Ueber discrete Schaaren von continuirlichen Transformationen.

Von

W. AHRENS in Magdeburg.

Zwischen der Theorie der continuirlichen und der der discontinuirlichen Gruppen bilden die „gemischten Gruppen“*) gewissermassen eine Brücke, insofern als sie zugleich das continuirliche und das discontinuirliche Element in sich vereinigen, und dürfen daher wohl — ganz abgesehen von ihren Anwendungen — einiges theoretische Interesse beanspruchen. — Sie werden 1883 von Lie erwähnt in einer Anmerkung zu einer Arbeit über unendliche Gruppen**), wo auch bereits einige Beispiele derselben angeführt werden. Eine grundlegende Theorie derselben gab Lie sodann im ersten Abschnitt seiner „Theorie der Transformationsgruppen“, Cap. 18 (wir citiren im folgenden dieses Werk kurz mit „Trfgr.“).

§ 1.

Es sei gegeben eine Reihe von Gleichungssystemen:

$$x'_i = f_i^{(k)}(x_1 \dots x_n; a_1^{(k)} \dots a_{r_k}^{(k)})$$

$$k = 1 \dots m; i = 1 \dots n,$$

von denen jedes (für bestimmtes k) eine continuirliche Schaar von Transformationen darstellt, so zwar, dass nicht eine Schaar in einer anderen enthalten sein soll. Diese m Schaaren mögen nun eine Gruppe bilden, d. h. irgend 2 Transformationen aus beliebigen Schaaren, nach einander ausgeführt, sind gleich einer Transformation, welche einer der Schaaren angehört. Unter der Annahme, dass zu jeder Transformation auch die inverse in der Gruppe enthalten ist und die Anzahl

*) Wegen dieser Bezeichnung s. Lie „Influence de Galois sur le développement des mathématiques“. Livre du centenaire de l'école normale supérieure 1896, pg. 486.

**) „Ueber unendliche continuirliche Gruppen“. Berichte d. Ges. d. W. zu Christiania 1883.

der discreten Schaaren eine endliche ist, ergibt sich, dass die Anzahl der Parameter für jede Schaar dieselbe ist.*)

Unter diesen Voraussetzungen beweist Lie weiter den fundamentalen Satz**), dass unter den m Schaaren jedenfalls eine existiert, deren Transformationen für sich allein eine Gruppe mit paarweise inversen Transformationen bilden und welche bei allen Transformationen der gemischten Gruppe invariant bleibt***), und daher nach Lie die „invariante Schaar“ der gemischten Gruppe heisst. Ist nun T irgend eine beliebige, aber bestimmte Transformation der Gruppe und sind $S_{(l)}$ die Transformationen der invarianten Schaar, so lassen sich alle derselben Schaar wie T angehörenden Transformationen in der Form $TS_{(l)}$ darstellen.*) Dabei wollen wir, wie auch weiterhin stets, durch den eingeklammerten Index (l) andeuten, dass für $S_{(l)}$ der Reihe nach alle Transformationen der betreffenden Schaar gesetzt sein sollen, während die Zeichen ohne Index oder ohne eingeklammerten Index immer nur eine, wenn auch im allgemeinen beliebige, so doch bestimmte Transformation bezeichnen; durch den Buchstaben S sollen auch ferner stets die Transformationen der invarianten Schaar bezeichnet werden. Wegen der Invarianz der Schaar $S_{(l)}$ bei allen Transformationen der gemischten Gruppe ist nun TS_iT^{-1} wieder eine Transformation dieser Schaar, etwa $S_{i'}$, also $TS_iT^{-1} = S_{i'}$ oder $TS_i = S_{i'}T$ und es folgt hieraus, dass die Transformationen der Schaar, welcher T angehört, sich alle in den Formen $TS_{(l)}$ wie auch $S_{(l)}T$ darstellen.†)

Es seien nun T_a und T_b 2 beliebige Transformationen der Gruppe und $T_a \cdot T_b = T_c$. Dann ist:

$$S_{(l)} \cdot T_a \cdot T_b \cdot S_{(l')} = S_{(l)} \cdot T_c \cdot S_{(l')}$$

oder

$$(S_{(l)}T_a) \cdot (T_bS_{(l')}) = S_{(l)} \cdot T_c \cdot S_{(l')},$$

wo durch den Accent des Index l' angedeutet werden soll, dass unter $S_{(l')}$ der Reihe nach zwar auch alle Transformationen der invarianten Schaar gedacht sein sollen, aber nicht immer gerade dieselbe wie unter $S_{(l)}$, und wenn wir den Umstand, dass 2 Transformationen T und T' derselben Schaar angehören, durch das Symbol $T \sim T'$ andeuten, so folgt offenbar:

Satz 1: „Ist $T_a \sim T_{a'}$ und $T_b \sim T_{b'}$, so ist auch $T_a \cdot T_b \sim T_{a'} \cdot T_{b'}$.“

Wir sehen also, dass alle Transformationen derselben Schaar in gewissem Sinne als äquivalent auftreten.

Wir stellen jetzt die Frage: Wann ist $T_a \cdot T_b \sim T_a$? Wenn dies der Fall sein soll, so muss offenbar ein S_b so existieren, dass

*) Trfgr. I, pg. 319, Theorem 57.

**) Trfgr. I, pg. 315, Theorem 56.

***) Trfgr. I, pg. 320, Theorem 58.

†) Dies folgt übrigens auch ohne weiteres aus Trfgr. III, pg. 572, Theorem 46.

$$T_a \cdot T_b = T_a \cdot S_b$$

ist, also

$$T_b = S_b,$$

und wir haben also den

Satz 2: „ $T_a \cdot T_b$ ist dann und nur dann $\sim T_a$ (resp. $\sim T_b$), wenn T_b (resp. T_a) eine Transformation der invarianten Schaar ist.“

Es ergibt sich ferner in derselben Weise:

Satz 3: $T_a T$ ist dann und nur dann $\sim T_b T$, wenn $T_a \sim T_b$; und, wenn $T_1, T_2, \dots T_m$ alle verschiedenen Schaaren angehören, so auch $T_1 T, T_2 T, \dots T_m T$ und ebenso $TT_1, TT_2, \dots TT_m$.“

Es sei T eine beliebige Transformation der Gruppe, welche nicht der invarianten Schaar angehört, und es werden die durch Iteration daraus sich ergebenden Transformationen, also die Reihe $T, T^2, \dots T^{m+1}$ gebildet. Dann müssen unter den Transformationen dieser Reihe wenigstens 2 sein, welche derselben Schaar angehören, etwa T^α und T^β , also $T^\alpha \sim T^\beta$ ($\alpha > \beta$) oder $T^\beta \cdot T^{\alpha-\beta} \sim T^\beta$, woraus nach Satz 2 folgt, dass $T^{\alpha-\beta}$ eine Transformation der invarianten Schaar ist. Es giebt also jedenfalls stets eine Zahl $r \leq m$ derart, dass T^r eine Transformation der invarianten Schaar ist. Nach dem Satze 1 folgt dann aber, dass die Composition von irgend r Transformationen der Schaar, welcher T angehört, eine Transformation der invarianten Schaar liefert. Wenn nun insbesondere r die kleinste Zahl dieser Art ist, so sagen wir: die Transformation T oder auch die betreffende Schaar gehört zu der Zahl r . Gehört also T zu der Zahl r , so gehören die Transformationen

$$(1) \quad T, T^2, \dots T^r$$

alle verschiedenen Schaaren an. Ist T_1 ferner eine Transformation, welche mit keiner Transformation der Reihe (1) derselben Schaar angehört, so gehören nach Satz 3:

$$(2) \quad TT_1, T^2T_1, \dots T^rT_1$$

auch alle verschiedenen Schaaren an; auch erkennt man leicht, dass keine Transformation der Reihe (2) mit einer von (1) derselben Schaar angehört, da sonst T_1 bereits mit einer Transformation der Reihe (1) derselben Schaar angehören müsste. Giebt es nun weiter noch eine Transformation T_2 , welche mit keiner der Reihen (1) und (2) derselben Schaar angehört, so bilden wir;

$$(3) \quad TT_2, T^2T_2, \dots T^rT_2$$

und es folgt in derselben Weise, dass von den Transformationen dieser Reihe (3) keine mit einer anderen oder einer der früheren Reihen derselben Schaar angehört. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens, das bekanntlich genau dem in der Substitutionentheorie üblichen, schon

von Cauchy*) herrührenden entspricht, erhalten wir schliesslich m Transformationen, welche alle verschiedenen Schaaren angehören. Es ergibt sich also, dass r ein Theiler von m ist. Wir können hiernach zusammenfassend offenbar folgendermassen sagen:

Theorem: „In einer Gruppe von einer endlichen Anzahl m von discreten Schaaren continuirlicher Transformationen, welche zu jeder Transformation auch die inverse enthält, geben $m + 1$ Transformationen derselben Schaar, nach einander ausgeführt, wieder eine Transformation der betreffenden Schaar, irgend m dagegen eine der invarianten Schaar. Geben umgekehrt μ Transformationen einer — nicht invarianten — Schaar wieder eine Transformation derselben Schaar und ist μ die kleinste Zahl dieser Art für jene Schaar, so ist $\mu - 1$ ein Theiler von m .“

Als Corollare dieses Theorems ergeben sich:

1. „Ist m eine Primzahl, so ergeben sich alle Schaaren der gemischten Gruppe aus einer einzigen, welche nur nicht die invariante sein darf, durch ein- und mehrmalige Iteration der betreffenden Transformationen.“

2. „Die Transformationen einer nicht invarianten Schaar können nur dann paarweise invers zu einander sein, wenn m gerade ist. Ist umgekehrt m gerade, so giebt es auch stets mindestens eine Schaar — ausser der invarianten —, für welche dies zutrifft.“

§ 2.

Wir beschäftigen uns weiter mit einer besonderen Classe gemischter Gruppen und wenden auf diese gewisse von Gauss**), Schering***), Kronecker†) herrührende gruppentheoretische Sätze sehr allgemeiner Bedeutung an. Mit Rücksicht auf unsere Zwecke verallgemeinern wir dieselben jedoch noch in etwas und sprechen sie folgendermassen aus:

Es mögen $T_1, T_2, \dots T_m$ (m beliebig, aber endlich) jedes eine Schaar von Elementen und zwar discreten oder auch continuirlichen und unendlich vielen repräsentiren und zwar ist es gleichgültig, ob wir uns darunter Operationen vorstellen, welche auf gewisse gegebene Objecte nach den weiter unten anzugebenden Gesetzen anzuwenden sind, oder aber Objecte, welche durch eine gewisse gegebene Operation nach eben diesen Gesetzen componirt werden, wobei wir uns diese Compositionen dieser Objecte resp. die Aufeinanderfolge jener Opera-

*) Exercices d'analyse et de physique mathématique, tome III, pg. 374.

**) Disquis. arithm. Art. 305, 306 und „Démonstration de quelques théorèmes concernant les périodes des classes des formes binaires du second degré“. Werke Bd. II, pg. 266.

***) Göttinger Abhandlungen XIV.

†) Berliner Berichte 1870, pg. 881.

tionen durch das Symbol der Multiplication dargestellt denken. Es seien alsdann folgende Bedingungen erfüllt:

- 1) Wenn T und U (irgend 2 gleiche oder ungleiche) Elemente aus derselben oder verschiedenen Schaaren sind, so ist $T \cdot U$ wieder ein Element von einer der m Schaaren.
- 2) Sind T, U, V irgend 3 Elemente aus derselben oder verschiedenen Schaaren, so folgt aus $T \cdot U = T \cdot V$, wie auch aus $U \cdot T = V \cdot T$ stets: $U = V$.
- 3) Sind T_a, T_a' Elemente derselben Schaar und ebenso T_b, T_b' so gehören $T_a \cdot T_b$ und $T_a' \cdot T_b'$ derselben Schaar an.
- 4) Für alle Compositionen von Elementen gelte das associative Gesetz.

Alsdann bestehen folgende Sätze:

I. „Es giebt unter den m Schaaren eine und nur eine, deren Elemente $S_{(i)}$ die Eigenschaft besitzen, mit einem beliebigen anderen Elemente T der Gruppe Elemente $S_{(i)}T$ und $TS_{(i)}$ zu liefern, welche mit T derselben Schaar angehören. Die Elemente $S_{(i)}$ bilden also für sich eine Gruppe.“

II. „Je $m + 1$ Elemente einer beliebigen, aber derselben Schaar ergeben durch Composition wieder ein Element derselben Schaar, je m dagegen ein Element S_i . Geben schon μ Elemente einer Schaar — ausser der der $S_{(i)}$ — ein Element S_i , so ist μ , wenn es die kleinste Zahl dieser Art ist, ein Theiler von m und dann geben auch stets $n \cdot \mu$ Elemente der betreffenden Schaar ein S_i , aber auch nur diese. Wir sagen alsdann nach Kronecker*): die betreffende Schaar „gehört zu der Zahl μ “. Für jeden Teiler von μ giebt es dann wenigstens eine Schaar, welche zu ihm gehört.“

III. „Zu jeder Schaar lässt sich eine und nur eine so angeben, dass irgend ein Element der ersten mit irgend einem der zweiten componirt ein Element S_i liefert. Diese „inverse“ Schaar kann mit der ursprünglichen identisch sein, jedoch nur dann, wenn m gerade ist, und bei geradem m giebt es jedenfalls stets wenigstens eine Schaar — ausser der der $S_{(i)}$ —, welche sich selbst invers ist.“

Wir haben in § 1 gesehen, dass für unsere gemischten Gruppen die hier aufgestellten Bedingungen 1—4 erfüllt sind, die Sätze I—III liefern uns jetzt aber nichts neues mehr; machen wir jedoch die weitere Voraussetzung, dass

- 5) das commutative Gesetz für die Schaaren der Gruppe gilt, d. h. bei 2 beliebigen Elementen T_a, T_b die Elemente $T_a T_b$ und $T_b T_a$ derselben Schaar angehören,

so gelten weiter folgende Sätze:

*) l. c. pg. 883.

IV. „Gehören die Schaaren $1, 2, \dots$ zu den Zahlen $\mu_1, \mu_2, \dots$ (in dem oben angegebenen Sinne), so giebt es auch eine Schaar, welche zu der Zahl μ , dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $\mu_1, \mu_2, \dots$, gehört.“

V. „Alle Schaaren der Gruppe lassen sich durch ein „Fundamentalsystem“ von Schaaren $T_1, T_2, \dots$ in der Form $T_1^{h_1} T_2^{h_2} \dots$; $h_i = 0, 1 \dots \mu_i - 1$ darstellen, wenn T_i zu der Zahl μ_i gehört. Dabei kann das Fundamentalsystem so gewählt werden, dass $\prod \mu_i = m$ und $\frac{\mu_i}{\mu_i + 1}$ eine ganze Zahl ist.“*)

Es ist leicht ersichtlich, dass auf Grund der Voraussetzung 3) das Kronecker'sche Beweisverfahren sich sofort auf diesen allgemeineren Fall anwenden lässt, und dürfen wir darauf verzichten, dies näher auszuführen. Uebrigens findet sich auch bei Kronecker implicite durch Einführung des Begriffs der „relativen Aequivalenz“**) der Fall, in dem m Schaaren, jede eine gleiche endliche Anzahl discreter Elemente enthaltend, auftreten. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die aufgestellten Bedingungen involviren, dass die Schaaren alle aus gleich vielen Elementen bestehen und zwar sowohl für den Fall einer endlichen Anzahl von Elementen jeder Schaar wie auch für eine unendliche, in welch' letzterem Falle dann natürlich der Grad der Unendlichkeit derselbe sein muss für alle Schaaren.

§ 3.

Auf Grund der Betrachtungen des vorigen Paragraphen können wir nun folgende Sätze aufstellen:

I. „In einer gemischten Gruppe von der Eigenschaft, dass bei beliebigen Transformationen T_a, T_b die Transformationen $T_a T_b$ und $T_b T_a$ stets derselben Schaar angehören, giebt es, wenn m , die Anzahl der Schaaren, keine gleichen Primfactoren enthält, stets gerade $\varphi(a)$ Schaaren, aus deren jeder $a - 1$ andere Schaaren durch Composition der Transformationen hergeleitet werden können, wenn a ein Theiler von m ist und unter $\varphi(a)$ die bekannte Euler'sche Function verstanden wird; insbesondere also giebt es $\varphi(m)$ Schaaren, aus deren jeder alle anderen Schaaren, also die ganze Gruppe hergeleitet werden kann.“

Während also im allgemeinen Falle die gemischte Gruppe durch eine ihrer Schaaren ausnahmslos nur dann vollständig repräsentirt

*) Die Einführung dieses Fundamentalsystems rührt von Herrn Schering her; Kronecker wies sodann zuerst auf die grosse allgemeine Bedeutung dieses Satzes hin und sprach ihn, losgelöst von allem Unwesentlichen, aus, während die Untersuchungen von Gauss und Schering sich nur auf die Classen quadratischer Formen bezogen hatten.

**) l. c. pg. 884.

wurde, wenn m eine Primzahl war, so findet dies bei Erfüllung jenes commutativen Gesetzes auch dann noch statt, wenn m nur keine gleichen Primfactoren enthält. In dem Falle eines beliebigen m gilt dies aber auch unter jener Annahme 5) nicht mehr, vielmehr ergibt sich:

II. „In einer dem oben angegebenen commutativen Gesetze folgenden gemischten Gruppe von $m = \prod p_i^{q_i}$ Schaaren, wo die p_i von einander verschiedene Primzahlen sind und mindestens eins der $q_i \geq 2$ ist, lässt sich eine Reihe von Schaaren, ein „Fundamentalsystem“, so angeben, dass aus der ersten durch ein- oder mehrmalige Composition ihrer Transformationen sich $\mu_1 - 1$ andere Schaaren, aus der zweiten entsprechend $\mu_2 - 1$ etc. ergeben, so zwar, dass jedesmal eine, welche für sich eine Gruppe bildet, sonst aber immer lauter neue erhalten werden und schliesslich durch Composition aller dieser Schaaren die ganze Gruppe sich ergibt. Dabei ist $m = \prod \mu_i$ und $\frac{\mu_i}{\mu_i + 1}$ eine ganze Zahl.“

Dabei bestimmen sich die Zahlen μ_i jedesmal eindeutig bei bestimmtem $m^*)$, während dagegen hinsichtlich der Schaaren des Fundamentalsystems eine mehrfache Auswahl möglich ist. Diese Mehrdeutigkeit wird in gewisser Weise vermieden, wenn man, wie Herr Weber**) dies nach dem Vorgange von Gauss thut, das Fundamentalsystem so wählt, dass die zugehörigen Zahlen μ_i Primzahlpotenzen ($p_i^{q_i}$) sind, doch wird bei dieser Darstellung das Fundamentalsystem („Basis“ bei Herrn Weber) im allgemeinen nicht von einer Minimalzahl von Elementen (resp. Schaaren bei unserer Auffassung) gebildet.

Sagen wir nun von 2 Gruppen von je m Schaaren von Transformationen für einen Augenblick, dass ihre Structur dieselbe ist, wenn die charakteristischen Zahlen μ_i der Schaaren des Fundamentalsystems für beide dieselben sind, so giebt es offenbar bei $m = \prod p_i^{q_i}$ Schaaren $\prod \Gamma(q_i)$ verschiedene Typen hinsichtlich der Structur, wo $\Gamma(q)$ die bekannte zahlentheoretische Function ist, welche angiebt, wie oft q sich als Summe von gleichen oder verschiedenen positiven ganzen Zahlen darstellen lässt.

Rostock, den 11. April 1897.

*) Vgl. hierzu Frobenius und Stickelberger „Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen“. Borchardt's Journal Bd. 86.

**) Math. Annalen XX, pg. 307.