Ohne unbedingt die Behauptung aufstellen zu wollen, daß die von Lundquist mit vieler Sorgfalt angestellten Versuche für die Chlornatrium-Lösung einen zu kleinen Werth ergeben haben, kann ich doch nicht umhin, das von mir gefundene Resultat in so weit für das wahrscheinlichere zu halten, daß die Salzlösung besser als Wasser die Wärme leitet.

Da die übrigen von mir untersuchten Flüssigkeiten von Lundquist nicht behandelt sind, so läßt sich als Resultat der Vergleichung nur der Werth für die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers als definitiv bestimmt hinstellen.

Aachen, Juli 1874.

II. *Beitrag zur Kenntnifs der elastischen Nachwirkung bei Torsion; von F. Neesen.*

Das Phänomen der elastischen Nachwirkung blieb nach seiner Entdeckung durch W. Weber¹⁾ im Jahre 1841 längere Zeit ohne eine eingehende Untersuchung, trotzdem die elastische Nachwirkung bei allen Untersuchungen, bei welchen Drehungen eines an einem Faden aufgehängten Spiegels oder sonstigen Gegenstandes beobachtet werden, wie bei Galvanometern etc. als eine mehr oder weniger beträchtliche Fehlerquelle auftritt. Erst F. Kohlrausch nahm im Jahre 1862 die Untersuchung der eigenthümlichen Erscheinung wieder auf; er wies ihr Auftreten auch bei der Torsion nach. In zwei ausführlichen Arbeiten²⁾ gab er ein Gesetz für die elastische Nachwirkung und zeigte die Abhängigkeit dieser Erscheinung nicht allein von den Bedingungen der Torsion, also vom Torsionswinkel und der Torsionsdauer, sondern auch von der Temperatur des

1) W. Weber. *Comm. Soc. Gott. Vol. VIII. p. 45. Pogg. Ann. Bd. 34, S. 247.*

2) F. Kohlrausch. *Pogg. Ann. Bd. 129, S. 337 u. Bd. 128, S. 1.*

tordirten Fadens. — Weiter sind über diesen Gegenstand meines Wissens nur zwei Arbeiten geliefert, eine theoretische von O. E. Meyer¹⁾ und zu gleicher Zeit eine Mittheilung von mir selbst²⁾.

Zu der erneuten Aufnahme der von Kohlrausch so ausführlich untersuchten Frage wurde ich durch den Versuch gedrängt, die Dämpfung der Schwingungen eines Fadens vermöge einer inneren Reibung im Faden selbst zu erklären durch die elastische Nachwirkung d. h. durch die fortwährende Verschiebung des Punktes, um welchen als Mittelpunkt die Schwingungen geschehen³⁾. Diese Ansicht ist zuerst von W. Weber ausgesprochen. Selbstverständlich mußte zu diesem Zwecke das genaue Gesetz der elastischen Nachwirkung bekannt sein. Es ergab sich nun bei der Prüfung des Gesetzes von Kohlrausch, daß meine Versuche nicht diesem entsprachen, vielmehr zunächst ein einfacheres Resultat lieferten. Ebenfalls wichen meine Versuche von dem Weber'schen Gesetz ab.

Weber giebt als Formel, welche seine Versuche auf's Vollkommenste darstellt:

$$x = \frac{C}{(t + \alpha)^p}.$$

Die Formel von Kohlrausch lautet

$$x = ce - at^m$$

In beiden bedeutet x den augenblicklichen Abstand des Fadens von der schließlichen Ruhelage und t die Zeit. Die übrigen Gröößen sind Constanten.

An Stelle dieser beiden Formeln ergaben meine Versuche die Formel:

$$x = ce - \beta t,$$

also für m in der vorletzten Gleichung den Werth 1, während die Versuche von Kohlrausch Werthe für m geben,

1) Meyer. Pogg. Ann. Bd. 151, S. 108.

2) Neesen. Monatsberichte der Akad. d. Wissenschaften zu Berlin, 12. Feb. 1874

3) Vergl. die angeführte Mittheilung in den Monatsberichten.

welche sich der Null nähern. Als Grund des Unterschiedes zwischen den beiden Messungen an tordirten Fäden ist möglicher Weise, wie ich in der früheren Mittheilung schon bemerkte, der Widerstand anzusehen, welchem das freie Eintreten der elastischen Nachwirkung bei den Versuchen von Kohlrausch begegnet in dem Eintauchen des zum Behuf der Beruhigung der Schwingungen an dem tordirten Faden befestigten Messingblech in Oel; und möglicher Weise in der verschiedenen Art der Anbringung der Torsion. *A priori* kann indeß das Gesetz $x = ce^{-at^n}$ wegen eines widerstreitenden physikalischen Grundes nicht als wirkliches Naturgesetz der elastischen Nachwirkung angesehen werden. Dasselbe liefert nämlich zur Zeit $t = 0$, also im Momente der Aufhebung der Torsion bei dem von Kohlrausch benutzten Ausgangspunkt für die Zeit, einen unendlichen Werth für die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$. Es ist dieselbe

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{tn}.$$

α und x sind endliche Größen, mithin ist für $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = \infty$. Eine unendliche Geschwindigkeit ist aber bei einer endlichen Bewegung in keinem Punkte der letzteren zu gebrauchen.

Fast gleichzeitig mit meiner Mittheilung vom Februar d. J. erschien der Aufsatz von O. E. Meyer über elastische Nachwirkung und Dämpfung der Schwingungen; ich kannte denselben damals noch nicht, da das Januarheft von Pogg. Ann. erst im März herausgegeben wurde. Meyer folgert aus der Annahme, daß die Schwingungen eines Fadens oder eines Drahtes einen Widerstand vermöge innerer Reibung erfahren, welcher proportional der Geschwindigkeit ist, das Entstehen einer elastischen Nachwirkung, welche dargestellt wird durch das Gesetz

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta t}}{2n-1}.$$

β ist ebenfalls eine Function von n , deren Form ich später angeben werde. Nach diesem Gesetz besteht die elastische Nachwirkung aus einer Anzahl von Bewegungen, welche nach einfachen Exponentialcurven vor sich gehen.

Dieser theoretischen Folgerung entspricht mein Resultat $x = ce^{-\beta t}$; darnach würde man in obiger Summe mit dem ersten Gliede sich begnügen können. Die weiteren genaueren Versuche, deren Darlegung und Resultate ich im Folgenden geben will, bestätigen, daß die elastische Nachwirkung nach einfachen Exponentialcurven vor sich geht, sie zeigen indeß, daß man mit einer einzigen nicht auskommt, sondern mindestens zwei Summanden aus obiger Summe nehmen muß. Die Formel von Kohlrausch sowie die von Weber werden, wenn meine Formel als die richtigere befunden wird, nur sehr angenäherte Darstellungen des wirklichen Vorganges enthalten.

Ich gebe zunächst die Beschreibung des benutzten Apparates und die bei den Versuchen befolgte Untersuchungsmethode.

§. 1. Beschreibung des Apparates.

Der Apparat besteht aus einem Glascylinder A mit unten abgeschliffenem Rande Fig. 1 Taf. IV. Das obere Ende des Cylinders ist luftdicht verschlossen durch einen Messingdeckel B , der in der Mitte eine große Oeffnung hat. Diese Oeffnung wird verschlossen durch eine auf den Deckel aufgelöthete Stopfbüchse c , durch welche der Stift d hindurchgeht, an dem der zu untersuchende Faden befestigt wird. Zu diesem Zwecke befindet sich an dem unteren Ende von d ein Haken, um den der Faden fest geschlungen ist. d ist luftdicht in c drehbar und ebenso luftdicht auf und nieder zu schieben; an dem oberen Ende dieses Stiftes befindet sich eine Kreisscheibe e mit einer Theilung von 5° zu 5° . Vor derselben auf den Deckel B befestigt steht ein verticaler Zeiger f , mittelst dessen die Drehung von d und e abzulesen ist. Es ist diese Dre-

hung in den folgenden Versuchen nicht benutzt. Sie wurde zu den Vorversuchen angewandt. Auf dem Deckel *B* befindet sich noch eine Stopfbüchse *g* seitlich aufgeschraubt. Durch *g* geht ein längerer runder Messingstab *h*, der ungefähr bis zum unteren Ende des Cylinders herunterreicht. An dem unteren Ende verjüngt er sich etwas, an dem oberen ist ein Schraubengewinde *i* eingeschnitten. In dieses Schraubengewinde greift eine Mutter *k*, welche an dem oberen Ende der Stopfbüchse *g* um diese drehbar befestigt ist, so daß sie sich um die Axe der Stopfbüchse drehen läßt, jedoch beim Drehen nicht von *g* herunter geht. Fig. 2 Taf. IV zeigt die betreffende Einrichtung. Wird die Mutter *k* gedreht, so hebt oder senkt sich also vermittelst des Schraubenganges *i* der Stab *h*. Dieser Stab hat an seinem oberen Ende noch einen Knopf mit angeschraubtem Zeiger, der an einer davorstehenden an *B* angeschraubten Kreistheilung die Größe einer etwaigen Drehung von *h* anzeigt. Ziemlich an dem unteren Ende von *h* kann ein Kreissegment *m* von Messing mittelst Contremutter angeschraubt werden. Dasselbe dient dazu um vermittelst einer Drehung von *h* in der Stopfbüchse die Torsion des zu untersuchenden Fadens zu bewerkstelligen. Dazu ist dieses Segment an seinem äußeren Rande gezahnt. In die Zähne desselben fassen die Zähne eines kleinen Rades *n*, welches in der Mitte durch einen Stift *o* durchbohrt ist. Der letztere trägt an seinem oberen Ende eine Gabel *p*, wie in Fig. 3 Taf. IV zu sehen ist. Das untere Ende von *o*, sowie das untere Ende von *h* greifen in Löcher eines auf dem Boden stehenden Bleigewichtes. Dadurch wird erreicht, daß bei einer Drehung von *h* auch das Rädchen *n* und die Gabel *p* sich drehen. An dem Gewicht, welches den untersuchten Faden spannt, ist nun ein Spiegel *s* und daran eine Nähnadel *r* befestigt. Diese letztere wird bei einem Emporziehen von *h* vermittelst Drehung der Schraube *k* von der mitgehobenen Gabel *p* gefaßt. Wird darauf *h* gedreht, so wird der Faden tordirt. Um diese Torsion aufzuheben, ist es nur nöthig,

h wieder herunterzuschrauben. Die Größe der gegebenen Torsion läßt sich mittelst des Zeigers *l* ablesen. Natürlicherweise passen das Segment *m* und der Kreis *n* so zusammen, daß die Mitte der Gabel *p* gerade in die Mitte des Glascylinders unter dem Stifte *d* zu liegen kommt. Durch gehöriges Neigen des ganzen Apparates wird derselbe so gestellt, daß die Verlängerung des untersuchten Fadens gerade durch die Drehungsaxe der Gabel *p* geht. Es läßt sich dann eine Torsion des Fadens herstellen ohne störende Erschütterung. Die Stopfbüchsen sind angebracht um auch im luftleeren Raume beobachten zu können.

Die Ablesung der Bewegung des Fadens geschah mit Spiegel und Scala. Zu dem Ende war der Glascylinder *A* an seinem unteren Ende durchbohrt und vor dieser Durchbohrung ein Tubulus *C* angeschmolzen, der mit einer planparallelen Glasplatte verschlossen ist. In der Höhe dieses Tubulus befindet sich der an dem spannenden Gewicht befestigte Spiegel. In den Deckel *B* ist schließlich noch ein Thermometer eingeschraubt, um die Temperatur im Innern des Apparates zu bestimmen.

Der vorstehend beschriebene Apparat ist in der rühmlichst bekannten Werkstatt des Dr. Meyerstein in Göttingen angefertigt. Er gehört in die Sammlung des physikalischen Instituts der Universität Göttingen. Ich fühle mich für die Anfertigung und Verleihung desselben dem Director des betreffenden Instituts, Hrn. Prof. W. Weber, sehr verpflichtet.

Die anscheinend complicirte Einrichtung um die Torsion hervorzubringen, habe ich einem leichteren Weg um dasselbe zu erreichen, wie ihn die Anwendung eines Magnetes geboten haben würde, vorgezogen, weil durch einen Magnet die auftretenden elastischen Erscheinungen mehr oder weniger, die elastische Nachwirkung fast ganz verdeckt werden, da die hinzutretende Richtkraft des Erdmagnetismus die elastische Nachwirkung ganz überwindet und die Dämpfung der Schwingungen sehr alterirt.

Zu dem obigen Kern des Apparates mußte noch eine Vorrichtung hinzugefügt werden, um eine constante Temperatur in jenem zu erhalten. Nach mehreren nicht befriedigend ausgefallenen Versuchen, dieselbe aus einer Mischung von bestimmten Mengen von kochendem Wasser und kaltem Wasser herzustellen, wandte ich das von Dupré benutzte Verfahren an, indem ich eine bestimmte Menge kalten Wassers von constanter Temperatur durch kochendes Wasser fließen liefs. Das so erhaltene Wasser von constanter Temperatur lief in ein Zinkgefäß, in welchem sich der oben beschriebene Apparat befand. Das Zinkgefäß war mit Watte umbunden; es befanden sich an demselben mehrere Hähne zum Ein- und Auslaufen des Wassers und Glasscheiben eingelassen, um die Drehung des Fadens beobachten zu können. Das nöthige Wasser von constanter Temperatur lieferte die Wasserleitung, deren Wasser eine genügende Constanz in der Temperatur zeigte. Um stets dieselbe Menge kalten Wassers durch das kochende Wasser zu führen, liefs ich das Wasser aus der Wasserleitung in ein Glas laufen und regulirte den Druck so, daß stets etwas Wasser über den Rand des Glases auslief. Aus dem letzteren wurde Wasser mittelst eines feststehenden Hebers in ein Bleirohr geleitet, welches wasserdicht durch die Wandungen des Kochgefäßes ging, in welchem das heiße Wasser erhitzt wurde. Aus dem Bleirohr flofs das Wasser erst in ein Glasrohr und dann in das genannte Zinkgefäß. Zwischen Heber und Bleirohr befinden sich 2 Hähne, um die Zuflußmenge des Wassers zu reguliren. Da sich während des Versuches in dem zuströmenden Wasser Luftblasen entwickelten, welche den Zufluß hemmten, so wurden an geeigneten Stellen verticale Röhren angesetzt, welche diese Luftblasen aufnahmen. Es erwies sich als vortheilhaft, das heiße Wasser nicht stark sieden zu lassen, weil in diesem Falle die Temperaturschwankungen des ausfließenden Wassers bedeutend waren. Mit Hülfe dieser Vorichtsmafsregeln konnte bei einiger Aufmerksamkeit die

Temperatur des in das Zinkgefäß einfließenden Wassers sehr constant gehalten werden. Die Schwankungen betrug höchstens 0,02 bis 0,04 Grad.

Die Versuche wurden angestellt in den Räumen des hiesigen physikalischen Institutes, dessen Leiter, meinem verehrten Vorgesetzten, Hrn. Prof. Helmholtz, ich mich für die liberale Gewährung aller Hilfsmittel sehr verpflichtet fühle.

§. 2. Beobachtungsmethode.

Der oben beschriebene Apparat wurde auf eine Glasplatte gekittet, in das Zinkgefäß gestellt, längere Zeit ruhig stehen gelassen, damit der angewandte Faden sich austordiren konnte und dann vor jedem Versuch Wasser von constanter Temperatur in das Zinkgefäß eingeleitet. Nachdem durch dasselbe 1–2 Stunden lang der Faden in der betreffenden constanten Temperatur erhalten war, wurde der Versuch angestellt, indem vermittelt der Schraube *k* zuerst die Gabel *p* in die Höhe gehoben wurde, so daß sie die Nadel *o* faßte. Dann wurde der Stab *d* so lange gedreht, bis im Fernrohr wieder derselbe Scalentheil erschien, welcher dort sich zeigte, so lange *o* frei war. So war der Faden nicht tordirt. Natürlich war zur Bestimmung dieses Scalentheiles gewartet, bis der Faden eine constante Lage angenommen hatte. Zu einer bestimmten an einem Chronometer abgelesenen Zeit wurde die Drehung von *h* und damit die Torsion des untersuchten Fadens bewirkt, dabei wurde darauf Acht gegeben, daß die Zeit, während welcher gedreht wurde, bei allen Versuchen dieselbe war, 5" vor bis 5" nach der später angenommenen Anfangszeit für die Drehung. Die Gabel *p* wurde nach Vollzug dieser Drehung soweit heruntergeschraubt, daß sie die Nadel nur noch eben festhielt, damit beim Lösen der Torsion durch ein zu oftcs Drehen der Schraube *k* nicht zu große Erschütterungen hervorgerufen wurden. Nachdem die Torsion eine constante Zeit, in allen unten angeführten Versuchen 15' lang ge-

dauert hatte, wurde die Nadel von der Gabel p gänzlich gelöst. Der Faden gerieth in Torsionsschwingungen, welche bei den untersuchten Substanzen sehr rasch abnahmen und schließlic sich ganz beruhigten, während eine Bewegung des Fadens nach einer Seite, also elastische Nachwirkung, übrig blieb. Deshalb konnte auch die letztere beobachtet werden, ohne daß ein äußeres störendes Beruhigungsmittel für Wegnahme der Schwingungen angewandt wurde. Die Entfernung der Spiegel von der Scala betrug bei den Versuchen mit Kautschuckfäden 775^{mm} ; die Ablesungen können einen Fehler von $0,1$ Scalentheile enthalten. Da die Correction, welche an die Scalentheile anzubringen ist, zur Reducirung auf Gröfsen, die den Bogen direct proportional sind, bei den grössten abgelesenen Ausschlägen kaum $0,01$ Scalentheile beträgt, so sind die abgelesenen Scalentheile direct den Bogen proportional gesetzt und den Rechnungen zu Grunde gelegt.

Cocon- und Kautschuckfäden dienten zu den Versuchen. Da der erstere indess eine zu grofse Nachwirkung zeigte, als daß dieselbe mit Fernrohr und Scala abgelesen würde, ausserdem bei demselben eine unberechenbare Fehlerquelle eintrat, so habe ich mich bei den messenden Versuchen auf Kautschuckfäden beschränkt. Der angewandte Faden hatte eine Länge von 250^{mm} , einen Durchmesser von $1,3^{\text{mm}}$.

Vorbereitende Versuche zeigten bei Kupfer- und Eisen- draht keine elastische Nachwirkung, wohl bei Bleidraht.

§. 3. Störungen der Beobachtungen.

Es ergaben sich bei den untersuchten Fäden, sowohl Cocon- als Kautschuckfäden bedeutende Störungen in der regelmässigen Bewegung, welche ihren Grund theils in äußeren Umständen, theils im Faden selbst hatten und leider nicht alle zu eliminiren sind. Beim Coconfaden war es vor Allem ein störender Einfluß von Ausen, der mich wegen seiner Sonderbarkeit lange beschäftigte. Es zeigte sich nämlich, als die Scala durch Kerzenlicht er-

leuchtet wurde, die Erscheinung, daß der Spiegel sich dem Lichte zudrehte. Dabei waren die Kerzenlichter über einen Meter vom Spiegel entfernt.

Bei der näheren Untersuchung ergab sich dieselbe Drehung auch bei einfallendem Tageslicht, sogar im möglichst luftverdünnten Raum. Allerdings war die genannte Bewegung um so lebhafter, je mehr Luft den untersuchten Faden und daranhängenden Spiegel umgab. Die ganze Bewegung hing von dem Spiegel allein ab, eine etwaige Aenderung des Fadens hatte nichts damit zu thun. Anfänglich war ich geneigt, aus verschiedenen Regelmäßigkeiten dieser Drehung dazu getrieben, letztere direct dem Einfluß der auffallenden Lichtstrahlen zuzuschreiben. Jedoch konnte ich mich von der Richtigkeit dieser Ansicht nicht ganz überzeugen. Möglicher Weise ist die erwähnte Erscheinung auch ein Einfluß der die Lichtstrahlen begleitenden Wärme, welche die Luft an der den angeschmolzenen Tubulus verschließenden Glasplatte erwärmt und dadurch in Bewegung setzt. Die bewegte Luft dreht dann den Spiegel. Es liegen gegen diese Art der Erklärung einige Gründe vor, doch kann ich hier nicht näher darauf eingehen. Jedenfalls ist die erwähnte Störung, welche auch durch eingeschobene, Wärme absorbirende Substanzen nicht ganz aufgehoben wird, bei den Versuchen nicht zu vermeiden und tritt als unberechenbare Fehlerquelle auf. Wie schon erwähnt, wurden deshalb die messenden Versuche nicht an Cocon-, sondern an Kautschuckfäden angestellt. Derselbe empfiehlt sich aus mehreren Gründen. Erstlich zeigte er sich sehr elastisch. Unter denselben Umständen nahm die Torsionsruhelage nach den Versuchen dieselbe Stellung ein, wie früher. Dabei ist die Dämpfung der Schwingungen und die elastische Nachwirkung sehr bedeutend, doch lassen sich beide Phänomene mit Spiegelablesung verfolgen. Ein weiterer Vortheil ist der, daß mit leichter Mühe aus einem Kautschuckfaden sich andere von beliebiger, natürlich geringerer Dicke herstellen lassen. Zu dem Ende braucht

der Faden nur in Wasser von 60° erwärmt, dann erkaltet und schliesslich ausgezogen zu werden. Neben diesen Vorzügen bietet Kautschuck auch bedenkliche Fehlerquellen, welche indeß mehr oder weniger bei den übrigen Substanzen, die in Frage kommen können, auch einzutreten scheinen. Erstens ist nämlich die elastische Nachwirkung von der Temperatur abhängig, so daß eine Unregelmäßigkeit der Temperatur während des Versuches schon aus diesem Grunde die Beobachtung stört; zweitens, und daß ist der schlimmste Feind der Regelmäßigkeit, war die Torsionsruhelage bei allen untersuchten Kautschuckfäden von der Temperatur derselben in bedeutendem Maasse abhängig. Den Einfluß dieser Fehlerquelle suchte ich möglichst zu entfernen durch den oben beschriebenen Apparat, durch welchen eine constante Temperatur erhalten wurde. Ganz zu vermeiden ist derselbe indeß nicht, allein schon, weil der Kautschuckfaden sich selbst erwärmt durch den Verlust an Bewegungsenergie vermöge innerer Reibung. Namentlich auf die Bewegung des Fadens längere Zeit nach Aufhebung der Torsion wird der Temperatureinfluß störend einwirken, da erstere Bewegung selbst sehr klein ist und schliesslich nach 1 — 1½ Stunden nur 1 Scalenthail während 5' beträgt. Doch zeigt die sehr gute Uebereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Werthen, daß es mir gelungen ist, die Temperaturstörungen möglichst zu vermeiden. Es verbot sich wegen derselben ein tagelang andauernder Versuch, weil so lange die Temperatur nicht constant zu halten ist. Ausserdem wurde eine solche lange Beobachtung verhindert durch lokale Fehlerquellen, bedingt durch die Aufstellung des Ablesungsfernrohres. Der Apparat selbst, in dem der untersuchte Faden aufgehängt war, war auf einer an die dicke Außenwand eines der Zimmer im hiesigen physikalischen Institute befestigten Console aufgestellt. Das Zimmer ging nach Norden, nach dem Kastanienwäldchen hinaus. Diese Lage war sehr günstig, da einentheils die Zimmertemperatur sehr constant war, andernteils das Zimmer nicht

unmittelbar an der StraÙe lag. Allerdings zeigten sich doch noch beim Vorüberfahren entfernter Wagen kleine verticale Erschütterungen des Spiegels; dieselben bewirkten indess keine Drehung des letzteren. Dagegen mußte das Ablesungsfernrohr, wenn auch auf einem schweren Dreifuß so doch direct auf dem Fußboden des Zimmers aufgestellt werden. Das Zimmer ward anderweitig ebenfalls viel benutzt. Wenn nun auch während der Versuchszeit von 2 Stunden sich keine Störungen durch die Schwankungen des Fußbodens beim Gehen ergaben, so verbot sich wegen dieser Aufstellung von selbst eine tagelange Beobachtung, wie dieselbe von Kohlrausch an einzelnen Fäden gemacht ist.

§. 4. Aufstellung einer angenäherten Formel für elastische Nachwirkung aus Beobachtungen bald nach Aufhören der Schwingungen.

In den nachstehenden Versuchen hat der Torsionswinkel stets dieselbe GröÙe von 70° . Die Torsionsdauer beträgt 15'. Der Anfang der Zeitrechnung ist in den Moment des Lösens verlegt, also in den Moment des Beginns der Schwingungen, sowie der elastischen Nachwirkung. Als Zeiteinheit dient die Secunde.

Die Schwingungen waren in 2—6 Minuten beendet, bei geringen Temperaturen früher als bei hohen. Doch wurden die Beobachtungen der elastischen Nachwirkung erst 10' nach Aufhebung der Torsion begonnen, um etwaige Störungen durch eine noch vorhandene aber nicht mehr sichtbare Schwingungsbewegung zu vermeiden.

Folgende Tabelle giebt eine Beobachtung wieder; in der ersten Columnne stehen die Zeiten, in der zweiten die beobachteten Scalentheile, in der dritten die berechneten. Die vierte Columnne enthält die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung.

Temperatur $\tau = 10,00^\circ$.

t	x		Differenz d
	beobachtet	berechnet	
600"	42,3	42,2	— 0,1
660	37,5	37,7	+ 0,2
720	33,8	33,8	$\pm 0,0$
780	30,3	30,2	$\pm 0,1$
840	27,1	27,0	— 0,1
900	24,2	24,1	— 0,1
960	21,6	21,6	$\pm 0,0$
1020	19,3	19,3	$\pm 0,0$
1080	17,2	17,2	$\pm 0,0$

Die Werthe in der dritten Columnne sind nach der Formel $x = ce^{-\beta t}$ erhalten. In derselben ist x von der schließlichen Ruhelage an gerechnet. Da dieselbe, wie aus den vorhergehenden Paragraphen hervorgeht, nicht beobachtet werden konnte, so wurde sie aus den Ableisungen berechnet, indem denselben die allgemeine Formel mit beliebigem Anfangspunkt für x , nämlich $x = C + ce^{-\beta t}$ zu Grunde gelegt wurde. C bestimmt sich darnach aus der Gleichung

$$\frac{\log(x_1 - C) - \log(x_2 - C)}{\log(x_1 - C) - \log(x_3 - C)} = \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3}.$$

Die Constanten wurden aus Combination verschiedener Tripeln von Beobachtungen berechnet. Für obige Beobachtung ist

$$c = 129,3 \quad \beta = 0,001865.$$

Die Uebereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Werthen ist sehr gut. Die Differenzen erheben sich nur in einem Falle über den möglichen Beobachtungsfehler und auch da nur um 0,1 Scalentheile, sie ist bei ihrem Maximum = 0,2 Scalentheile.

Ich führe zur Vergleichung noch einige Beobachtungstabellen an:

Temperatur $\tau = 10,04^\circ - 10,00^\circ$.

t	x		d
	beobachtet	berechnet	
600	42,5	42,6	+ 0,1
660	38,0	38,1	+ 0,1
720	33,9	33,9	$\pm 0,0$
780	30,3	30,3	$\pm 0,0$
840	27,1	27,0	- 0,1
900	24,2	24,1	- 0,1
960	21,5	21,5	$\pm 0,0$
1020	19,1	19,2	+ 0,1
1080	17,0	17,1	+ 0,1

$$x = 121,1 e^{-0,001818 t}$$

$$\tau = 29,20^\circ.$$

t	x		d
	beobachtet	berechnet	
600	45,6	45,4	- 0,2
660	41,5	41,5	$\pm 0,0$
720	37,9	38,0	+ 0,1
780	34,5	34,7	+ 0,2
840	31,6	31,8	+ 0,2
900	29,1	29,0	- 0,1
960	26,5	26,6	+ 0,1
1020	24,4	24,3	- 0,1
1080	22,3	22,2	- 0,1
1140	20,4	20,3	- 0,1
1200	18,5	18,6	+ 0,1

$$c = 111,1 \quad \beta = 0,001491$$

Die Differenzen sind auch hier sehr gering, und abwechselnd positiv oder negativ. Ebenso in den folgenden beiden Tabellen:

$$\tau = 18,00^\circ.$$

t	x		d
	beobachtet	berechnet	
570	37,9	38,1	+ 0,2
630	33,7	33,6	- 0,1
690	29,7	29,7	$\pm 0,0$
750	26,2	26,2	$\pm 0,0$
810	23,0	23,1	+ 0,1
870	20,5	20,4	- 0,1
930	17,9	18,0	+ 0,1
990	15,8	15,9	+ 0,1
1050	13,9	14,0	+ 0,1
1110	12,5	12,4	- 0,1

$$c = 125,1 \quad \beta = 0,002086$$

$$\tau = 36,4^{\circ} - 36,36^{\circ}.$$

t	x		d
	beobachtet	berechnet	
780	28,3	28,3	$\pm 0,0$
840	26,5	26,5	$\pm 0,0$
900	24,9	24,9	$\pm 0,0$
960	23,4	23,4	$\pm 0,0$
1020	21,9	21,9	$\pm 0,0$
1080	20,4	20,6	$+ 0,2$
1140	19,3	19,3	$\pm 0,0$
1200	18,2	18,1	$- 0,1$

Die Constanten der letzten Tabelle haben die Werthe $c = 64,7$ $\beta = 0,001061$.

Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung läßt in den angeführten Versuchen nichts zu wünschen übrig; bei den übrigen angestellten Versuchen, deren eine große Zahl vorlagen, zeigte sich dieselbe Uebereinstimmung. Ich kann natürlich nicht alle gefundenen Tabellen hier wiedergeben.

Die elastische Nachwirkung ist, wie Kohlrausch nachgewiesen und wie sich auch aus meinen früheren Versuchen ergeben hat, abhängig von der Temperatur. Aus den vorliegenden genaueren Versuchen bei constanter Temperatur suchte ich die Gesetze für die Abhängigkeit der Constanten in der Bewegungsgleichung von der Temperatur zu bestimmen und so zugleich zu erfahren, ob die von Kohlrausch aufgefundenen Gesetze auch für die Formel $x = ce^{-\alpha t}$ gelten.

Zu dem Ende wurden viele Versuche bei verschiedenen Temperaturen, so wie mehrere zur Controle bei derselben Temperatur angestellt. Die Temperaturen variierten in dem Intervall von 10° bis 36° . Es ist mir indeß nicht gelungen, eine Gesetzmäßigkeit aus den einzelnen Versuchen herauszubringen; die Controlversuche bei denselben Temperaturen gaben zu abweichende Werthe für die Constanten. Der Einfluß der Temperatur auf die Erscheinung ist aber unleugbar. Um denselben deutlich

in's Licht zu stellen, führe ich zuvor einige Beobachtungen der Umkehrpunkte der Schwingungen an.

Wie ich schon früher erwähnt habe, verschwinden die Schwingungen bei geringen Temperaturen bei Weitem rascher wie bei hohen; dabei ist der augenblickliche Mittelpunkt, um welchen die einzelnen Schwingungen geschehen, zu gleichen Zeiten bei geringen Temperaturen viel weiter von der schließlichen Ruhelage entfernt, als bei hohen Temperaturen. Die Schwingungsdauer variirt gleichfalls mit der Temperatur, sie steigt mit derselben. Der Torsionscoefficient wird darnach mit zunehmender Temperatur kleiner.

Ich gebe, um den bedeutenden Einfluß der Temperatur zu zeigen, nachstehend einige Tabellen der Umkehrpunkte. Die erste Columnne enthält wieder die Zeiten der Umkehrpunkte, die zweite die beobachteten Umkehrpunkte, die dritte die Bogen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten. Wegen der kleinen Schwingungsdauer konnten nur ganze Secunden als Zeiten der Umkehrpunkte abgelesen werden.

$\tau = 10,00^\circ$			$\tau = 36,40^\circ$		
Zeit	Umkehrpunkte	Bogen	Zeit	Umkehrpunkte	Bogen
86"	430		85"	488	
89	409	30	89	692	204
91	435	24	93	500	192
94	416	19	96	676	176
97	437	21	100	510	166
99	424	13	104	662	152
107	439	15	108	519	143

$\tau = 10,60^\circ$.

Zeit	Umkehrpunkte	Bogen
65"	409	
67	470	61
70	422	48
73	469	47
75	433	36
78	469	36
80	443	26
83	469	26

Der Unterschied bei Wechsel der Temperatur ist mit- hin sehr bedeutend. Daß dieser Unterschied stets der- selbe bleibt, erhellt aus folgenden 2 Beobachtungen, die zwei Wochen später an demselben Faden mit einem glei- chen Torsionswinkel und gleicher Torsionsdauer angestellt wurden.

Zeit x	$\tau = 12,80^\circ$		$\tau = 34,00^\circ$		
	Umkehr- punkte u	Bogen s	x	u	s
92"	431	12,2	219"	417	24,5
95	418,8	14,2	222	441,5	19,5
98	433	8	227	422	21
100	425	12	231	443	18
103	437	7	235	425	18,5
105	430	9	238	443,5	14,5
108	439	3	242	429	15,8
111	436	7	246	444,8	12,8
114	443		250	432	

Die Schwingungsdauer bei $12,80^\circ$ ist

$$T = 2,75'', \text{ bei } 34,00^\circ \quad T = 3,88''.$$

Die Tabelle zeigt, daß die Beruhigung der Schwin- gungen bei $34,00^\circ$ viel später eintritt, als bei $12,80^\circ$.

Deutlich lassen die angeführten Reihen den Einfluß der elastischen Nachwirkung auf die Schwingungen er- kennen. Die Bogen nehmen nicht stetig ab, sondern wer- den bei einiger Kleinheit abwechselnd größer und kleiner. Dabei kehrt die Richtung der Verschiebung der Umkehr- punkte auf einer Seite um. Wenn sich so bei den Schwin- gungen ein regelmäßiger bedeutender Einfluß der Tempe- ratur zeigt, so ist derselbe bei der elastischen Nachwir- kung allerdings auch ersichtlich, kann jedoch aus meinen Versuchen nicht in Gesetze gefaßt werden. Ich gebe zur Motivirung dieses nachstehend eine Tabelle der für die verschiedenen Temperaturen berechneten Constanten c und β .

Die erste Columnne enthält die Temperatur, die zweite die Werthe von c , die dritte die von β . In der vierten

und fünften Columnne finden sich die Wege s und s_1 angegeben, welche vermöge der elastischen Nachwirkung der Faden bei den einzelnen Temperaturen in bestimmten Zeiten gemacht hat.

τ	c	β	von 600" — 1080"	von 780" — 1020"
10,00	129,3	0,001865	23,0	11,0
10,04 — 10,00	133,2	0,001899	23,4	11,2
10,41 — 10,03	121,1	0,001818	21,7	10,3
18,19 — 18,00	125,0	0,001749	22,8	
18,00 — 18,00	125,1	0,002080		
22,93 — 22,82	118,7	0,001453		11,1
22,96 — 23,0	129,6	0,001868	22,8	
29,24 — 29,4	113,4	0,001456	21,7	10,8
30,20	111,1	0,001491	21,1	
26,19 — 36,88	103,8	0,000983		9,9
36,4 — 36,36	114,7	0,001061		4,6

Ich füge noch folgende Tabelle für den Werth des Exponenten β aus einer größeren Anzahl von Beobachtungen hinzu; ich gebe in der Tabelle β multiplicirt mit 1000000.

τ	$\beta \cdot 1000000$
1) 10,00	1865
2) 10,04 — 10,00	1899
3) 10,41 — 10,34	1818
4) 10,90	2043
5) 11,08 — 11,04	2113
6) 12,2 — 12,4	1577
7) 18,00	2086
8) 18,09 — 18,00	1749
9) 18,28 — 18,20	1750
10) 18,18 — 18,20	2145
11) 18,41 — 17,9	1924
12) 22,93 — 22,82	1433
13) 22,38 — 22,19	1724
14) 22,96 — 23,00	1868
15) 22,88 — 23,14	2012
16) 23,10 — 23,11	1923

τ	$\beta \cdot 1000000$
17) 29,39 — 29,32	1229
18) 29,40 — 29,22	1303
19) 29,24 — 29,40	1456
20) 29,20	1391
21) 29,29	1626
22) 36,19 — 36,38	983
23) 36,4 — 36,36	1036

Allerdings scheint β anfänglich bis 18° um einen bestimmten Mittelwerth zu schwanken und dann mit steigender Temperatur zu sinken, ferner scheint c mit steigender Temperatur ebenfalls abzunehmen. Jedoch sind die Differenzen für die Werthe dieser Constanten bei derselben Temperatur so groß, daß sich auf diese Werthe kein Gesetz aufbauen läßt.

Die Größe des zurückgelegten Weges während einer bestimmten Zeit fällt offenbar mit wachsender Temperatur.

Ueber die Abhängigkeit des Coefficienten von der Torsionsdauer und dem Torsionswinkel habe ich bisher keine Messungen bei constanter Temperatur angestellt, da ich kein bestimmtes Resultat für die Abhängigkeit von der Temperatur erhalten. Meine früheren Versuche ergaben, daß β unabhängig ist von diesen beiden Bedingungen der Torsion, daß c mit zunehmender Torsionsdauer und Torsionswinkel wächst. Kohlrausch hatte dasselbe Resultat gewonnen.

§. 5. Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung, welche 1—2 Stunden nach Aufhebung der Torsion noch vorhanden war.

Wenn sich die elastische Nachwirkung, wie im Vorigen gezeigt ist, etwa bis 20—25' nach der Aufhebung der Torsion sehr genau durch die Formel $x = ce - \beta t$ darstellen läßt, so zeigt doch die Beobachtung des weiteren Verlaufes derselben, daß diese einfache Formel nicht genügt. Für die Aufstellung einer umfassenderen Formel diene mir als Anhalt die von O. E. Meyer angegebene

mathematische Theorie. Meyer entwickelt, wie schon oben erwähnt wurde, aus der Annahme, daß der Faden den Schwingungen einen Widerstand entgegensetze, welcher proportional der augenblicklichen Geschwindigkeit ist, eine Formel für die Schwingungsbewegung, aus deren Discussion sich ergibt, daß die Schwingungen allmählich aufhören können und nur noch eine einseitige Bewegung übrig bleibt. Diese einseitige Bewegung der elastischen Nachwirkung wird nach der Theorie dargestellt durch die Gleichung:

$$x = c \sum_n^{\infty} \frac{e^{-\beta t}}{\frac{a}{b} 2n - 1}$$

β ist eine Function von n und den beiden proportionalen Factoren a und b der die innere Reibung darstellenden Glieder. Später komme ich auf die Form von β zurück.

Dieser Gleichung entspricht die oben gefundene Function $x = ce^{-\beta t}$. Umfaßte dieselbe die ganze Bewegung, so könnte man mit dem ersten Gliede der obigen Summe auskommen. Da die Versuche ergaben, daß der Schluß der Bewegung der elastischen Nachwirkung nicht in der einfachen Exponentialformel enthalten ist, so versuchte ich, ob zwei Summanden aus jener Summe die Bewegung darstellten. Ich wandte also die Formel an

$$x = ce^{-\beta t} + c_1 e^{-\beta_1 t}.$$

Um nach derselben die Beobachtungen zu berechnen, nahm ich die beobachteten Scalentheile, welche abgelesen wurden, nachdem längere Zeit nach Aufhebung der Torsion verfloßen war, und berechnete aus diesen das letzte Glied $c_1 e^{-\beta_1 t}$. Mit den so erhaltenen Werthen von c_1 und β_1 berechnete ich die Werthe von $c_1 e^{-\beta_1 t}$, für $t = 10'$ oder $11'$ etc. Diese wurden von den beobachteten Werthen abgezogen und aus der Differenz die Werthe der Constanten in $ce^{-\beta t}$ berechnet. Die Berechtigung zu dieser Rechnungsweise fand ich in der Eigenschaft der beobachteten Werthe kurz nach Aufhebung der

Torsion, sich sehr genau durch eine Exponentialcurve darstellen zu lassen, welche 20' nach Aufhebung der Torsion nur noch wenig von ihrer Asymptote entfernt war. Es konnten deshalb die Werthe der ersten Curve $ce - \beta^t$ keinen großen Einfluß auf die später beobachteten Scalentheile haben. Es mußten natürlich zu beiden Functionen die schließliche Ruhelage berechnet werden nach der früher angegebenen Formel.

Zur Prüfung der erweiterten Formel mußte ein zweiter Satz von Beobachtungen angestellt werden, da die ersten Beobachtungen, von denen ich im vorigen Paragraphen mehrere ausführlich angegeben habe, nicht weit genug ausgedehnt waren. Die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werthen ist auch hier eine befriedigende, stellenweise außerordentlich gute. Zur Beurtheilung dieser Uebereinstimmung ist noch zu beachten, daß die Bewegung des Fadens manchmal, wie eine der nachstehenden Tabellen zeigen wird, Unregelmäßigkeiten zeigte, die ich nicht eliminiren konnte.

Ich gebe zuerst eine Tabelle, welche dem ersten Satze von Beobachtungen entnommen ist. Bei Versuch 10 des vorigen Paragraphen hatte ich bis 1 Stunde nach Aufhebung der Torsion beobachtet. Die Columnen haben dieselbe Bedeutung wie früher:

Temperatur = 29,40 — 29,22.

t	x		d
	beobachtet	berechnet	
570	72,3	72,3	$\pm 0,0$
630	68,2	68,1	$- 0,1$
690	64,4	64,3	$- 0,1$
750	61,1	61,1	$\pm 0,0$
810	58,1	58,1	$\pm 0,0$
870	55,4	55,4	$\pm 0,0$
930	53,1	53,0	$- 0,1$
990	50,9	50,9	$\pm 0,0$
1050	48,8	48,9	$+ 0,1$
1110	47,1	47,0	$- 0,1$
1170	44,2	45,3	$+ 0,1$

$$x = 91,9e^{-0,002946t} + 70,8e^{-0,000436t}$$

Dieser Versuch zeigt demnach eine außerordentlich genaue Uebereinstimmung der Beobachtung mit den berechneten x . Die erste Exponentialfunction giebt in der That für die späteren Zeiten, aus denen $c_1 e^{-\beta_1 t}$ berechnet ist, von 1620—3420" keine stark beeinflussenden Werthe; denn schon bei $t = 1170''$ ist

$$91,9 c^{-0,00294 h \cdot 1170} = 2,9.$$

Die entfernteren Werthe von x lieferten ebenfalls eine außerordentliche Uebereinstimmung mit den berechneten. Folgende Tabelle giebt dieselben wieder:

t	x		d
	beobachtet	berechnet	
1620	34,8	34,8	$\pm 0,0$
1920	30,5	30,5	"
2220	26,7	26,7	"
2520	23,5	23,5	"
2820	20,6	20,6	"
3120	18,1	18,1	"
3420	15,8	15,8	"

Aus dem zweiten Beobachtungssatze folgen nachstehend einige Tabellen:

$$\text{Temperatur} = 34,0 - 34,02.$$

t	x		d
	beobachtet	berechnet	
600	109,5	109,4	- 0,1
660	103,7	103,6	- 0,1
720	98,6	98,6	$\pm 0,0$
780	93,9	94,0	+ 0,1
840	89,8	90,0	+ 0,2
900	86,4	86,2	- 0,1
960	82,8	82,9	+ 0,1
1020	79,7	79,8	+ 0,1
1080	76,8	76,9	+ 0,1
1140	74,5	74,3	- 0,2
1200	71,8	71,9	+ 0,1
2400	41,3	41,4	+ 0,1
2700	36,0	36,0	$\pm 0,0$
3000	31,5	31,5	$\pm 0,0$
3300	27,5	27,7	+ 0,2
3600	24,0	24,4	+ 0,4
3900	21,0	21,4	+ 0,4
4200	18,3	18,2	- 0,1

$$x = 129,5 e^{-0,003151 t} + 119,9 e^{-0,000445 t}$$

Temperatur = 12,80°.

t	x		d
	beobachtet	berechnet	
600	101,6	101,6	$\pm 0,0$
660	96,5	96,6	$+ 0,1$
720	92,1	92,0	$- 0,1$
780	87,9	87,9	$\pm 0,0$
840	84,2	84,1	$- 0,1$
900	80,4	80,6	$+ 0,2$
960	77,4	77,3	$- 0,1$
1020	74,3	74,3	$\pm 0,0$
1080	71,4	71,5	$+ 0,1$
1140	69,0	63,9	$- 0,1$
1200	66,7	66,5	$\pm 0,0$

$$x = 962 e^{-0,002193t} + 96,5 e^{-0,000420t}$$

 $\tau = 25,00^\circ$.

t	x		d
	beobachtet	berechnet	
660	61,8	61,8	$\pm 0,0$
720	58,7	58,4	$- 0,3$
780	55,1	55,3	$+ 0,2$
840	52,4	52,5	$+ 0,1$
900	49,7	49,9	$+ 0,2$
960	47,7	47,6	$- 0,1$
1020	45,6	45,5	$- 0,1$
1080	43,8	43,6	$- 0,1$
1140	41,8	41,8	$\pm 0,0$
1200	39,8	40,1	$+ 0,3$

$$x = 83,9 e^{-0,002979t} + 69,9 e^{-0,000524t}$$

Die letzte der drei Reihen stimmt nicht so gut, wie die ersten, wenn sie auch immer ein befriedigendes Resultat giebt. Es tritt bei ihr die Unregelmäßigkeit in der Bewegung des Fadens auf, welche ich schon erwähnte, z. B. ist der beobachtete Weg zwischen 720" und 780" größer als der zwischen 660" und 720", während er, wenn die Bewegung ganz regelmäßig vor sich gegangen wäre, jedenfalls kleiner seyn müßte.

Die vorstehenden Tabellen mögen genügen, die übrigen Versuche zeigen eine gleiche Uebereinstimmung mit dem Gesetz $x = ce^{-\beta t} + c_1 e^{-\beta_1 t}$. Die Aenderung der Coef-

ficienten mit der Temperatur habe ich auch für diese genauere Formel nicht bestimmen können. So ergaben sich für den Exponenten β_1 aus den entfernteren Stellen folgende Werthe: In der Tabelle ist β_1 mit 1000000 multiplicirt aufgeführt.

t	$\beta_1 \cdot 1000000$	t	$\beta_1 \cdot 1000000$
13,00	403	30,60	410
13,00	573	31,00	583
14,00	411	31,20	499
14,40	442	31,20	547
27,90	357	34,00	396
28,20	488	34,00	423
29,40	438	34,00	341
		34,00	443

Es scheinen diese Exponenten um einen Mittelwerth zu schwanken. Derselbe ist

$$\beta_1 = 0,000457.$$

Mit demselben wurde auf die oben angegebene Weise die ganze Schwingungsbewegung berechnet; es ergaben sich dann folgende Werthe für die Constanten β , c und c_1 : Die erste Columnne enthält die Temperatur, die zweite die mit 1000000 multiplicirten Werthe von β , die dritte die ebenfalls mit 1000000 multiplicirten Mittelwerthe von β_1 , die letzten 3 Columnnen enthalten die Werthe von c , c_1 und $c + c_1$.

τ	$\beta \cdot 1000000$	$\beta_1 \cdot 1000000$	c	c_1	$c + c_1$
12,80	2314	457	89, 9	102,2	192,1
13,00	2562	"	157, 1	107,3	259,4
13,90 — 14,20	2562	"	136, 4	114,4	230,8
14,40	2087	"	42, 3	21,9	64,2
27,90 — 27,82	2397	"	91, 8	121,0	212,8
28,12	3876	"	197, 9	114,8	312,7
30,60 — 30,40	1799	"	104,40	121,9	226,3
31,20	2622	"	94, 8	67,5	162,3
34,2	3012	"	94, 2	117,4	211,6
34,00	3152	"	119, 4	125,5	244,9
34,10 — 34,00	3061	"	99, 6	115,2	214,8

In dieser Tabelle läßt sich keine Regelmäßigkeit erkennen, die einzelnen Beobachtungen bei denselben Tem-

peraturen weichen zu sehr von einander ab, so daß aus den Mittelwerthen nichts geschlossen werden darf. Es scheint mir im Gegensatz zu den Aenderungen der Constanten in der einfachen Formel $x = ce^{-\beta t}$, der Exponent β mit der Temperatur zu wachsen. Doch dann müßte auch β_1 mit der Temperatur variabel sein.

Die letzte Columnne ist hinzugefügt um die ganze Gröfse der elastischen Nachwirkung zu geben, dieselbe wird durch $c + c_1$ dargestellt. Auch hierin ist kein Gesetz zu erkennen.

Ebensowenig wie die Annahme der Constanz von β , auf eine gesetzmäßige Abhängigkeit von der Temperatur geführt hat, ebensowenig ist eine solche erhalten, wenn die berechneten Werthe von β_1 direct der weiteren Rechnung zu Grunde gelegt wurden. Folgende Tabelle enthält die hiermit berechneten Constanten:

t	$\beta \cdot 1000000$	$\beta_1 \cdot 1000000$	c	c_1	$c + c_1$
12,80	2933	521	160,4	114,6	275,0
13,00	2123	402	96,2	96,5	192,7
30,60 — 30,40	2974	524	83,9	69,9	153,8
34,00	3151	443	129,6	120,0	249,5
34,10	2621	341	113,1	105,3	218,4

Es ist mir somit nicht gelungen, die Abhängigkeit der Constanten der elastischen Nachwirkung von der Temperatur aufzufinden, ich denke die Versuche fortzusetzen, namentlich mit anderen Substanzen, deren Ruhelage nicht so sehr von der Temperatur abhängig ist, wie beim Kautschuck.

Die vorstehende Arbeit enthält indeß, wie ich nachgewiesen zu haben glaube, den experimentellen Beweis dafür, daß die Bewegung der elastischen Nachwirkung sich aus einfachen Exponentialcurven zusammensetzt, daß also die elastische Nachwirkung gefaßt wird durch die Gleichung

$$x = \sum ce^{-\beta t}.$$

Sonach entspricht allerdings die theoretisch von

Meyer abgeleitete Formel den experimentellen Resultaten, jedoch tritt dabei zwischen diesen und den Folgerungen Meyer's eine Differenz auf. Während sich nämlich aus Meyer's Schlüssen ergibt, daß die Exponenten β der Exponentialfunctionensumme $\sum c e^{-\beta t}$ zwischen den Grenzen $\frac{a}{b}$ und $\frac{1}{2} \frac{a}{b}$ liegen, daß also der kleinste Exponent höchstens ein halb mal so klein ist als der größte, zeigt die letzte Tabelle, daß zwischen den aus den Versuchen berechneten Werthen von β und β_1 ein viel bedeutenderer Unterschied vorliegt. Jedoch sind die vorstehend geschilderten experimentellen Resultate untereinander nicht so übereinstimmend, als daß wegen des letzterwähnten Punktes aus ihnen eine Entscheidung gegen die von Meyer aufgestellte Theorie der elastischen Nachwirkung getroffen werden könnte. Es müssen zu dem Zwecke noch umfassendere Versuche angestellt werden. Dabei kann noch auf einen anderen Punkt zur Prüfung der Theorie von Meyer geachtet werden. Der Exponent β ist nämlich durch folgende Gleichung nach der Theorie gegeben:

$$\beta = m b - \sqrt{m^2 b^2 - m^2 a^2}$$

b und a sind die proportionalen Factoren der Glieder in der Differentialgleichung der Bewegung, welche den Widerstand des Fadens ausdrücken. m ist $= \left(\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \right)^2$ worin λ die Länge des Fadens bedeutet und n den Modus, nach welchem in der Summe $\sum \frac{c}{2n-1} e^{-\beta t}$ summirt wird. Daraus geht hervor, daß die Exponenten β von der Länge des Fadens abhängig sind. Ob dieses die Beobachtung wirklich ergibt, kann ich erst zu constatiren suchen, wenn ich constante Resultate in Bezug auf die Temperatur erhalten.

Aus den 2 beobachteten Werthen von β lassen sich die Constanten a und b berechnen.

β hat einen Maximalwerth, wenn die Quadratwurzel

verschwindet, wenn also $mb = \frac{a}{b}$ ist. Dann hat β den Werth $\frac{a}{b}$. Darf man sich, wie bei den besprochenen Versuchen, mit 2 Exponentialfunctionen begnügen, so erhält man diese beiden ausgedrückt durch a und b , wenn man den größten Werth von β gleich dem Maximalwerth setzt. Das folgende β_1 ergibt sich, indem man das n , welches diesen Maximalwerth giebt, um 1 wachsen läßt. Aus $mb = \frac{a}{b}$ für den Maximalwerth folgt für n der Werth

$$n = \frac{\lambda \sqrt{a}}{\pi b} + \frac{1}{2}.$$

Setze ich nun in m für n die Gröfse $n + 1$ ein, also $\frac{\lambda \sqrt{a}}{\pi b} + \frac{3}{2}$, so erhalte ich β_1 . Das giebt

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 b - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{2\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cdot \frac{\pi}{\lambda} b^2} \\ &= b \left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right) \left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda} - \sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{2\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right)}\right) \end{aligned}$$

Sind β und β_1 durch die Beobachtung gegeben, so ergeben sich durch die Auflösung der Gleichungen für β und β_1 nach n und b die Werthe der beiden letzten Gröfßen.

Berlin, 20. Juni 1874.

Taf. IV.