ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 762.

Ueber die Bestimmung einer Cometenbahn aus geocentrischen Beobachtungen,
von Dr. William Charles Goetze.
(Fortsetzung von Nr. 761).

Setzt man daher:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D} &= + \frac{h \cos(H-G'') \cos \frac{1}{2} \nu + h'' \cos(H''-G'') \cos \frac{1}{2} \nu''}{g \sin(G''-G)} \\ \mathcal{D}'' &= + \frac{h \cos(H-G) \cos \frac{1}{2} \nu + h'' \cos(H''-G) \cos \frac{1}{2} \nu''}{g'' \sin(G''-G)} \\ \mathcal{D}''' &= v'' + v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (177)$$

so wird endlich:

$$\delta(\nu'' + \nu) = -\frac{\mathcal{D}}{q} \cdot \delta A + \frac{\mathcal{D}''}{q} \cdot \delta A'' + (\mathcal{D}_\rho - \mathcal{D}''\rho'' + \mathcal{D}''') \cdot \delta e \dots\dots\dots (178)$$

und damit:

$$\delta\psi_0 = \left(\frac{1}{2} \frac{\mathcal{D}}{q} \cdot \delta A + \frac{1}{2} \frac{\delta B}{r} \right) + \left(-\frac{1}{2} \frac{\mathcal{D}''}{q} \cdot \delta A'' + \frac{1}{2} \frac{\delta B''}{r''} \right) - \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\rho - \mathcal{D}''\rho'' + \mathcal{D}''') \delta e \dots\dots\dots (179)$$

Setzt man nun:

$$\mathcal{D}_4 = -\frac{1}{2} \{ \mathcal{D}_\rho - \mathcal{D}''\rho'' + \mathcal{D}''' \} \dots\dots\dots (180)$$

so wird ferner, mit Hülfe von (123) und (128):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\psi_0}{dl} \right) &= + \frac{\Delta \mathcal{D} \cos b}{2q} \cdot \cos r f + \frac{\Delta \cos b}{2r} \cdot \cos \delta f + \mathcal{D}_4 \left(\frac{de}{dl} \right) \\ \left(\frac{d\psi_0}{db} \right) &= + \frac{\Delta \mathcal{D}}{2q} \cdot \cos r e + \frac{\Delta}{2r} \cdot \cos \delta e + \mathcal{D}_4 \left(\frac{de}{db} \right) \\ \left(\frac{d\psi_0}{d\Delta} \right) &= + \frac{\Delta \mathcal{D}}{2q} \cdot \cos r b + \frac{1}{2r} \cdot \cos \delta b + \mathcal{D}_4 \left(\frac{de}{d\Delta} \right) \\ \left(\frac{d\psi_0}{dl''} \right) &= - \frac{\Delta'' \mathcal{D}'' \cos b''}{2q} \cdot \cos r'' f'' + \frac{\Delta'' \cos b''}{2r''} \cdot \cos \delta'' f'' + \mathcal{D}_4 \left(\frac{de}{dl''} \right) \\ \left(\frac{d\psi_0}{db''} \right) &= - \frac{\Delta \mathcal{D}''}{2q} \cdot \cos r'' e'' + \frac{\Delta''}{2r''} \cdot \cos \delta'' e'' + \mathcal{D}_4 \left(\frac{de}{db''} \right) \\ \left(\frac{d\psi_0}{d\Delta''} \right) &= - \frac{\mathcal{D}''}{2q} \cdot \cos r'' b'' + \frac{1}{2r''} \cdot \cos \delta'' b'' + \mathcal{D}_4 \left(\frac{de}{d\Delta''} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (181)$$

oder wenn man die Werthe $\left(\frac{de}{dl} \right)$, $\left(\frac{de}{db} \right)$, $\left(\frac{de}{d\Delta} \right)$, $\left(\frac{de}{dl''} \right)$, $\left(\frac{de}{db''} \right)$, $\left(\frac{de}{d\Delta''} \right)$, mittelst der Gleich. (171) eliminiert, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\psi_0}{dl} \right) &= + \left\{ \frac{\mathcal{D}}{2q} + \frac{\mathcal{D}_4 \mathcal{G}}{\mathcal{G}_4 q} \right\} \Delta \cos b \cos r f + \left\{ \frac{1}{2r} + \frac{\mathcal{D}_4}{\mathcal{G}_4 r} \right\} \Delta \cos b \cos \delta f \\ \left(\frac{d\psi_0}{db} \right) &= + \left\{ \frac{\mathcal{D}}{2q} + \frac{\mathcal{D}_4 \mathcal{G}}{\mathcal{G}_4 q} \right\} \Delta \cos r e + \left\{ \frac{1}{2r} + \frac{\mathcal{D}_4}{\mathcal{G}_4 r} \right\} \Delta \cos \delta e \\ \left(\frac{d\psi_0}{d\Delta} \right) &= + \left\{ \frac{\mathcal{D}}{2q} + \frac{\mathcal{D}_4 \mathcal{G}}{\mathcal{G}_4 q} \right\} \cos r b + \left\{ \frac{1}{2r} + \frac{\mathcal{G}_4 r}{\mathcal{D}_4} \right\} \cos \delta b \\ \left(\frac{d\psi_0}{dl''} \right) &= - \left\{ \frac{\mathcal{D}''}{2q} + \frac{\mathcal{D}_4 \mathcal{G}''}{\mathcal{G}_4 q} \right\} \Delta'' \cos b'' \cos r'' f'' + \left\{ \frac{1}{2r''} - \frac{\mathcal{D}_4}{\mathcal{G}_4 r''} \right\} \Delta'' \cos b'' \cos \delta'' f'' \\ \left(\frac{d\psi_0}{db''} \right) &= - \left\{ \frac{\mathcal{D}''}{2q} + \frac{\mathcal{D}_4 \mathcal{G}''}{\mathcal{G}_4 q} \right\} \Delta'' \cos r'' e'' + \left\{ \frac{1}{2r''} - \frac{\mathcal{D}_4}{\mathcal{G}_4 r''} \right\} \Delta'' \cos \delta'' e'' \\ \left(\frac{d\psi_0}{d\Delta''} \right) &= - \left\{ \frac{\mathcal{D}''}{2q} + \frac{\mathcal{D}_4 \mathcal{G}''}{\mathcal{G}_4 q} \right\} \cos r'' b'' + \left\{ \frac{1}{2r''} - \frac{\mathcal{D}_4}{\mathcal{G}_4 r''} \right\} \cos \delta'' b'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (182)$$

und damit hat man endlich die totale Variation des Elementes ψ_0 , indem:

$$\delta\psi_0 = \left(\frac{d\psi_0}{dl}\right) \cdot \delta l + \left(\frac{d\psi_0}{db}\right) \cdot \delta b + \left(\frac{d\psi_0}{d\Delta}\right) \cdot \delta\Delta + \left(\frac{d\psi_0}{dl''}\right) \cdot \delta l'' + \left(\frac{d\psi_0}{db''}\right) \cdot \delta b'' + \left(\frac{d\psi_0}{d\Delta''}\right) \cdot \delta\Delta'' \dots (183)$$

Um die totalen Variationen des Knotens Ω_0 und der Inclination i_0 zu bestimmen, kann man folgendermaassen verfahren, es ist nämlich, nach (122) und (127):

$$\left. \begin{aligned} \sin u_0 \delta i_0 - \cos u_0 \sin i_0 \delta \Omega_0 &= \frac{\partial C}{r} \\ \sin u_0'' \delta i_0 - \cos u_0'' \sin i_0 \delta \Omega_0 &= \frac{\partial C''}{r''} \end{aligned} \right\} \dots (184)$$

Durch Elimination findet sich alsdann, dass:

$$\sin(u_0'' - u_0) \sin i_0 \cdot \delta \Omega_0 = \frac{\sin u_0}{r''} \cdot \partial C'' - \frac{\sin u_0''}{r} \cdot \partial C \dots (185)$$

sowie ebenfalls, dass:

$$\sin(u_0'' - u_0) \cdot \delta i_0 = \frac{\cos u_0}{r''} \cdot \partial C'' - \frac{\cos u_0''}{r} \cdot \partial C \dots (186)$$

Substituirt man nun die Werthe für ∂C und $\partial C''$ aus (123) und (128) in den Ausdruck unter (185), so folgt unmittelbar:

$$\delta \Omega_0 = \left(\frac{d\Omega_0}{dl}\right) \cdot \delta l + \left(\frac{d\Omega_0}{db}\right) \cdot \delta b + \left(\frac{d\Omega_0}{d\Delta}\right) \cdot \delta\Delta + \left(\frac{d\Omega_0}{dl''}\right) \cdot \delta l'' + \left(\frac{d\Omega_0}{db''}\right) \cdot \delta b'' + \left(\frac{d\Omega_0}{d\Delta''}\right) \cdot \delta\Delta'' \dots (188)$$

Ebenso leicht lässt sich nun auch δi_0 finden, denn aus (186) folgt, mit Rücksicht auf (123) und (128), dass:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{di_0}{dl}\right) &= -\frac{\Delta \cos u_0'' \cos b}{r \sin(u_0'' - u_0)} \cdot \cos w f \\ \left(\frac{di_0}{db}\right) &= -\frac{\Delta \cos u_0''}{r \sin(u_0'' - u_0)} \cdot \cos w e \\ \left(\frac{di_0}{d\Delta}\right) &= -\frac{\cos u_0''}{r \sin(u_0'' - u_0)} \cdot \cos w d \\ \left(\frac{di_0}{dl''}\right) &= +\frac{\Delta \cos u_0 \cos b''}{r'' \sin(u_0'' - u_0)} \cdot \cos w f'' \\ \left(\frac{di_0}{db''}\right) &= +\frac{\Delta \cos u_0}{r'' \sin(u_0'' - u_0)} \cdot \cos w e'' \\ \left(\frac{di_0}{d\Delta''}\right) &= +\frac{\cos u_0}{r'' \sin(u_0'' - u_0)} \cdot \cos w d'' \end{aligned} \right\} \dots (189)$$

woraus man endlich die totale Variation des Elementes i_0 oder der Inclination erhält, es ist nämlich:

$$\delta i_0 = \left(\frac{di_0}{dl}\right) \cdot \delta l + \left(\frac{di_0}{db}\right) \cdot \delta b + \left(\frac{di_0}{d\Delta}\right) \cdot \delta\Delta + \left(\frac{di_0}{dl''}\right) \cdot \delta l'' + \left(\frac{di_0}{db''}\right) \cdot \delta b'' + \left(\frac{di_0}{d\Delta''}\right) \cdot \delta\Delta'' \dots (190)$$

Wollte man statt des Elementes ψ_0 , das Element ω_0 oder auch π_0 einführen, so würde dieses sehr leicht geschehen können, indem man sich nur zu erinnern braucht, dass:

$$\delta\psi_0 = \delta\omega_0 + \cos i_0 \cdot \delta \Omega_0 = \delta\pi_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i_0 \cdot \delta \Omega_0 \dots (191)$$

und folglich auch, dass:

$$\delta\omega_0 = \delta\psi_0 - \cos i_0 \cdot \delta \Omega_0 \dots (192)$$

$$\delta\pi_0 = \delta\psi_0 + 2 \sin^2 \frac{1}{2} i_0 \delta \Omega_0 \dots (193)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\Omega_0}{dl}\right) &= -\frac{\Delta \sin u_0'' \cos b}{r \sin(u_0'' - u_0) \sin i_0} \cdot \cos w f \\ \left(\frac{d\Omega_0}{db}\right) &= -\frac{\Delta \sin u_0''}{r \sin(u_0'' - u_0) \sin i_0} \cdot \cos w e \\ \left(\frac{d\Omega_0}{d\Delta}\right) &= -\frac{\sin u_0''}{r \sin(u_0'' - u_0) \sin i_0} \cdot \cos w d \\ \left(\frac{d\Omega_0}{dl''}\right) &= +\frac{\Delta'' \sin u_0 \cos b''}{r'' \sin(u_0'' - u_0) \sin i_0} \cdot \cos w f'' \\ \left(\frac{d\Omega_0}{db''}\right) &= +\frac{\Delta'' \sin u_0}{r'' \sin(u_0'' - u_0) \sin i_0} \cdot \cos w e'' \\ \left(\frac{d\Omega_0}{d\Delta''}\right) &= +\frac{\sin u_0}{r'' \sin(u_0'' - u_0) \sin i_0} \cdot \cos w d'' \end{aligned} \right\} \dots (187)$$

und damit erhält man die totale Variation des Elementes Ω_0 oder des Knotens folgendermaassen:

Um $\delta\omega_0$ oder $\delta\pi_0$ zu finden, würde es daher nur nöthig sein, die Ausdrücke unter (187) mit denen unter (181) oder (182) zu verbinden; und auf ähnliche Weise wie früher zu verfahren; doch unterlasse ich es die Ausdrücke für $\delta\omega$ oder $\delta\pi_0$ herzusetzen, weil sie bei allen später folgenden Untersuchungen nicht gebraucht werden. Es ist ferner zu bemerken, dass die Variation $\delta\psi_0$ gänzlich von der Lage der Ebene unab-

hängig ist, auf welche man die Bahnebene beziehen will, indem nämlich

$$\delta\psi_0 = \delta\omega_0 + \cos i_0 \delta\Omega_0 = \delta\pi_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i_0 \cdot \delta\Omega_0 \dots (194)$$

stets eine particuläre Constante *) sein wird, wie man auch die Lage der Ebene abändern möge, auf welche sich ω_0 und Ω_0 beziehen. Obgleich sich daher die Werthe von $\delta\omega_0$ und $\delta\Omega_0$, bei einer Aenderung in der Lage der Ebene (I)

ändern, so wird dieses bei $\delta\psi_0$ nicht der Fall sein; ähnliches gilt von dem Ausdrucke:

$$\frac{\delta C}{r} = \sin u_0 \cdot \delta i_0 - \cos u_0 \sin i_0 \delta\Omega_0 \dots (195)$$

der ebenfalls in Bezug auf eine Verlegung der Ebene (I) seinen Werth nicht ändert. Bezeichnet man daher durch ω , Ω , i , π und u , dasselbe in Bezug auf die allgemeine Ebene (II), wie durch ω_0 , Ω_0 , i_0 , π_0 und u_0 für die Ebene (I), so folgt:

$$\text{Constans *) par.} = \delta\psi_0 = \delta\omega_0 + \cos i_0 \cdot \delta\Omega_0 = \delta\omega + \cos i \cdot \delta\Omega \dots (196)$$

$$\text{Constans *) par.} = \delta\psi_0 = \delta\pi_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i_0 \cdot \delta\Omega_0 = \delta\pi - 2 \sin^2 \frac{1}{2} i \cdot \delta\Omega \dots (197)$$

$$\frac{\delta C}{r} = \sin u_0 \cdot \delta i_0 - \cos u_0 \sin i_0 \cdot \delta\Omega_0 = \sin u \cdot \delta i - \cos u \sin i \cdot \delta\Omega \dots (198)$$

wobei man sich zu erinnern hat, dass die Ebene (I) und (II) nicht von einander abhängig sind, und jede beliebige Lage haben können. Aus (198), folgen noch zwei andere interessante Relationen, denn da:

$$\begin{aligned} \sin u_0 &= \sin(\nu + \omega_0) = \sin \nu \cos \omega_0 + \cos \nu \sin \omega_0 \\ \cos u_0 &= \cos(\nu + \omega_0) = \cos \nu \cos \omega_0 - \sin \nu \sin \omega_0 \\ \sin u &= \sin(\nu + \omega) = \sin \nu \cos \omega + \cos \nu \sin \omega \\ \cos u &= \cos(\nu + \omega) = \cos \nu \cos \omega - \sin \nu \sin \omega \end{aligned}$$

so wird auch nach (198):

$$\frac{\delta C}{r} = (\cos \omega_0 \delta i + \sin \omega_0 \sin i_0 \delta\Omega_0) \sin \nu + (\sin \omega_0 \delta i_0 - \cos \omega_0 \sin i_0 \delta\Omega_0) \cos \nu$$

und da hier ν gänzlich willkürlich genommen werden kann, so folgt auch, dass:

$$\text{Constans *) par.} = \cos \omega_0 \delta i_0 + \sin \omega_0 \sin i_0 \delta\Omega_0 = \cos \omega \delta i + \sin \omega \sin i \delta\Omega \dots (199)$$

$$\text{Constans *) par.} = \sin \omega_0 \delta i_0 - \cos \omega_0 \sin i_0 \delta\Omega_0 = \sin \omega \delta i - \cos \omega \sin i \delta\Omega \dots (200)$$

durch welche Gleichungen, in Verbindung mit (196) und (197), der vollständige Zusammenhang, zwischen $\delta\omega_0$, $\delta\pi_0$, $\delta\Omega_0$, δi_0 und $\delta\omega$, $\delta\pi$, $\delta\Omega$, δi gegeben ist.

Aus den in diesem Paragraphen gegebenen, allgemeinen Differenzialgleichungen von (122)–(190), ersieht man nun, dass die Auflösung des an sich complicirten Problems, die Grössen δT , δq , δe , $\delta\psi$, $\delta\Omega$ und δi , nach δl , δb , $\delta\Delta$, $\delta l''$, $\delta b''$, $\delta\Delta''$ zu entwickeln, sich, mittelst der von mir eingeschlagenen Wege, ziemlich elegant gestaltet, und man wird jetzt leicht folgendes, sehr allgemein gehaltenes Problem lösen können:

*„Eine Bahn zu finden, welche zwei vollständige Beobachtungen τ , l , b und τ'' , l'' , b'' vollkommen darstellt, und zugleich zwei anderen vorgeschriebenen Bedingungen genau entspricht; also z. B. zwei vorherbestimmten Bahn-Elementen, oder irgend zwei beliebigen, vorgeschriebenen Coordinaten, wobei der Ausdruck *Coordinate* im allgemeinsten Sinne zu nehmen ist.“*

Unter diesem Probleme sind eigentlich alle Methoden enthalten, die zur II. Stufe gehören, also auch die von mir später in den Abschnitten (III) und (IV) dieser Abhandlung gelehrteten Methoden, und es lassen sich überhaupt, beinahe ohne alle weitere Mühe, mittelst der unter (122)–(190) gegebenen Relationen, alle früheren, sogenannten Correctionsmethoden *), bei denen man drei Rechnungshypothesen machte, gewissermaassen zu directen Methoden

*) Der Ausdruck „Constans par.“ soll hier blos anzeigen, dass die obigen Relationen zwischen $\delta\psi_0$, δi_0 und $\delta\Omega_0$ durch eine Aenderung in der Lage der Ebene (I) nicht afficirt werden.

*) Darunter sind alle diejenigen Correctionsmethoden zu zählen, welche man in der Olbers'schen Abhandlung, „über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen“, von §. 64 bis §. 81 angegeben findet; andere hierher gehörige Correctionsmethoden findet man in den §§. 124–130 der Theor. mot. corp. coel. näher erörtert, und alle diese Correctionsmethoden beruhen bekanntlich darauf, dass man mehrere (gewöhnlich zwei) Unbekannte annimmt, deren Werthe durch eine vorläufige Bahnberechnung schon genähert gegeben sind, alsdann durch Hülfe von drei numerischen Hypothesen, unter successiver Aenderung der zu Grunde gelegten Werthe der Unbekannten, die Differenzialquotienten von anderen, entweder durch die Rechnung, oder auch aus der Beobachtung, bekannten Grössen,

umgestalten, indem es möglich ist, mit Hilfe der Gleichungen unter (122)–(190), die Differenzialquotienten irgend einer beliebigen Coordinate, (wobei der Ausdruck Coordinate, im allgemeinsten Sinne zu nehmen ist), nach den Elementen des Himmelskörpers, oder auch nach beliebigen Functionen der Elemente, ohne alle numerischen Substitutionen und Rechnungsversuche auf ganz directe Weise zu finden, wodurch also die Auflösung des Problems der II. Stufe, in höchster Allgemeinheit genommen, zuletzt auf lineäre Gleichungen führen muss, in denen die Coefficienten der unbekannten Grössen, sich nach meinen Methoden auf ganz directe Weise finden lassen werden. Alle früheren Geometer und Astronomen scheinen den Weg der directen Entwicklung der Differenzialquotienten zur Erfindung der II. Stufe sorgfältig vermieden zu haben, und zwar wahrscheinlich deshalb, weil sie vorausszusehen glaubten, dass die Endausdrücke derselben, für die numerische Rechnung viel zu weitläufig ausfallen würden, um practisch brauchbar sein zu können; sie zogen es daher vor, auf ganz mechanische und sehr kunstlose Weise, zur Bestimmung der Differenzialquotienten auf einem Wege zu gelangen, der jedenfalls immer nur sehr ungenaue Resultate geben kann, wenn man bei den einzelnen Operationen nicht mit sehr grosser Schärfe rechnen will; denn wollte man sich die Rechnung dadurch abkürzen, dass man die Werthe der Unbekannten, bei den in der vorhergehenden Note erwähnten Correctionsmethoden, sehr stark änderte, um auf diese Weise bei der numerischen Bestimmung der Differenzialquotienten mit wenigerstelligen Logarithmen auszukommen, so würde man sich leicht vom Ziele entfernen können, indem es im Voraus noch nicht bekannt ist, nach welcher Seite die Correctionen der Unbekannten hinfallen werden; es würden also auch die Werthe, die auf solche Weise bestimmt worden wären, von

den wirklichen Werthen stark abweichen können, ja zuweilen sogar gänzlich entstellt sein.

Es bleibt jedoch immer merkwürdig, dass man bei der II. Stufe der Bahnbestimmung, die Differenzialrechnung nicht direct anwandte, sondern es lieber vorzog, dasjenige was durch dieselbe direct und abgeschlossen erhalten werden kann, durch numerische Versuche zu erzielen, die in der Regel missliche Resultate geben, bei denen keine Prüfungen stattfinden, wenn man nicht etwa schon nahe am Schlusse der ganzen Rechnung ist, und die, das Wenigste gesagt, schon deswegen verwerflich sind, weil man bei ihnen mit ebenso vielziffrigen Logarithmen rechnen muss, als zur Hauptrechnung selbst erforderlich sind, wogegen bei der Bestimmung der Differenzialquotienten nach meinen Methoden, 4stellige Logarithmen mehr als genügend sind.

§ 19.

Specielle Fälle.

1) Für den besonderen Fall, dass die beiden Bahnsysteme Σ und Σ'' sich genau an dieselben beiden vollständigen Beobachtungen τ, l, b und τ'', l'', b'' anschliessen sollen, hat man $\delta l = 0$; $\delta b = 0$; $\delta l'' = 0$; $\delta b'' = 0$, und alsdann wird nach den Gleichungen (171) in §. 18:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{G}_4 \cdot \left(\frac{de}{d\Delta} \right) &= + \frac{\mathfrak{G}}{q} \cdot \cos r \, b + \frac{1}{r} \cos s \, b \\ \mathfrak{G}_4 \cdot \left(\frac{de}{d\Delta''} \right) &= - \frac{\mathfrak{G}''}{q} \cdot \cos r'' \, b'' - \frac{1}{r''} \cos s'' \, b'' \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

mithin auch:

$$\delta e = \left(\frac{de}{d\Delta} \right) \cdot \delta \Delta + \left(\frac{de}{d\Delta''} \right) \cdot \delta \Delta'' \dots \dots \dots (202)$$

und für die Variationen der übrigen Elemente nach Δ und Δ'' , hat man folgende Relationen:

$$\frac{x \sqrt{1+\mu}}{\sqrt{p}} \cdot \delta T = \left\{ \frac{\cos G''}{g \sin(G''-G)} \cdot \cos r \, b - \mathfrak{X} \left(\frac{de}{d\Delta} \right) \right\} \cdot \delta \Delta - \left\{ \frac{\cos G}{g'' \sin(G''-G)} \cdot \cos r'' \, b'' + \mathfrak{X} \left(\frac{de}{d\Delta''} \right) \right\} \cdot \delta \Delta'' \dots \dots \dots (203)$$

$$\delta q = \left\{ \frac{\sin G''}{g \sin(G''-G)} \cdot \cos r \, b - \mathfrak{B} \left(\frac{de}{d\Delta} \right) \right\} \cdot \delta \Delta - \left\{ \frac{\sin G}{g'' \sin(G''-G)} \cdot \cos r'' \, b'' + \mathfrak{B} \left(\frac{de}{d\Delta''} \right) \right\} \cdot \delta \Delta'' \dots \dots \dots (204)$$

$$\delta \psi_0 = \left\{ \frac{\mathfrak{D}}{2q} \cdot \cos r \, b + \frac{1}{2r} \cos s \, b + \mathfrak{D}_4 \left(\frac{de}{d\Delta} \right) \right\} \cdot \delta \Delta - \left\{ \frac{\mathfrak{D}''}{2q} \cos r'' \, b'' - \frac{1}{2r''} \cos s'' \, b'' - \mathfrak{D}_4 \left(\frac{de}{d\Delta''} \right) \right\} \cdot \delta \Delta'' \dots \dots \dots (205)$$

$$\delta \Omega_0 = - \frac{\sin u''}{r \sin(u''-u) \sin i_0} \cdot \cos w \, b \cdot \delta \Delta + \frac{\sin u_0}{r'' \sin(u''-u_0) \sin i_0} \cdot \cos w \, b'' \cdot \delta \Delta'' \dots \dots \dots (206)$$

$$\delta i_0 = - \frac{\cos u''}{r \sin(u''-u)} \cdot \cos w \, b \cdot \delta \Delta + \frac{\cos u_0}{r'' \sin(u''-u_0)} \cdot \cos w \, b'' \cdot \delta \Delta'' \dots \dots \dots (207)$$

nach den zu Grunde gelegten Unbekannten, numerisch herleitet, und mittelst dieser Differenzialquotienten die Correctionen bestimmt, welche an die gegebenen, genähernten Werthe der Unbekannten angebracht, die wahren Werthe derselben ergeben.

aus welchen Ausdrücken die Differenzialquotienten $\left(\frac{de}{d\Delta} \right)$ und $\left(\frac{de}{d\Delta''} \right)$, mittelst der Gleichungen unter (201) leicht eliminirt werden können.

Auf ähnliche Weise folgt für $\delta\nu'$, mit Hülfe von (151) u. (152), nach einer sehr einfachen Reduction, wenn man nämlich:

$$\mathfrak{P} = \nu' + \frac{h' \cos(H' - G'') \cos \frac{1}{2} \nu'}{g \sin(G'' - G)} \cdot \rho - \frac{h' \cos(H' - G) \cos \frac{1}{2} \nu'}{g'' \sin(G'' - G)} \cdot \rho'' \dots \dots \dots (221)$$

setzt, dass:

$$\delta\nu' = - \frac{h' \cos(H' - G'') \cos \frac{1}{2} \nu'}{q g \sin(G'' - G)} \cdot \delta A + \frac{h' \cos(H' - G) \cos \frac{1}{2} \nu'}{q g'' \sin(G'' - G)} \cdot \delta A'' + \mathfrak{P} \delta e \dots \dots \dots (222)$$

oder wenn man die Werthe von δA und $\delta A''$ aus den Gleichungen (123) und (128) in die Ausdrücke (220) und (222) hineinsubstituiert, so wird endlich:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dr'}{dl}\right) &= \frac{\Delta g' \sin(G'' - G') \cos b}{g \sin(G'' - G)} \cdot \cos r f + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{dl}\right) \\ \left(\frac{dr'}{db}\right) &= \frac{\Delta g' \sin(G'' - G')}{g \sin(G'' - G)} \cdot \cos r e + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{db}\right) \\ \left(\frac{dr'}{d\Delta}\right) &= \frac{g' \sin(G'' - G')}{g \sin(G'' - G)} \cdot \cos r d + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{d\Delta}\right) \\ \left(\frac{dr'}{dl''}\right) &= \frac{\Delta'' g' \sin(G' - G) \cos b''}{g'' \sin(G'' - G)} \cdot \cos r'' f'' + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{dl''}\right) \\ \left(\frac{dr'}{db''}\right) &= \frac{\Delta'' g' \sin(G' - G)}{g'' \sin(G'' - G)} \cdot \cos r'' e'' + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{db''}\right) \\ \left(\frac{dr'}{d\Delta''}\right) &= \frac{g' \sin(G' - G)}{g'' \sin(G'' - G)} \cdot \cos r'' d'' + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{d\Delta''}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (223)$$

$$\delta r' = \left(\frac{dr'}{dl}\right) \cdot \delta l + \left(\frac{dr'}{db}\right) \cdot \delta b + \left(\frac{dr'}{d\Delta}\right) \cdot \delta \Delta + \left(\frac{dr'}{dl''}\right) \cdot \delta l'' + \left(\frac{dr'}{db''}\right) \cdot \delta b'' + \left(\frac{dr'}{d\Delta''}\right) \cdot \delta \Delta'' \dots \dots \dots (224)$$

sowie ferner:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\nu'}{dl}\right) &= - \frac{\Delta h' \cos(H' - G'') \cos \frac{1}{2} \nu' \cos b}{q g \sin(G'' - G)} \cdot \cos r f + \mathfrak{P} \cdot \left(\frac{de}{dl}\right) \\ \left(\frac{d\nu'}{db}\right) &= - \frac{\Delta h' \cos(H' - G'') \cos \frac{1}{2} \nu'}{q g \sin(G'' - G)} \cdot \cos r e + \mathfrak{P} \cdot \left(\frac{de}{db}\right) \\ \left(\frac{d\nu'}{d\Delta}\right) &= - \frac{h' \cos(H' - G'') \cos \frac{1}{2} \nu'}{q g \sin(G'' - G)} \cdot \cos r d + \mathfrak{P} \cdot \left(\frac{de}{d\Delta}\right) \\ \left(\frac{d\nu'}{dl''}\right) &= + \frac{\Delta'' h' \cos(H' - G) \cos \frac{1}{2} \nu'}{q g'' \sin(G'' - G)} \cdot \cos r'' f'' + \mathfrak{P} \cdot \left(\frac{de}{dl''}\right) \\ \left(\frac{d\nu'}{db''}\right) &= + \frac{\Delta'' h' \cos(H' - G) \cos \frac{1}{2} \nu'}{q g'' \sin(G'' - G)} \cdot \cos r'' e'' + \mathfrak{P} \cdot \left(\frac{de}{db''}\right) \\ \left(\frac{d\nu'}{d\Delta''}\right) &= + \frac{h' \cos(H' - G) \cos \frac{1}{2} \nu'}{q g'' \sin(G'' - G)} \cdot \cos r'' d'' + \mathfrak{P} \cdot \left(\frac{de}{d\Delta''}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (225)$$

$$\delta\nu' = \left(\frac{d\nu'}{dl}\right) \cdot \delta l + \left(\frac{d\nu'}{db}\right) \cdot \delta b + \left(\frac{d\nu'}{d\Delta}\right) \cdot \delta \Delta + \left(\frac{d\nu'}{dl''}\right) \cdot \delta l'' + \left(\frac{d\nu'}{db''}\right) \cdot \delta b'' + \left(\frac{d\nu'}{d\Delta''}\right) \delta \Delta'' \dots \dots \dots (226)$$

wodurch endlich die totalen Variationen des heliocentrischen Ortes (r' , ν') nach den beiden geocentrischen Oertern l , b , Δ und l'' , b'' , Δ'' bestimmt wären, indem die partiellen Differenzialquotienten von e nach l , b , Δ und l'' , b'' , Δ'' schon unter (171) gegeben worden sind, und daher aus den Ausdrücken (223) und (225) leicht eliminirt werden können.

Es folgt nun die

Bestimmung der Variationen $\delta A'$, $\delta B'$, $\delta C'$;

und dazu hat man nach (215):

$$\left. \begin{aligned} \delta A' &= \delta r' \\ \delta B' &= r' \cdot \delta u'_0 + r' \cos i_0 \cdot \delta \Omega_0 = r' \cdot \delta \nu' + r' \cdot \delta \psi_0 \\ \delta C' &= r' \sin u'_0 \cdot \delta i_0 - r' \cos u'_0 \sin i_0 \cdot \delta \Omega_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (227)$$

Da aber $\delta r'$ soeben unter (223) und (224) entwickelt worden ist, so ist auch $\delta A'$ bekannt, und wir können sogleich zur Bestimmung von $\delta B'$ übergehen. Nun ist aber nach (175) §. 18:

$$\delta \psi_0 = \frac{1}{2} \frac{\delta B''}{r''} + \frac{1}{2} \frac{\delta B}{r} - \frac{1}{2} \delta(\nu'' + \nu) \dots\dots\dots (228)$$

und folglich:

$$\delta B' = \frac{1}{2} \frac{r'}{r''} \delta B'' + \frac{1}{2} \frac{r'}{r} \delta B + r' \delta(\nu' - \frac{1}{2}(\nu'' + \nu)) \dots\dots\dots (229)$$

Verbindet man den Ausdruck für $\delta \nu'$ unter (222) mit der Gleichung für $\delta(\nu'' + \nu)$ unter (176) in §. 18, so folgt unmittelbar, wenn:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= - \frac{h' \cos(H' - G'') \cos \frac{1}{2} \nu' - \frac{1}{2} h \cos(H - G'') \cos \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} h'' \cos(H'' - G'') \cos \frac{1}{2} \nu''}{g \sin(G'' - G)} \\ \mathfrak{E}'' &= + \frac{h' \cos(H' - G) \cos \frac{1}{2} \nu' - \frac{1}{2} h \cos(H - G) \cos \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} h'' \cos(H'' - G) \cos \frac{1}{2} \nu''}{g'' \sin(G'' - G)} \\ \mathfrak{N} &= \nu' - \frac{1}{2} \nu - \frac{1}{2} \nu'' - \mathfrak{E} \rho - \mathfrak{E}'' \rho'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (230)$$

gesetzt wird, dass:

$$\delta B' = \frac{1}{2} \frac{r'}{r''} \delta B'' + \frac{1}{2} \frac{r'}{r} \delta B + \frac{r'}{q} \cdot \mathfrak{E}'' \delta A'' + \frac{r'}{q} \cdot \mathfrak{E} \delta A + r' \mathfrak{N} \cdot \delta e \dots\dots\dots (231)$$

und zur Bestimmung von $\delta C'$, braucht man bloß in den Ausdruck:

$$\delta C' = r' \sin u_o' \cdot \delta i_o - r' \cos u_o' \sin i_o \cdot \delta \Omega_o \dots\dots\dots (232)$$

die Werthe von δi_o und $\delta \Omega_o$ hinein zu substituiren, welche wir unter (185) und (186) gefunden haben, alsdann wird:

$$\delta C' = \frac{r' \sin(u_o'' - u_o')}{r \sin(u_o'' - u_o)} \cdot \delta C + \frac{r' \sin(u_o' - u_o)}{r'' \sin(u_o'' - u_o)} \cdot \delta C'' \dots\dots\dots (233)$$

und somit erhalten wir nunmehr, wenn die Ausdrücke unter (231) und (233) mit den Gleichungen (123) und (128) in §. 18 verbunden werden, und zugleich darauf Rücksicht genommen wird, dass:

$$\delta A' = \delta r' \dots\dots\dots (234), \text{ und}$$

$$\left. \begin{aligned} u_o'' - u_o' &= \nu'' - \nu' \\ u_o'' - u_o &= \nu'' - \nu \\ u_o' - u_o &= \nu' - \nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (235)$$

folgende Bestimmungen für $\delta A'$, $\delta B'$ und $\delta C'$, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dA'}{dl}\right) &= \frac{\Delta g' \sin(G'' - G') \cos b}{g \sin(G'' - G)} \cdot \cos r f + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{dl}\right) \\ \left(\frac{dA'}{db}\right) &= \frac{\Delta g' \sin(G'' - G')}{g \sin(G'' - G)} \cdot \cos r e + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{db}\right) \\ \left(\frac{dA'}{d\Delta}\right) &= \frac{g' \sin(G'' - G')}{g \sin(G'' - G)} \cdot \cos r b + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{d\Delta}\right) \\ \left(\frac{dA'}{dl''}\right) &= \frac{\Delta'' g' \sin(G' - G) \cos b''}{g'' \sin(G'' - G)} \cdot \cos r'' f'' + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{dl''}\right) \\ \left(\frac{dA'}{db''}\right) &= \frac{\Delta'' g' \sin(G' - G)}{g'' \sin(G'' - G)} \cdot \cos r'' e'' + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{db''}\right) \\ \left(\frac{dA'}{d\Delta''}\right) &= \frac{g'' \sin(G' - G)}{g'' \sin(G'' - G)} \cdot \cos r'' b'' + \mathfrak{M} q \cdot \left(\frac{de}{d\Delta''}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (236)$$

$$\delta A' = \left(\frac{dA'}{dl}\right) \cdot \delta l + \left(\frac{dA'}{db}\right) \cdot \delta b + \left(\frac{dA'}{d\Delta}\right) \cdot \delta \Delta + \left(\frac{dA'}{dl''}\right) \cdot \delta l'' + \left(\frac{dA'}{db''}\right) \cdot \delta b'' + \left(\frac{dA'}{d\Delta''}\right) \cdot \delta \Delta'' \dots\dots\dots (237)$$

(Fortsetzung folgt).