RIVISTA BIBLIOGRAFICA

SERIE ORDINATE PER FATTORIALI INVERSI.

(SCHLOEMILCH, ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK, 1859, 6 Heft.)

1. Eulero diede nel suo Calcolo integrale (*) la formola

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{-\frac{m+n-\mu}{n}} (A + Bx^n + Ca^{2n} + Dn^{3n} + \dots) dx$$

$$= \left[A + B \frac{m}{\mu} + C \frac{m(m+n)}{\mu(\mu+n)} + D \frac{m(m+n)(m+2n)}{\mu(\mu+n)(\mu+2n)} + \dots \right] \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{-\frac{m+n-\mu}{n}} dx,$$

da cui, come osservò il Binet (**), si deduce la somma di molte serie ipergeometriche: se ne deducono pure le serie considerate dal Sig. Schloemilch che procedono per termini proporzionali ai valori reciproci de' fattoriali $z(z+1)(z+2)\dots(z+m)$, e servono ad esprimere funzioni $\varphi(z)$ determinate da equazioni della forma

$$\varphi(z) = \int_0^1 (1-t)^{z-1} f(t) dt, \quad \varphi(z) = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^{z-1}}{t} f(t) dt,$$

$$\varphi(z) = \int_0^1 \int_a^b (1-t)^{z-1} f(t, v) dt dv,$$

dove z è positivo e $f(t)$, $f(t, v)$ rappresentano funzioni che si possono svolgere in serie ordinate per le potenze intere e positive di t . Così rispetto alla prima espressione di $\varphi(z)$ basterà prendere nella formola d'Eulero

$$m = 1, n = 1, \mu = z + 1, A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots = f(x).$$

Ma il Sig. Schloemilch entra in particolari interessanti relativamente alla forma e ai limiti del resto o termine completo delle accennate serie: ad una formola di questa specie giungeremo prontamente ponendo

(*) Vol. I. Sez. I, pag. 247 (Petropli, 1768).

(**) Journal de l'école Polytechnique, 27: cahier.

$$\int_{\alpha}^1 (1-\alpha)^{z-1} f(\alpha) d\alpha = \frac{(1-\alpha)^z f(\alpha)}{z} + \frac{(1-\alpha)^{z+1} f'(\alpha)}{z(z+1)} + \frac{(1-\alpha)^{z+2} f''(\alpha)}{z(z+1)(z+2)} + \dots$$

$$+ \frac{(1-\alpha)^{z+n-1} f^{(n-1)}(\alpha)}{z(z+1) \dots (z+n-1)} + R_n,$$

talchè per $\alpha = 1$ sarà $R_n = 0$, e differenziando tutti i termini rispetto ad α , e riducendo se ne dedurrà

$$0 = \frac{(1-\alpha)^{z+n-1} f^{(n)}(\alpha)}{z(z+1) \dots (z+n-1)} + \frac{dR_n}{d\alpha},$$

donde

$$R_n = \frac{1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_{\alpha}^1 (1-\alpha)^{z+n-1} f^{(n)}(\alpha) d\alpha.$$

Posto infine $\alpha = 0$, risulterà

$$(1) \quad \int_0^1 (1-\alpha)^{z-1} f(\alpha) d\alpha = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z(z+1)} + \frac{f''(0)}{z(z+1)(z+2)} + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(0)}{z(z+1) \dots (z+n-1)} + \frac{1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 (1-\alpha)^{z+n-1} f^{(n)}(\alpha) d\alpha.$$

2. Per prima applicazione il Sig. Schlömilch trova l'identità facile a dimostrarsi (*)

$$(2) \quad \frac{1}{x+\alpha} = \frac{1}{x} - \frac{\alpha}{x(x+1)} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{x(x+1)(x+2)} - \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+2)}{x(x+1) \dots (x+n-1)} + (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \frac{1}{x+\alpha}.$$

Da ciò, moltiplicando per $t^{\mu-1} e^{-kt} dt$, e integrando, deduce una espressione della funzione

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x+\alpha} t^{\mu-1} e^{-kt} dt$$

nei due casi di $\alpha = t$, e $\alpha = -t\sqrt{-1}$: x, μ e k sono numeri positivi. Posto

$$Q_0 = \int_0^{\infty} t^{\mu-1} e^{-kt} dt, \quad Q_n = - \int_0^{\infty} \alpha(1-\alpha)(2-\alpha) \dots (n-1-\alpha) t^{\mu-1} e^{-kt} dt,$$

$$R_n = - \int_0^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha) \dots (n-1-\alpha)}{x+\alpha} t^{\mu-1} e^{-kt} dt,$$

(*) Annali di scienze mat. e fisiche 1854, pag. 151.

si avrà

$$\varphi(x) = \frac{Q_0}{x} + \frac{Q_1}{x(x+1)} + \frac{Q_2}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$

$$+ \frac{Q_{n-1}}{x(x+1) \dots (x+n-1)} + \frac{R_n}{x(x+1) \dots (x+n-1)}.$$

Ora nel caso di $\alpha = t$, ogni differenza $m - \alpha$ è numericamente minore di $m + \alpha$, e però $(m - \alpha)^2$ è minore numericamente di $m^2 - \alpha^2$, ossia $m^2 - t^2$, onde

$$\left(\frac{(1 - \alpha)(2 - \alpha) \dots (n - 1 - \alpha)}{1 \cdot 2 \dots (n - 1)} \right)^2$$

è minore numericamente del prodotto

$$(1 - t^2) \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \left(1 - \frac{t^2}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{t^2}{(n-1)^2}\right)$$

il quale crescendo n indefinitamente ha per limite $\frac{\text{sen } \pi t}{\pi t}$, quantità non superiore ad 1 : dunque il termine complessivo

$$\frac{R_n}{x(x+1) \dots (x+n-1)}$$

avrà zero per limite, poichè il limite dell'espressione

$$\frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \int_0^\infty \frac{t}{x+t} t^{n-1} e^{-ht} dt$$

manifestamente è zero quando si suppone x positivo. Nel caso di $\alpha = -t\sqrt{-1}$, il modulo dell'espressione immaginaria

$$\frac{(1 - \alpha)(2 - \alpha) \dots (n - 1 - \alpha)}{1 \cdot 2 \dots (n - 1)}$$

sarà

$$\sqrt{(1 + t^2) \left(1 + \frac{t^2}{4}\right) \left(1 + \frac{t^2}{9}\right) \dots \left(1 + \frac{t^2}{(n-1)^2}\right)}$$

che cresce con n e per n infinito eguaglia

$$\sqrt{\frac{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}{2\pi t}} \quad \text{ossia} \quad e^{\frac{1}{2}\pi t} \sqrt{\frac{1 - e^{-2\pi t}}{2\pi t}};$$

quindi chiamato θ l'argomento della medesima espressione, il limite del termine

$$\frac{R_n}{x(x+1) \dots (x+n-1)}$$

non eccederà quello di

$$\frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \int_0^\infty \sqrt{\frac{1-e^{-2\pi t}}{2\pi t}} \frac{ie^{ti}}{x-ti} t^\mu e^{-(k-\frac{\pi}{2})t} dt$$

dove $i = \sqrt{-1}$: ma quest'ultimo integrale ha senza dubbio un valore finito se si prende $k > \frac{1}{2}\pi$, restando sempre x positivo, e però l'accennato limite è allora zero. Adunque avremo per $\varphi(x)$ in ambedue i casi una serie convergente.

Negli stessi due casi abbiamo

$$\frac{x}{x+\alpha} = z \int_0^\infty e^{-(t+z)u} du,$$

se supponiamo $z = x$ nel primo caso, e $z = xi$ nel secondo, e ne risulta

$$\varphi(x) = \frac{z}{x} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zu} e^{-(k+u)t} t^{\mu-1} dt du = \frac{z}{x} \Gamma(\mu) \int_0^\infty e^{-zu} (k+u)^{-\mu} du:$$

poscia fatto $k+u = \frac{v}{x}$, otterremo nel primo caso

$$\varphi(x) = \Gamma(\mu) x^{\mu-1} e^{kx} \int_{kx}^\infty \frac{1}{v^\mu} e^{-v} dv,$$

e nel secondo

$$\varphi(x) = \Gamma(\mu) ix^{\mu-1} e^{kxi} \int_{kxi}^\infty \frac{1}{v^\mu} e^{-vi} dv.$$

Pertanto avremo gl'integrali

$$\int_v^\infty \frac{1}{v^\mu} e^{-v} dv, \quad \int_v^\infty \frac{1}{v^\mu} e^{-vi} dv$$

svolti in serie convergenti di fattoriali reciproci. Prendendo $\mu=1$, $\mu = \frac{1}{2}$ si avranno formole per calcolare valori approssimati de' *logaritmi integrali*, de' *seni e coseni integrali*, del trascendente Krampiano $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$; si avrà pure una formola utile pel calcolo dell'integrale trattato da Legendre (*)

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_0^x \left(\log \frac{1}{u} \right)^{\alpha-1} du,$$

(*) *Traité des fonctions elliptiques*, Tom. II, chap. XVII.

poichè facendo

$$u = e^{-v}, \quad x = e^{-y}$$

si trova

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty v^{\alpha-1} e^{-v} dv,$$

e questo integrale è compreso nei precedenti se l'esponente $\alpha - 1$ è negativo al qual caso si riducono tutti gli altri.

3. La formola (2) è compresa in un'altra più generale data da Nicole (*), che si deduce dall'identità

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a-x} + \frac{b+x}{(a-x)(a-b)} :$$

ponendo successivamente

$$x = 0, \quad x = c, \quad x = d, \dots$$

moltiplicando le trasformate ordinatamente per

$$1, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{b(b+c)}{a(a+c)}, \quad \frac{b(b+c)(b+d)}{a(a+c)(a+d)}, \dots,$$

e sommando i prodotti, fatte le riduzioni si trova

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-b} &= \frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+c)} + \frac{b(b+c)}{a(a+c)(a+d)} + \dots \\ &+ \frac{b(b+c)(b+d) \dots (b+p)}{a(a+c)(a+d) \dots (a+p)(a+q)} + \frac{b(b+c)(b+d) \dots (b+p)(b+q)}{a(a+c) \dots (a+p)(a+q)(a-b)}. \end{aligned}$$

Questa formola si cambia nella (2) se si fa

$$a = x, \quad b = -x, \quad c = 1, \quad d = 2, \quad e = 3, \dots;$$

facendovi

$$a = 2n+3, \quad b = 2n+2, \quad c = 2, \quad d = 4, \quad e = 6, \dots,$$

e moltiplicando per $2n$ si ottiene

$$2n = \frac{2n}{2n+3} + \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2n+2}{2n+5} + \frac{2n}{2n+3} \cdot \frac{2n+2}{2n+5} \cdot \frac{2n+4}{2n+7} + \dots,$$

e alla medesima equazione si giunge per mezzo della formola (2) prendendo

$$x = \frac{2n+3}{2}, \quad \alpha = -\frac{2n+2}{2}.$$

(*) Mém. Acad. des Sciences de Paris pour 1727, pag. 257. — Annales de Math. par Gergonne, T. V, pag. 149.

Il Sig. Sarrus che la trovò per altra via e pel solo caso di n intero e positivo la qualificava come un « résultat remarquable, qu'il serait peut-être difficile d'obtenir *a priori* et qui peut faciliter les réductions dans certains calculs; » e il Sig. Gergonne aggiungeva: « il serait curieux de savoir si cette formule aurait également lieu pour une valeur fractionnaire ou négative de n » (*). Avendo nella formola di Nicole anche il termine completivo della serie, si potrà giudicare per quali valori di n la serie sia convergente.

Se si svolgano i due membri dell'equazione (2) per le potenze ascendenti di α , il che sarà permesso ogniquale volta il valor numerico di α sia inferiore a quello di x , il paragone dei termini contenenti una stessa potenza darà un'equazione identica che servirà a trasformare in serie di fattoriali reciproci qualsivoglia delle potenze

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x^3}, \quad \frac{1}{x^4}, \dots,$$

ed è facile vedere che nel caso di x positivo tutte queste serie saranno convergenti. Infatti supponiamo α negativo e cambiamolo in $-\alpha$: l'ultimo termine della formola (2) diverrà

$$\frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \frac{1}{x-\alpha},$$

che uguaglia la quantità costante $\frac{\alpha}{x(x-\alpha)}$ divisa pel prodotto

$$\frac{x+1}{\alpha+1} \cdot \frac{x+2}{\alpha+2} \dots \frac{x+n-1}{\alpha+n-1} = \left(1 + \frac{x-\alpha}{\alpha+1}\right) \left(1 + \frac{x-\alpha}{\alpha+2}\right) \dots \left(1 + \frac{x-\alpha}{\alpha+n-1}\right)$$

evidentemente maggiore di

$$1 + (x-\alpha) \left(\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} + \dots + \frac{1}{\alpha+n-1} \right)$$

e però di

$$1 + (x-\alpha) \left(\log \frac{\alpha+2}{\alpha+1} + \log \frac{\alpha+3}{\alpha+2} + \dots + \log \frac{\alpha+n}{\alpha+n-1} \right) = 1 + (x-\alpha) \log \frac{\alpha+n}{\alpha+1},$$

essendo

$$\log \left(1 + \frac{1}{\alpha+m} \right) < \frac{1}{\alpha+m};$$

così quell'ultimo termine sarà minore di

(*) Annales de Mathém. par Gergonne, tom. X, pag. 222.

$$\frac{\alpha}{x \left(1 + (x + \alpha) \log \frac{\alpha + n}{\alpha + 1} \right) (x - \alpha)}$$

e crescendo n in infinito avrà per limite zero. Ma il medesimo termine è la somma dei termini completivi di tutte le accennate serie moltiplicati per $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$: dunque ciascuno di questi termini completivi dovrà aver per limite zero.

Se α si fa positivo nella formola (2), l'ultimo termine di essa può risolversi in tre fattori :

$$1^\circ \quad \frac{\alpha}{x(x + \alpha)}$$

che è costante,

$$2^\circ \quad \frac{1 \cdot 2 \dots (n - 1)}{(x + 1)(x + 2) \dots (x + n - 1)}$$

che tende ad annullarsi, mentre n cresce, poichè dalla dimostrazione precedente si trae ch'esso è minore di $\frac{1}{1 + x \log n}$;

$$3^\circ \quad \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n + 1)}{1 \cdot 2 \dots (n - 1)} (-1)^n,$$

che tende pure ad annullarsi, poichè chiamato k un numero intero maggiore di α e minore di n , possiamo riguardarlo come il prodotto della funzione costante

$$\frac{(1 - \alpha)(2 - \alpha) \dots (k - \alpha)}{1 \cdot 2 \dots k}$$

per l'altra frazione

$$\frac{(k - \alpha + 1)(k - \alpha + 2) \dots (k - \alpha + m - 1)}{(k + 1)(k + 2) \dots (k + m - 1)}$$

ove si è fatto $m = n - k$, e questa seconda frazione sarà minore di

$$\frac{1}{1 + \alpha \log \frac{n}{k + 1}}$$

e quindi decrescerà indefinitamente : adunque per x e α positivi l'equazione (2) trasformerà $\frac{1}{x + \alpha}$ in una serie convergente anche se sia $\alpha > x$, e la convergenza sarà più rapida che non suppone il Sig. Schlömilch il quale considera il terzo fattore dell'ultimo termine come inferiore all'unità, ma non come infinitesimo.

Ponendo $x = 1$, e moltiplicando per $1 + \alpha = m$, si trae dalla stessa equazione (2)

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

che sussisterà finchè α sarà compreso tra -1 e $+\infty$, e quindi per tutti i valori positivi di m .

4. La trasformazione delle potenze $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots$ in serie di fattoriali si ottiene anche facendo

$$u = \frac{1}{x}, \quad h = \Delta x = 1$$

nella formola simbolica

$$h^2 D^n u = [\log(1 + \Delta)]^n u,$$

e altra volta ho notato (*) che in questa formola il coefficiente di $\Delta^n u$ eguaglia il valore di $\frac{d^n A_m}{d\alpha^n}$ per $\alpha = 0$, se pongasi

$$A_m = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m}.$$

Altre formole simboliche furono indicate nello stesso luogo e dal Cauchy nei *Comptes rendus* (**) come atte a svolgere le funzioni per serie di fattoriali inversi; il Cauchy vi diede la formola simbolica

$$\int_0^\infty e^{-tx} f[k(1-e^{-t})] dt = f(-k\Delta) \frac{1}{x},$$

che suppone $\Delta x = 1$, e che equivale alla precedente formola (1). Binet (***) ampliò la formola d'Eulero riferita al num.º 1, ed esaminò la convergenza delle serie ordinate secondo gl'integrali Euleriani $B(p+i, q)$. Quanto alla convergenza, giova spesso a farla riconoscere speditamente il principio per cui integrando una serie che resta convergente fra i limiti dell'integrazione si ottiene una serie pur convergente.

Ho dato eziandio i termini completivi delle accennate formole simboliche, e le due equazioni (****)

$$\int_0^1 f(z + h\alpha) d\alpha = f(z) + \alpha_1 \Delta f(z) + \alpha_2 \Delta^2 f(z) + \dots + \alpha_n \Delta^n f(z) + R_n,$$

$$\frac{1}{h} \int_0^1 F(z + h\alpha) d\alpha = \frac{1}{h} F(z) + \frac{1}{2h} \Delta F(z) + \rho_1 \Delta u + \rho_2 \Delta^2 u + \dots + \rho_n \Delta^n u + S_n,$$

(*) Annali di sc. mat. e fis. 1855, pag. 87.

(**) Ivi, pag. 72, 88; Comptes rendus de l'Accadémie des Sciences, tom. 39, pag. 129, 169, 214.

(***) Journal de l'Ecole Polytechnique, 27 cahier, pag. 307; ivi pag. 140 e 271.

(****) Annali di sc. matem. e fisiche, 1855, pag. 76 e 80.

dove

$$\Delta z = h, \quad \alpha_m = \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} d\alpha, \quad R_n = \int_0^1 \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{1 \cdot 2 \dots n} (\Delta^n R) d\alpha,$$

$$R = \frac{f(z+ha) - f(z)}{h\alpha}, \quad u = \frac{dF(z+ah)}{dz},$$

$$\rho_m = (-1)^m \int_0^1 \frac{(\alpha+a-1)(\alpha+a)\dots(\alpha+a+m-2)}{1 \cdot 2 \dots m} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) d\alpha,$$

$$S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{(\alpha+a-1)(\alpha+a)\dots(\alpha+a+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n} \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) (\Delta^n S) d\alpha,$$

$$S = \frac{F'(z+ah) - F'(z-h\alpha+h)}{h(\alpha+a-1)}, \quad F'(z) = \frac{dF(z)}{dz},$$

a indica una quantità scelta ad arbitrio, e le differenze $\Delta^n R$, $\Delta^n S$ debbono esser prese rispetto ad α e z nel medesimo tempo, supponendo $\Delta z = h$, e $\Delta \alpha = -1$. Prendendo per $f(z)$ o $F(z)$ l'integrale

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-zu}}{1 - e^{-u}} f(u) du,$$

e supponendo $z > 0$, $h = 1$, si otterranno trasformazioni della sommatoria $\sum \varphi(z)$ nell'ipotesi di

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zu} f(u) du,$$

poichè si avrà

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \varphi(z),$$

e non si cadrà nell'ambiguità che nasce dalle funzioni periodiche arbitrarie quando si passa da una differenza finita al suo integrale. Ma pei casi particolari della funzione $\varphi(z)$ trattati dallo Schloemilch sarà più spedito far uso della formola (1).

Sia

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-zu}}{1 - e^{-u}} du,$$

e però $\varphi(z) = \frac{1}{z}$: essendo

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-zu}}{u} du = \log z, \quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-u}} - \frac{1}{u} \right) e^{-u} du = C,$$

dove C indica la *costante Mascheroniana*, avremo

$$\sum \frac{1}{z} = C + \log z - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-u}} - \frac{1}{u} \right) e^{-zu} du ,$$

e facendo $e^{-u} = 1 - \alpha$, ne dedurremo

$$\sum \frac{1}{z} = C + \log z - \int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} \right) (1 - \alpha)^{z-1} d\alpha ,$$

cosicchè posto

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} = f(\alpha) ,$$

la formola (1) darà una trasformazione della funzione

$$\sum \frac{1}{z} = C + \log z$$

in serie di fattoriali reciproci. Il termine complessivo sarà

$$- \frac{1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 (1 - \alpha)^{z+n-1} D^n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} \right) d\alpha ,$$

che rappresenteremo con

$$- \frac{\rho_n}{z(z+1) \dots (z+n-1)} .$$

Ma si ha in serie convergente

$$- \frac{\alpha}{\log(1 - \alpha)} = \int_0^1 (1 - \alpha)^v dv = 1 - h_0 \alpha - \frac{h_1}{1} \alpha^2 - \frac{h_2}{1.2} \alpha^3 - \frac{h_3}{1.2.3} \alpha^4 - \dots ,$$

ove

$$h_m = \frac{1}{m+1} \int_0^1 v(1-v)(2-v) \dots (m-v) dv ,$$

sicchè i coefficienti h_m sono tutti positivi: quindi

$$D^n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} \right) > D^n \left(h_0 + \frac{h_1}{1} \alpha + \frac{h_2}{1.2} \alpha^2 + \dots + \frac{h_n}{1.2 \dots n} \alpha^n \right) = h_n ,$$

e però

$$\rho_n > h_n \int_0^1 (1 - \alpha)^{z+n-1} d\alpha , \quad \text{ossia} \quad \rho_n > \frac{h_n}{z+n} .$$

Avremo pure

$$D^n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\log(1 - \alpha)} \right) = h_n + \frac{h_{n+1}}{1} \alpha + \frac{h_{n+2}}{1.2} \alpha^2 + \frac{h_{n+3}}{1.2.3} \alpha^3 + \dots ,$$

onde sostituendo e integrando dedurremo

$$\rho_n = \frac{1}{z+n} \left(h_n + \frac{h_{n+1}}{z+n+1} + \frac{h_{n+2}}{(z+n+1)(z+n+2)} + \dots \right),$$

e quindi

$$\rho_n < \frac{1}{z+n} \left(h_n + \frac{h_{n+1}}{n+1} + \frac{h_{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \dots \right),$$

ossia

$$\rho_n < \frac{1}{z+n} \int_0^1 v(1-v) \dots (n-v) \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n-v+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{(n-v+1)(n-v+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right) dv;$$

dalla formola (2) si vede che la serie contenuta in questa espressione ha per somma

$$\frac{1}{n+1 - (n-v+1)} = \frac{1}{v},$$

dunque fatto

$$g_n = \int_0^1 (1-v)(2-v) \dots (n-v) dv, \quad \text{sarà} \quad \rho_n < \frac{g_n}{z+n};$$

ed è chiaro (num° 3) che la frazione

$$\frac{(1-v)(2-v) \dots (n-v)}{(z+1)(z+2) \dots (z+n)}$$

decresce indefinitamente al crescere di n , e che per conseguenza anche l'indicato termine completivo avrà per limite zero.

Sia poi

$$\psi(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-u} - e^{-zu}}{1 - e^{-u}} u du,$$

e così $\varphi(z) = \frac{1}{z^2}$: facendo $e^{-u} = 1 - \alpha$, avremo

$$\sum \frac{1}{z^2} = - \int_0^1 \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha} d\alpha + \int_0^1 (1-\alpha)^{z-1} \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha} d\alpha,$$

e sostituendo

$$f(\alpha) = \frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}$$

nella formola (1) otterremo una serie che avrà per termine completivo

$$\frac{\rho_n}{z(z+1) \dots (z+n-1)},$$

posto

$$\rho_n = \int_0^1 (1-\alpha)^{z+n-1} D^n \left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha} \right) d\alpha.$$

Ma

$$\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^3}{4} + \dots,$$

onde

$$D^n \left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha} \right) > D^n \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \dots + \frac{\alpha^n}{n+1} \right) = \frac{1 \cdot 2 \cdot n}{n+1},$$

$$D^n \left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha} \right) < D^n \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \dots \right)$$

$$= D^n (1 - \log(1-\alpha)) = \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{(1-\alpha)^n};$$

quindi sostituendo

$$\frac{1 \cdot 2 \dots n}{(n+1)(z+n)} < \rho_n < \frac{1 \cdot 2 \dots (n-1)}{z}$$

e ne risulta che il termine completo è nullo per n infinito.

Finalmente si debba svolgere la funzione

$$\log \Gamma(z) = \sum \log z :$$

abbiamo (*)

$$(3) \quad \begin{cases} \log \Gamma(z) = \frac{1}{2} i \log 2\pi + \left(z - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \mu(z), \\ \mu(z) = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\log(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\log(1-\alpha)} \right) (1-\alpha)^{z-1}; \end{cases}$$

per maggiore generalità cambieremo nella formola (1) z in $z+a$, e porremo

$$f(\alpha) = \frac{(1-\alpha)^{-a}}{\log(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\log(1-\alpha)} \right),$$

indi facendo

$$\rho_n = \int_0^1 (1-\alpha)^{z+a+n-1} D^n \cdot \frac{(1-\alpha)^{-a}}{\log(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\log(1-\alpha)} \right) d\alpha$$

avremo per termine completo

$$\frac{\rho_n}{z(z+1) \dots (z+n-1)}.$$

(*) Annali di sc. mat. e fis. 1855, pag. 83-84.

Ora

$$\frac{(1-\alpha)^{-a}}{\log(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\log(1-\alpha)} \right) = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (1-\alpha)^{v-a} \left(\frac{1}{2} - v \right) dv$$

$$= k_0 + \frac{k_1}{1} \alpha + \frac{k_2}{1.2} \alpha^2 + \frac{k_3}{1.2.3} \alpha^3 + \dots,$$

ove

$$k_m = \frac{1}{m+1} \int_0^1 (a-v)(a-v+1) \dots (a-v+m) \left(\frac{1}{2} - v \right) dv,$$

e questa serie sarà convergente a causa di $0 < \alpha < 1$; di più supposto a non minore di 1, i coefficienti k_m saranno positivi, poichè fatto $v = 1 - t$, si ha

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (a-v)(a-v+1) \dots (a-v+m) \left(\frac{1}{2} - v \right) dv$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} (a-1+t)(a+t) \dots (a+m-1+t) \left(\frac{1}{2} - t \right) dt,$$

e quindi

$$(m+1)k_m = \int_0^{\frac{1}{2}} \left((a-t)(a-t+1) \dots (a-t+m) - (a-1+t)(a+t) \dots \right. \\ \left. (a+m-1+t) \right) \left(\frac{1}{2} - t \right) dt,$$

dove sarà

$$\frac{1}{2} > t, \quad a-t > a-1+t, \quad a-t+1 > a+t, \dots$$

$$a-t+m > a+m-1+t:$$

dunque avremo

$$D^n f(\alpha) > D^n \left(\frac{k_n}{1.2 \dots n} \alpha^n \right) = k_n,$$

e quindi

$$\rho_n > \frac{k_n}{z+a+n}.$$

Si ha pure

$$D^n f(\alpha) = k_n + \frac{k_{n+1}}{1} \alpha + \frac{k_{n+2}}{1.2} \alpha^2 + \dots,$$

e sostituendo

$$\rho_n = \frac{k_n}{z+a+n} + \frac{k_{n+1}}{(z+a+n)(z+a+n+1)}$$

$$+ \frac{k_{n+2}}{(z+a+n)(z+a+n+1)(z+a+n+2)} + \dots,$$

il che riproduce i termini della serie compresi nel resto della medesima. Ora essendo

$$\frac{1}{m+1} < \frac{1}{z+a+m+1} \left(1 + \frac{z+a}{n+1}\right),$$

quando $m > n$, ne seguirà

$$\begin{aligned} \rho_n &< \frac{1}{z+a+n} \left(1 + \frac{z+a}{n+1}\right) \int_0^1 (a-v)(a-v+1) \dots \\ &(a-v+n) \left(\frac{1}{2} - v\right) \left(\frac{1}{z+a+n+1} + \frac{a-v+n+1}{(z+a+n+1)(z+a+n+2)}\right. \\ &\left. + \frac{(a-v+n+1)(a-v+n+2)}{(z+a+n+1)(z+a+n+2)(z+a+n+3)} + \dots \right) dv, \end{aligned}$$

ossia per la formola (2)

$$\rho_n < \frac{1}{z+a+n} \left(1 + \frac{z+a}{n+1}\right) \int_0^1 (a-v)(a-v+1) \dots (a-v+n) \left(\frac{1}{2} - v\right) \frac{dv}{z+v}.$$

Se si suppone $a = 0$, che è il caso considerato dallo Schlömilch, si avrà

$$k_0 = \frac{1}{12}, \quad k_1 = 0, \quad \text{e} \quad k_2, \quad k_3, \quad \dots$$

saranno tutti negativi, come trovò il Binet (*), poichè

$$\begin{aligned} -(m+1)k_m &= \int_0^1 t(1-t) \left(\frac{1}{2} - t\right) \left((2-t)(3-t) \dots \right. \\ &\left. (m-t) - (1+t)(2+t) \dots (m-1+t)\right) dt; \end{aligned}$$

quindi cambiando k_m in $-k_m$ per $m > 1$, e ρ_n in $-\rho_n$, avremo

$$\rho_n > \frac{k_n}{z+n},$$

e

$$\rho_n = \frac{k_n}{z+n} + \frac{k_{n+1}}{(z+n)(z+n+1)} + \frac{k_{n+2}}{(z+n)(z+n+1)(z+n+2)} + \dots$$

onde risulterà

$$\begin{aligned} \rho_n &< \frac{1}{z+n} \int_0^1 v(1-v) \dots (n-v) \left(\frac{1}{2} - v\right) \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n-v+1}{(n+1)(n+2)}\right. \\ &\left. + \frac{(n-v+1)(n-v+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right) dv, \end{aligned}$$

(*) Journal de l'École Polyt. 27 cahier, pag. 235.

ossia

$$\rho_n < \frac{1}{z+n} \int_0^1 (1-v)(2-v) \dots (n-v) \left(\frac{1}{2} - v\right) dv,$$

o ancora

$$\rho_n < \frac{1}{z+n} \left(\frac{1}{2} g_n - (n+1) h_n \right).$$

I limiti superiori che abbiám trovati pei resti delle ultime due serie $\sum \frac{1}{z^2}$ e $\sum \log z$, sono più approssimati di quelli dello Schlömilch.

È noto che le serie esprimenti $\sum \log z$ sono dovute al Binet e furono dimostrate in più modi (*): la trasformazione di $\sum \frac{1}{z}$ fu data da Lagrange, quella di $\sum \frac{1}{z^2}$ dal signor Sarrus, e il Binet svolse anche $\sum \frac{1}{z^3}$, $\sum \frac{1}{z^4}$, ..., con formole che si traggono dall'equazione simbolica

$$\sum D^n \frac{1}{z} = \sum \left(\log(1 + \Delta) \right)^n \frac{1}{z}. \quad (**)$$

Se nella formola (1) poniamo

$$f(\alpha) = (1 + \alpha)^{m-1},$$

avremo per termine completo

$$\begin{aligned} & \frac{(m-1)(m-2) \dots (m-n)}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 (1-\alpha)^{z+n-1} (1+\alpha)^{m-n-1} d\alpha \\ & < \frac{(m-1)(m-2) \dots (m-n)}{z(z+1) \dots (z+n)}, \end{aligned}$$

fatta astrazione dal segno, e supposto $n > m-1$, poichè allora

$$(1 + \alpha)^{m-n-1} < 1:$$

questo termine avrà dunque per limite zero (num. 3) quando m sia $> -z$ e $z > 0$; dunque sotto queste condizioni sarà convergente la serie seguente

$$\int_0^1 (1-\alpha)^{z-1} (1+\alpha)^{m-1} d\alpha = \frac{1}{z} + \frac{m-1}{z(z+1)} + \frac{(m-1)(m-2)}{z(z+1)(z+2)} + \dots$$

(*) Binet, ivi; Cauchy, Exercices d'Analyse, tom. II, e Comptes rendus del 1854; Bulletins de l'Acad. Roy. de Belgique, tom. XX.

(**) Mem. Accad. di Berlino pel 1772; Annales de Math. per Gergonne, tom. X, pag. 226; Comptes rendus, tom. XXVII, pag. 201; Annali di sc. mat. e fis. 1855, pag. 88.

Nel caso particolare di $z = 1$ il primo membro diventa $\frac{2^m - 1}{m}$, e da ciò risulta esser convergente per $m > -1$ la serie Newtoniana che esprime 2^m , argomento trattato non ha guari dal signor Catalan nei *Comptes rendus* (*).

5. Il signor Schlömilch è riuscito a trasformare in serie di fattoriali reciproci non solo $\log \Gamma(z)$ ma $\Gamma(z)$. Si ha

$$\Gamma(p) = p^p \int_0^\infty (ze^{-z})^p dz ;$$

donde posto $z = 1 + y$ si trae

$$\Gamma(p) = \frac{p^p}{e^p} \int_0^\infty [(1 + y)e^{-y}]^p dy .$$

Qui si ricorre alla sostituzione

$$(1 + y)e^{-y} = 1 - x^2$$

che è un caso particolare dell'altra

$$(1 + y)e^{-y} = \left(1 - \frac{x^2}{\rho}\right)^\rho$$

in cui è compresa anche la sostituzione di Laplace

$$(1 + y)e^{-y} = e^{-x^2}$$

corrispondente a $\rho = \infty$: si potrà scrivere

$$y = x \sqrt{\frac{y^2}{1 - (1 + y)e^{-y}}} = x f(y) ,$$

all'intervallo da $y = -1$ ad $y = \infty$, corrisponderà l'intervallo da $x = -1$ ad $x = +1$, e se ne dedurrà la serie

$$y = \frac{a_1}{1} x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \dots ,$$

che per un noto teorema di Cauchy sarà convergente finchè il modulo di x non ecceda il più piccolo di quelli per cui l'equazione $y = x f(y)$, e la sua derivata $1 = x f'(y)$ acquistano una radice comune ; si troverà che queste non hanno radici comuni se non sia $e^{-y} = 0$, e quindi $y = \infty$, cosicchè per tutti i valori di x compresi tra -1 e $+1$ la serie resterà convergente. Avrem dunque

(*) *Comptes rendus*, tom. XLV, pag. 621; *Cours d'Analyse* par M. Sturm, tom. II, pag. 326.

$$\begin{aligned}\Gamma(p) &= \frac{p^p}{e^p} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^p \left(a_1 + \frac{a_2}{1} x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \dots \right) dx \\ &= \frac{2p^p}{e^p} \int_0^1 (1-x^2)^p \left(a_1 + \frac{a_3}{1.2} x^2 + \frac{a_5}{1.2.3.4} x^4 + \dots \right) dz\end{aligned}$$

e a motivo di

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^2)^p x^{2m} dx &= \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2}) \Gamma(p+1)}{2\Gamma(p+m+\frac{3}{2})} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2^m(p+\frac{1}{2})(p+\frac{3}{2}) \dots (p+m+\frac{1}{2})} \cdot \frac{p\Gamma(p)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})},\end{aligned}$$

fatto $p + \frac{1}{2} = q$, e supposto perciò $q > \frac{1}{2}$, ne conchiuderemo la domandata serie

$$\Gamma(q) = e \sqrt{\pi} \left(\frac{q - \frac{1}{2}}{e} \right)^{q+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{a_1}{q} + \frac{a_3}{4q(q+1)} + \frac{a_5}{4 \cdot 8q(q+1)(q+2)} + \dots \right\}.$$

Ponendo

$$\Gamma(q) = e \sqrt{2\pi} \left(\frac{q - \frac{1}{2}}{e} \right)^{q+\frac{1}{2}} \frac{\omega(q)}{q},$$

avremo la funzione $\omega(q)$ espressa in serie convergente, e questa serie si ridurrà per $q = \infty$ al primo suo termine $\frac{a_1}{\sqrt{2}} = 1$, onde $\log \omega(q)$ sarà $= 0$ per $q = \infty$. Sarà ad un tempo

$$\log \Gamma(q) = \frac{1}{2} \log 2\pi + (q + \frac{1}{2}) \log (q - \frac{1}{2}) - q + \frac{1}{2} - \log q + \log \omega(q),$$

e confrontando con la (3) se ne trarrà

$$\log \omega(q) = \mu(q) - \frac{1}{2} - (q + \frac{1}{2}) \log \left(1 - \frac{1}{2q} \right);$$

cambiando q in $q+1$, e sottraendo avremo pure

$$\log \omega(q) = \log \omega(q+1) + (q + \frac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{1}{q - \frac{1}{2}} \right) + \log \frac{q + \frac{1}{2}}{q+1} - 1;$$

ponendo in questa successivamente

$$q = p, p+1, p+2, p+3, \dots$$

e sommando otterremo

$$\log \omega(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[(p+m+\frac{1}{2}) \log \left(1 + \frac{1}{p+m-\frac{1}{2}} \right) + \log \frac{p+m+\frac{1}{2}}{p+m+1} - 1 \right],$$

formola simile a quella di Gudermann.

Le medesime sostituzioni

$$z = 1 + y, \quad (1 + y)e^{-y} = 1 - x^2$$

servono al signor Schloemilch per trasformare l'integrale

$$F(u) = u \int_0^\infty e^{ux} e^{-x} x e^{-x} dx,$$

che esprime la serie

$$\frac{u}{1} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{3}\right)^3 + \dots;$$

fatto $\frac{u}{e} = v$, ne ricava

$$F(u) = 2ue^v \int_0^1 e^{-vx^2} (1 - x^2) \left(a_1 + \frac{a_3}{1.2} x^2 + \frac{a_5}{1.2.3.4} x^4 + \dots \right) dx,$$

i cui diversi termini si riducono facilmente all'integrale Krampiano $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$, se v è positivo. Nel caso di u negativo, cambiando u in $-u$ si ha

$$F(-u) = -u \int_0^\infty e^{-ux} e^{-x} x e^{-x} dx,$$

e facendo $e^{-x} = 1 - x$ si ottiene

$$F(-u) = -u \int_0^1 (1 - x)^u (1 - x)^{-ux} dx$$

si svilgerà $(1 - x)^{-ux}$ mediante la formola del binomio, e sostituendo ad ogni integrale

$$\int_0^1 (1 - x)^u x^{n-1} dx$$

il suo valore, si avrà $F(-u)$ espressa da una serie i termini della quale avranno per denominatori i fattoriali

$$(u + 1)(u + 2) \dots (u + m).$$

Queste trasformazioni gioveranno quando il valor numerico di u sia molto grande.

A. GENOCCHI.