Einige allgemeine Sätze über Raumcurven.

Von

ADOLF HURWITZ in Königsberg i. Pr.

I.

Werden die rechtwinkligen Coordinaten von vier Punkten P_0, P_1, P_2, P_3 durch die entsprechenden Indices von einander unterschieden, so stellt die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

bekanntlich das sechsfache Volumen des Tetraeders $P_0P_1P_2P_3$ vor und zwar (bei bestimmter Orientirung der Coordinatenaxen) positiv oder negativ genommen, je nachdem ein Beobachter, dessen Füße sich bei P_0 befinden und welcher gegen P_0P_1 gelehnt nach P_2 hinsieht, den Punkt P_3 zur Linken oder zur Rechten hat.

Es mögen nun P_2 und P_3 als zwei unendlich nahe Punkte einer Curve angenommen und dementsprechend ihre Coordinaten mit x, y, z resp. $x + dx, y + dy, z + dz$ bezeichnet werden, so ist die obige Determinante gleich

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 0 \end{vmatrix}.$$

Hiernach stellt das Integral

$$\frac{1}{6} \int \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 0 \end{vmatrix},$$

erstreckt über einen Curvenbogen, das positiv oder negativ genommene Volumen des Körpers dar, welcher begrenzt wird durch die den Curvenbogen aus P_0 und P_1 projecirenden Kegelstücke und durch die beiden Ebenen, welche die Endpunkte des Bogens mit der Geraden $P_0 P_1$ verbinden.

Hierbei ist jedoch zunächst vorausgesetzt, dass diese Begrenzungs-theile nur ein *einziges* Stück des Raumes einschliessen. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so dass also die genannten Kegelstücke und Ebenen mehrere Stücke des Raumes vom Volumen $S_1, S_2, \dots$ resp. vollständig begrenzen, so ist das obige Integral gleich einer linearen Combination aus $S_1, S_2, \dots$, wobei die Coefficienten ganze Zahlen sind. Diese Zahlen sind in jedem Falle leicht durch Zerlegung des Bogens und entsprechende Zerlegung des Integrals in einzelne Theile zu ermitteln*).

Beschreibt der Punkt (x, y, z) eine geschlossene Curve im Raume, so giebt das durch die ganze Curve erstreckte Integral

$$\frac{1}{6} \int \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \int \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix},$$

das Volumen, welches von den beiden die Curve von P_0 und P_1 aus projecirenden Kegeln eingeschlossen wird.

Wird der Punkt P_1 festgehalten, so hat dieses Volumen den constanten Werth κ für alle Punkte P_0 , welche in der Ebene

$$\begin{aligned} \kappa = (X - x_1) \frac{1}{6} \int (y dz - z dy) + (Y - y_1) \frac{1}{6} \int (z dx - x dz) \\ + (Z - z_1) \frac{1}{6} \int (x dy - y dx) \end{aligned}$$

liegen, wenn X, Y, Z die laufenden Coordinaten bezeichnen. Die Stellung dieser Ebene ist aber unabhängig von κ wie auch von x_1, y_1, z_1 , sie ist also durch die geschlossene Curve vollständig bestimmt. Hieraus folgert man den

Satz 1. „Zu jeder geschlossenen Curve im Raume gehört eine bestimmte Schaar paralleler Ebenen von folgender Eigenschaft. Nimmt man in irgend zwei Ebenen Σ_0 und Σ_1 dieser Schaar je einen Punkt P_0 resp. P_1 an, so begrenzen die Kegel, welche die geschlossene Curve von P_0 und P_1 aus projeciren, ein Raumstück, welches dasselbe Volumen hat, wo auch immer der Punkt P_0 in der Ebene Σ_0 und der Punkt P_1 in der Ebene Σ_1 angenommen werden mag.“

*) Aehnliches ist im Folgenden mehrfach zu bemerken.

Wählt man die Gerade $P_0 P_1$ zur z -Axe, so ergibt sich für das betrachtete Volumen der Ausdruck

$$\frac{z_0 - z_1}{3} \int \frac{x dy - y dx}{2} = \frac{\varrho}{3} \cdot F,$$

wo ϱ die Entfernung der Punkte P_0 und P_1 von einander und F den Inhalt der Projection der geschlossenen Curve auf eine zu $P_0 P_1$ senkrechte Ebene bedeutet.

Nach dem vorhergehenden Satze bleibt daher das Product $\varrho \cdot F$ constant, wenn der Punkt P_1 festgehalten wird, während P_0 sich in Σ_0 bewegt. Es verhalten sich daher die verschiedenen Projectionen F der Curve umgekehrt, wie die entsprechenden Entfernungen $\varrho = P_1 P_0$. Die Projection wird demnach am grössten, wenn $P_1 P_0$ am kleinsten wird, d. h. wenn $P_1 P_0$ zu Σ_0 senkrecht ist. Also folgt

Satz 2. „Die Projection der geschlossenen Curve auf die Ebenen der im Satze 1 genannten Schaar hat eine grössere Fläche als die Projection der Curve auf irgend eine nicht zu jener Schaar gehörige Ebene“^{*)}.

Da das Product $\varrho \cdot F$ mit ϱ und F constant bleibt, so ergibt sich unmittelbar der

Satz 3. „Zeichnet man auf einen Cylinder von beliebiger Basis eine geschlossene (jede Erzeugende des Cylinders im Allgemeinen nur einmal treffende) Curve und projicirt dieselbe von irgend zwei Punkten aus, deren Verbindungsgerade zu den Erzeugenden des Cylinders parallel läuft, so ist das von den Projectionskegeln eingeschlossene Volumen dasselbe für alle überhaupt möglichen Curven der genannten Art.“

Schliesslich sei noch bemerkt, dass man den wesentlichen Inhalt des Satzes 1. auch so formuliren kann:

„Man denke sich eine beliebige geschlossene Fläche (z. B. eine Kugel) und auf dieser eine in sich zurücklaufende Curve C gezeichnet. Einen der beiden Theile, in welche die Fläche durch diese Curve zerfällt, entferne man, so dass eine Art offener Schale übrig bleibt, deren Rand von der Curve C gebildet wird. Nun projicire man die Curve von irgend einem Punkte P aus durch einen geradlinigen Kegel und beachte das Volumen des Raumstückes, welches von der Kegelfläche und jener Schale eingeschlossen wird. Der Ort aller Punkte P , für welche dieses Volumen einen gegebenen Werth besitzt, ist eine bestimmte Ebene Σ , und die zu wechselnden Werthen des Volumens gehörenden Ebenen Σ sind sämmtlich unter einander parallel.“

Für den Fall, dass die Curve C eine ebene Curve ist, leuchtet die Richtigkeit des Satzes unmittelbar ein.

^{*)} Die Existenz einer solchen Maximalprojection ist bekannt. Siehe z. B. R. Hayward in den Proceedings of the London Mathem. Society Bd. 4, pag. 289.

II.

Ein Curvenbogen P_0P_1 habe die Eigenschaft, dass jede durch seine Endpunkte P_0 und P_1 gehende Ebene den Bogen ausser in P_0 und P_1 höchstens noch ein Mal schneidet. Dann werden die Kegelstücke, welche den Bogen von P_0 und P_1 aus projeciren, ein einziges Raumstück vollständig begrenzen. Das Volumen dieses Raumstückes möge mit V_b bezeichnet werden.

Sind x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der Punkte P_0 und P_1 resp., so ist der analytische Ausdruck des genannten Volumens

$$V_b = \pm \frac{1}{6} \int \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix},$$

das Integral erstreckt über den Curvenbogen von P_0 bis P_1 .

Andererseits betrachte man die Tangenten und Schmiegungebenen des Bogens in den Endpunkten P_0 und P_1 . Die Tangente in P_0 treffe die Schmiegungebene von P_1 in dem Punkte Q_0 , die Tangente in P_1 treffe die Schmiegungebene von P_0 in dem Punkte Q_1 . Das Volumen des von den vier Punkten P_0, Q_0, P_1, Q_1 gebildeten Tetraeders möge mit V_t bezeichnet werden.

Die beiden Volumina V_b und V_t stehen nun in einer beachtenswerthen Beziehung zu einander, welche in folgendem Satze ausgesprochen ist:

„Nimmt man auf einer beliebigen Curve irgend einen nicht singulären Punkt P_0 an und lässt einen zweiten, veränderlichen Punkt P_1 der Curve allmählich dem festbleibenden Punkte P_0 unendlich nahe kommen, so ist der Grenzwert, welchem das Verhältniss der zu dem Bogen P_0P_1 gehörenden Volumina V_b und V_t zustrebt, gleich $\frac{3}{10}$, also unabhängig sowohl von der Natur der Curve als auch von der Wahl des festen Punktes P_0 auf derselben.“

Zum Beweise möge der Punkt P_0 als Anfangspunkt der Coordinaten, die Tangente resp. Schmiegungeebene in P_0 als x -Axe resp. xy -Ebene angenommen werden. Die Gleichungen der Curve auf dieses Coordinatensystem bezogen seien:

$$x = A \cdot t + \dots,$$

$$y = B \cdot t^2 + \dots,$$

$$z = C \cdot t^3 + \dots,$$

und es möge dem Punkte P_1 der Parameter t_1 zugehören. Die Coefficienten A, B, C werden von Null verschieden sein, da P_0 als ein nicht singulärer Punkt der Curve vorausgesetzt ist. Das Volumen V_b , welches zum Bogen P_0P_1 gehört, ist nun in erster Annäherung:

$$V_b = \pm \frac{1}{6} \int_0^{t_1} \begin{vmatrix} At_1, & Bt_1^2, & Ct_1^3 \\ At, & Bt^2, & Ct^3 \\ A, & 2Bt, & 3Ct^2 \end{vmatrix} dt$$

$$= \pm \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 6} \cdot A \cdot B \cdot C \cdot t_1^6.$$

Die Coordinaten der Eckpunkte des Tetraeders $P_0 Q_0 P_1 Q_1$ sind resp.

$$\begin{array}{llll} (P_0) & x=0 & , & y=0 & , & z=0 & , \\ (P_1) & x=At_1+\dots & , & y=Bt_1^2+\dots & , & z=Ct_1^3+\dots & , \\ (Q_0) & x=\frac{1}{3}At_1+\dots & , & y=0 & , & z=0 & , \\ (Q_1) & x=\frac{2}{3}At_1+\dots & , & y=\frac{1}{3}Bt_1^2+\dots & , & z=0 & . \end{array}$$

Also das Volumen V_t desselben in erster Annäherung:

$$V_t = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & , & 0 & , & 0 & , & 1 \\ At_1 & , & Bt_1^2 & , & Ct_1^3 & , & 1 \\ \frac{2}{3}At_1 & , & \frac{1}{3}Bt_1^2 & , & 0 & , & 1 \\ \frac{1}{3}At_1 & , & 0 & , & 0 & , & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} \cdot A \cdot B \cdot C \cdot t_1^6.$$

Folglich ist

$$\lim \frac{V_b}{V_t} = \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 6} : \frac{1}{6 \cdot 9} = \frac{3}{10},$$

was zu beweisen war.

Dieser Satz ist das räumliche Analogon zu einem bekannten Satze aus der Geometrie der Ebene:

Das Verhältniss eines unendlich kleinen Curvensegments zu der Fläche des Dreiecks, welches aus der begrenzenden Sehne und den Tangenten in den Endpunkten der letzteren gebildet wird, besitzt den Werth $\frac{2}{3}$ *).

Die Analogie lässt sich noch weiter verfolgen. In der Ebene giebt es eine Curve, nämlich die Parabel, für welche jener Satz nicht nur für unendlich kleine Segmente, sondern auch für beliebige endliche Segmente gilt. Im Raume besteht der entsprechende Satz:

„Die zu einem beliebigen Bogen einer cubischen Parabel (Raumcurve 3. Ordnung, welche die unendlich ferne Ebene osculirt) gehörenden Volumina V_b und V_t verhalten sich wie 3 zu 10.“

*) Siehe z. B. Völler, Grunert's Archiv Bd. 31, — Schlömilch, Zeitschrift für Mathem. u. Physik Bd. 4, pag. 163.

Zum Beweise bemerke man, dass irgend zwei cubische Parabeln affin stets so aufeinander bezogen werden können, dass zwei beliebig gewählten Punkten der einen Curve zwei beliebig gewählte Punkte der andern Curve entsprechen. Daraus geht hervor, dass das im Satze genannte Verhältniss dasselbe ist für irgend zwei verschiedene Bogen derselben oder verschiedener cubischen Parabeln. Da das Verhältniss für unendlich kleine Bogen den Werth $\frac{3}{10}$ besitzt, so ist es allgemein gleich $\frac{3}{10}$.

Die letzten beiden Sätze lassen sich noch dadurch ergänzen, dass man das Volumen V_b' in Betracht zieht, welches die Ebenen $Q_0 Q_1 P_0$, $Q_0 Q_1 P_1$ und die den Bogen $P_0 P_1$ von Q_0 und Q_1 aus projecirenden Kegelstücke einschliessen. Es gilt nämlich die Proportion

$$V_b : V_b' : V_t = 3 : 9 : 10$$

für jeden Bogen einer cubischen Parabel und für unendlich kleine Bogen einer beliebigen Curve.

Göttingen, Mai 1883.