verschiedene Erscheinungen geben.

Wir betrachten demgemäss die beiden Typen Andalusit und Epidot gesondert.

I. Für den Typus Andalusit ist nach (32):

$$\alpha_o = k \cos^2 \frac{\psi}{2}, \quad \alpha_e = k \sin^2 \frac{\psi}{2},$$

also wird, für die zwei Hauptfälle, dass die Ebene des Polarisators parallel oder normal zur optischen Axenebene ist ($\alpha = 0$ oder $= \pi/2$) aus (37) folgen:

$$(38) \quad J_o = \frac{A^2}{2} \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \cos^2 \frac{\psi}{2}} + \cos^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_e k \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right),$$

in der Richtung der optischen Axe aber, falls man k und L hinreichend gross nimmt, um e^{-2kl} neben 1 vernachlässigen:

$$(38_a) \quad J'_o = \frac{A^2}{2}.$$

Ferner analog:

$$(39) \quad J_{\pi/2} = \frac{A^2}{2} \left(\cos^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \cos^2 \frac{\psi}{2}} + \sin^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_e k \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right),$$

$$(39_a) \quad J'_{\pi/2} = 0.$$

II. Für den Typus Epidot ist nach (33):

$$\alpha_o = k \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad \alpha_e = k \cos^2 \frac{\psi}{2},$$

also für dieselben Hauptfälle und unter denselben Voraussetzungen über k und L :

$$(40) \quad J_o = \frac{A^2}{2} \left[\sin^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \sin^2 \frac{\psi}{2}} + \cos^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_e k \cos^2 \frac{\psi}{2}} \right],$$

$$(40_a) \quad J'_o = 0,$$

$$(41) \quad J_{\pi/2} = \frac{A^2}{2} \left[\cos^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_o k \sin^2 \frac{\psi}{2}} + \sin^2 \frac{\psi}{2} e^{-2l_e k \cos^2 \frac{\psi}{2}} \right],$$

$$(41_a) \quad J'_{\pi/2} = \frac{A^2}{2}.$$

Die Vergleichung dieser Formelsysteme (38)—(41) zeigt das weitere durch die Beobachtung bestätigte Resultat:

Die Krystalle, deren Absorption dem Typus Epidot entspricht, verhalten sich, wenn ihre optische Axenebene parallel der Schwingungsebene des Polarisators ist, ebenso, wie die des Typus Andalusit bei gekreuzten Ebenen und umgekehrt.¹⁾

Die beiden Grunderscheinungen selbst wollen wir aus (38) und (39) erschliessen.

Da e^{-lk} neben 1 vernachlässigt wird, so wird für Werthe von ψ nahe gleich 0 die erste Exponentialgrösse zu vernachlässigen sein, für Werthe nahe π die zweite. Für mittlere Werthe werden beide sehr kleine nahe gleiche Werthe besitzen.

Im Falle der Gleichung (38), wo also $\alpha = 0$ ist, nehmen die Factoren der Exponentialgrössen zugleich mit diesen selbst den grössten und kleinsten Werth an, man erhält also einen dunkeln Büschel normal zur Ebene der optischen Axen ($\psi = \pi/2$) und ein helles Feld ihr parallel, welches sich auch durch das Bild der optischen Axe hin fortsetzt.

Im Falle der Gleichung (39), entsprechend $\alpha = \pi/2$, nehmen die Factoren der Exponentialgrössen aber ihr Maximum in denjenigen Richtungen an, wo diese ihr Minimum haben, und umgekehrt; beide wirken sich also entgegen. Infolge dessen wird man mässig dunkle Büschel sowohl normal als parallel zur Ebene der optischen Axen wahrnehmen; das Bild der optischen Axe selbst ist dunkel.

Die erste Erscheinung entspricht ungefähr der im Polarisationsapparat bei gekreuzten Schwingungsebenen erhaltenen, wenn der Krystall in der Diagonallage liegt, die letztere, wenn er in der Normallage liegt. Aber während bei gekreuzten Schwingungsebenen jedes der beiden Bilder bei einer Drehung des Krystalles um 360° viermal auftritt,

1) A. Bertin, Ann. de chim. et de phys. (5) 15. p. 396. 1878.

zeigt es sich bei parallelen Schwingungsebenen oder nach Entfernung des einen polarisirenden Theiles nur zweimal. Auch dies bestätigt das Experiment vollkommen. —

Beobachtet man endlich die Krystallplatten ganz ohne Polarisationsapparat, so gilt die Formel, welche aus (37) durch Bildung des Mittelwerthes für alle α hervorgeht:

$$(42) \quad J = \frac{A^2}{4} (e^{-2\kappa_o l_o} + e^{-2\kappa_e l_e})$$

und falls die eine der beiden in der Richtung der optischen Axen fortgepflanzten Wellen stark, die andere nur unmerklich absorbiert wird, für jene Richtung:

$$(42_a) \quad J' = \frac{A^2}{4}.$$

Diese Formeln geben für alle Gattungen ungleich absorbirender Krystalle dunkle Büschel normal zur Ebene der optischen Axen mit hellen Axenbildern, wie sie bereits von Brewster¹⁾ beobachtet sind und beim Andalusit, Epidot u. a. leicht wahrgenommen werden können, wenn man durch eine geeignet geschnittene Platte nach dem hellen Himmel blickt.

Was die schwachen Ringe anbetrifft, welche man nach Beobachtungen von Bertin²⁾ und anderen um die Richtung der optischen Axen mitunter wahrnehmen kann, auch wenn man durchaus mit natürlichem Lichte arbeitet, so ist ohne weiteres klar, dass sie kein reines Absorptionsphänomen sein können, sondern auf Interferenz beruhen. Dazu ist nöthig, dass auf irgend eine Weise die beiden, den Krystall in derselben Richtung durchlaufenden, senkrecht zu einander polarisirten Wellen aus ursprünglich polarisirtem Lichte entstanden sind und zuletzt auf eine gemeinsame Polarisationssebene zurückgeführt werden, denn bekanntlich kommt unter anderen Umständen keine Interferenz zu Stande. Hr. Mallard³⁾ legt, um dies zu erklären, der Oberflächenschicht der Krystallplatte eine polarisirende Wirkung bei, aber eine solche ist direct nicht nachgewiesen, und daher würde ihre Annahme die Schwierigkeit nicht lösen, sondern

1) Brewster, Phil. Trans. 1. p. 11. 1819.

2) Bertin, l. c. p. 412.

3) S. Mallard, Zeitschr. f. Kryst. 3. p. 646. 1879.

nur verlegen: es wäre dann eben diese polarisirende Wirkung zu erklären.

In vielen Fällen dürfte sich die Erscheinung durch die infolge mehrfacher innerer Reflexion die Platten öfter als einmal durchsetzenden Wellen in folgender Weise erklären.

Da bei jedem Durchgang durch Absorption, und bei jeder Reflexion durch Theilung der Welle eine neue Schwächung eintritt, so genügt es, die Wellen zu betrachten, die nur dreimal die Platte passirt haben, also nächst der direct durchgegangenen die grösste Intensität haben.

Von der direct durchgegangenen ordinären Welle (o), welche ich zunächst betrachte, rühren in dem im Innern im allgemeinen schief reflectirten Licht zwei nahe senkrecht zu einander polarisirte Wellen her, die ich (oo) und (oe) nenne. Sie gewinnen auf dem Rückweg zur ersten Grenze einen Gangunterschied, entsprechend ihrer verschiedenen Geschwindigkeit. Dort werden sie abermals reflectirt und geben vier Componenten nach zwei nahe zu einander senkrechten Polarisationsrichtungen: (ooo), (ooe), (oeo), (oeo). Die erste und dritte, die zweite und vierte, als parallel schwingend, vermögen zu interferiren und geben also zwei senkrechte Componenten:

$$[(ooo) + (oeo)] \text{ und } [(ooe) + (oeo)].$$

Von der direct durchgehenden extraordinären Welle (e) rühren ähnlich zwei Componenten her:

$$[(eoo) + (eeo)] \text{ und } [(eoe) + (eee)];$$

es treten also im ganzen vier Wellen aus.

Im convergenten Licht würde, weil jede dieser Wellen aus zwei Theilen mit einem von der Neigung abhängigen Gangunterschied besteht, jede ein Ringsystem um die optische Axe geben, und zwar die erste und vierte Welle eines, wie es im Polarisationsapparat bei parallelen Nicols, die zweite und dritte eines, wie es bei gekreuzten erhalten werden würde. Absorbirt der Krystall nicht oder doch gleichmässig, so werden sich beide Arten gegenseitig zerstören, auch wenn man einen Polarisator anwendet; absorbirt aber der Krystall ungleich, so werden die verschiedenen Wellen verschiedene Stärke haben und sich demnach nicht völlig neutralisiren,

sondern es wird ein schwaches Ringsystem nach Art des bei parallelen Nicols im Polarisationsapparat auftretenden übrig bleiben, und zwar auch mit jenem gleiche Distanz der Ringe zeigen. Ich habe die Erscheinung nie gesehen, aber nach der Beschreibung Hrn. Bertin's¹⁾ möchte ich glauben, dass die vorstehende Erklärung in den von ihm beobachteten Fällen der Wirklichkeit entspricht. Die Epidotkrystalle, an welchen ich durch die Freundlichkeit Hrn. Prof. C. Klein's die oben entwickelte Theorie der Büschel prüfen konnte, zeigen im natürlichen Licht keine Spur von Ringen, sondern nur wenn ein Polarisator benutzt wird, z. B. wenn man vom Polarisationsapparat den oberen Nicol entfernt. Aber diese Ringe haben bedeutend grössere Abstände als die, welche man nach Anbringung des oberen Nicols wahrnimmt, sie können also nicht durch Interferenz zweier Wellen, die während des Passirens der ganzen Plattendicke verschiedene Geschwindigkeit hatten, hervorgebracht werden. Es erscheint daher wahrscheinlich, dass eine Zwillingslamelle, wie sie Hr. Klein früher schon zur Erklärung angenommen hat, in diesem Falle die Erscheinung verursacht. Diese Annahme wird durch die Beobachtung bestätigt, dass die Präparate die Ringe nur an einzelnen Stellen zeigen.

Ausser diesen Erscheinungen in der Nähe der optischen Axen können noch besondere Folgen der Absorption in der Richtung der Absorptionsaxen, welche beim rhombischen System den Elasticitätsaxen parallel sind, merklich werden, da der Absorptionsindex κ in denselben seinen grössten und kleinsten Werth annimmt. In der That sind in diesen Richtungen helle und dunkle Flecken bemerkt worden.²⁾

Die aus dem Vorstehenden sich ergebende vollständige Uebereinstimmung der theoretischen Resultate mit den Beobachtungen für pleochroitische Krystalle rechtfertigt vielleicht eine kurze Zusammenstellung der Grundlagen der Theorie.

1) A. Bertin, l. c. p. 415.

2) Vgl. A. Bertin, l. c. p. 400.

Ihre eigentlichen Wurzeln sind folgende zwei Hypothesen:

1. Die Medien, die wir als vollkommen durchsichtig bezeichnen, weil sie die Energie periodischer Aetherschwingungen nicht merklich vermindern, verhalten sich ebenso nicht periodischen Aetherbewegungen gegenüber.

2. Die Medien, welche die Energie periodischer Aetherschwingungen durch Absorption vermindern, verhalten sich ebenso nicht periodischen Aetherbewegungen gegenüber.

Aus diesen Hypothesen folgt dann mit Strenge, dass die auf den Aether wirkenden Kräfte nur zwei Hauptgattungen angehören können, entweder:

1. Energie-erhaltende sein müssen, die eine Arbeit liefern, welche der Differentialquotient nach der Zeit sein muss von einer nur durch den augenblicklichen Zustand des Systems bestimmten Function, oder:

2. Energie-vermindernde, welche eine Arbeit liefern, welche eine negative Summe von quadratischen Gliedern darstellt.

Nimmt man hinzu die auf der Beobachtung ruhende Hilfsannahme, dass die Kräfte lineare Functionen der Verschiebungen und ihrer Differentialquotienten sein müssen, so ergeben sich abermals mit Strenge

acht Gattungen Kräfte der ersten,

zwei Gattungen Kräfte der zweiten

Art als möglich, deren unbekannte Coëfficienten bei periodischen Bewegungen als Functionen der Schwingungsdauer zuzulassen sind. Diese Anzahl reducirt sich auf die Hälfte, wenn man verlangt, dass beim Uebergang durch die Grenze zweier Medien die Normalcomponente der Verschiebung beiderseitig streng gleich sein soll. Es scheint nicht, dass eine solche Verfügung beschränkend wirkt, und sie ist demnach von mir vielfach benutzt worden.

Ueber die Natur des Aethers sind drei Annahmen gemacht:

1) dass derselbe als incompressibel,

2) als in allen Körpern gleichartig,

3) als von einer verschwindenden Dichte gegenüber derjenigen der ponderablen Körper zu betrachten sei.

Die letztere führt darauf, dass die ponderablen Moleküle als ruhend einzuführen sind, was ich durch eine besondere Betrachtung noch ausführlicher begründet habe.¹⁾

Als Bedingungen für den Uebergang des Lichtes zwischen zwei Medien sind die Gleichungen der Continuität und das Princip der Erhaltung der Energie in der Form, welche ich als Kirchhoff'sches Princip bezeichnet habe, benutzt.

Die Folgerungen aus diesen Grundlagen sind durch Vergleichen mit den Beobachtungen der verschiedensten Art bestätigt worden.

In der That sind auch die Grundlagen so allgemein, dass man sie kaum wesentlich abändern kann, ohne die Vorstellung der Aetherschwingungen selbst aufzugeben. Damit hängt umgekehrt zusammen, dass die theoretisch möglichen Erscheinungen die beobachteten als specielle Fälle enthalten, zu welchen man durch willkürliche Verfügung über die durch die Theorie unbestimmt gebliebenen Constanten hinabsteigt. Eine Beseitigung dieser Willkür durch Aufsuchung einer Vorstellung, welche die der Beobachtung entsprechenden Verfügungen physikalisch nothwendig erscheinen lässt, würde in einer Hinsicht eine Vervollkommnung der Theorie bedeuten; andererseits freilich würde sie durch die dazu nöthige Specialisirung und Ausbildung der Hypothesen die Sicherheit des Untergrundes beeinträchtigen.

Göttingen, Juli 1884.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 23. p. 554. 1884.