Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln.

Von

LUDWIG SCHEEFFER†.

Aus seinen hinterlassenen Papieren mitgetheilt von A. MAYER. *)

§ 1.

Functionen einer Veränderlichen.

Um festzustellen, ob eine Function einer Veränderlichen, $f(x)$, deren erste Ableitung für $x = 0$ verschwindet, an dieser Stelle ein Maximum oder Minimum besitzt, verfährt man bekanntlich folgendermassen. Man bildet die höheren Ableitungen $f''(x)$, $f'''(x)$, ... Ist n die Ordnung der ersten unter denselben, welche für $x = 0$ einen von Null verschiedenen Werth annimmt, so wird, wenn wir noch der Kürze wegen $f(0) = 0$ voraussetzen, nach Lagrange:

$$(1) \quad f(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

*) Die vorliegende Arbeit ist entstanden in der kurzen Zeit von Mitte Februar bis Mitte März 1885 (vgl. die Anmerkung zu § 2). Sie war jedoch noch nicht bis zur Reinschrift gediehen, als Scheeffers seine italienische Reise antrat, von der er den Todeskeim mit nach Hause zurückbringen sollte. Nach seinen Briefen hatte die Abhandlung jedenfalls noch nicht eine solche Abrundung erhalten, mit der er vollständig zufrieden gewesen wäre. Denn er spricht mehrmals davon, sie mir (wozu er selbst leider nicht mehr kam) baldmöglichst zu schicken, um zu erfahren, was ein Anderer an der Darstellung auszusetzen fände. Ich habe mich daher auch nicht vollkommen streng an das Manuscript gehalten; doch sind grössere Aenderungen nur in § 7 von Nr. 3 an vorgenommen worden, und auch diese kommen der Hauptsache nach auf blosse Umstellungen zurück. Ueberall sonst findet man, bis auf ganz geringfügige Correcturen und Zusätze, den Wortlaut der Originalarbeit. — Wieder abgedruckt a. d. Berichten der K. sächs. G. d. W. v. Jahre 1886.

A. Mayer.

Dann kann man (vorausgesetzt, dass $f^{(n)}(x)$ eine stetige Function ist) für den absoluten Werth von x eine obere Grenze g so bestimmen, dass, so lange $-g < x < g$ ist, $f^{(n)}(x)$ jedenfalls das Vorzeichen von $f^{(n)}(0)$ hat. Ist nun n eine ungerade Zahl, so wechselt die rechte Seite der Gleichung (1) mit x das Vorzeichen, die Function $f(x)$ kann also für beliebig kleine Argumente x sowohl positiv als negativ werden und es findet aus diesem Grunde weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Ist dagegen n eine gerade Zahl, so hat die rechte Seite immer das Vorzeichen von $f^{(n)}(x)$, welches für alle Argumente x zwischen $-g$ und $+g$ mit dem Vorzeichen von $f^{(n)}(0)$ übereinstimmt; das Gleiche gilt daher von der Function $f(x)$ und es findet also für $x = 0$ ein Maximum oder Minimum statt, je nachdem $f^{(n)}(0)$ negativ oder positiv ist.

Wir bemerken, dass die Gültigkeit der vorstehenden Deduction nicht von der Entwickelbarkeit der Function $f(x)$ abhängt. Vielmehr gelten alle Schlüsse unbedingt, sobald sämtliche Ableitungen von $f(x)$ (eigentlich sogar nur die n ersten) in der Umgebung der Stelle $x = 0$ endlich und stetig sind. Das aufgestellte Kriterium bleibt daher beispielsweise auch für die Function

$$f(x) = x^2 - e^{-\frac{1}{x^2}}$$

richtig, obschon dieselbe nicht nach Potenzen von x entwickelt werden kann. Die beiden ersten Ableitungen sind hier stetige Functionen, ausserdem ist $f''(0)$ positiv ($= 2$); daraus folgt ohne Bedenken, dass ein Minimum eintritt.

Das Kriterium versagt bei Functionen mit durchaus endlichen und stetigen Ableitungen nur dann, wenn für $x = 0$ gleichzeitig die sämtlichen Ableitungen verschwinden, wie dies bei den Functionen

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ und $xe^{-\frac{1}{x^2}}$ der Fall ist. Die erste dieser beiden Functionen hat an der Stelle $x = 0$ ein Minimum, die zweite weder ein Minimum noch ein Maximum; aber die Veränderung beider Functionen ist in der Umgebung des Punktes $x = 0$ eine so langsame, dass sie in der Potenzentwicklung (1) überhaupt nicht zum Ausdrucke gelangt. Das Kriterium führt daher in diesem Falle nicht gerade zu falschen Resultaten, aber es lässt doch die Frage nach dem Maximum oder Minimum gänzlich offen, welches Verhalten wir eben mit den Worten „das Kriterium versagt“ ausdrücken wollten.

Man kann den Unterschied solcher Functionen, welche für $x = 0$ sämtliche Ableitungen gleich Null haben und aus diesem Grunde dem allgemeinen Kriterium unzugänglich sind, von den gewöhnlichen Functionen, auf welche dasselbe anwendbar ist, auch ohne Bezugnahme auf die Ableitungen folgendermassen charakterisiren:

Bei den gewöhnlichen Functionen geht die Werthänderung in der Umgebung der Stelle $x=0$ nach beiden Seiten rascher vor sich, als die Aenderung einer angebbaren Potenz ax^n , d. h. es lassen sich positive Zahlen a, n, g so angeben, dass für alle Werthe von x zwischen $-g$ und $+g$ der absolute Betrag der Function $f(x)$ grösser als der von ax^n ist, ausgenommen den einzigen Werth $x=0$, für den $f(x)$ gleich ax^n wird, wobei man offenbar zugleich n als ganze Zahl annehmen kann. Bei den Functionen der anderen Art dagegen existiren solche Zahlen n, a, g nicht, vielmehr wird, den absoluten Werthen nach, $f(x)$ in unmittelbarer Nähe der Stelle $x=0$ noch kleiner als jede beliebige Potenz ax^n .

In der That kann man, wenn in der Gleichung (1) $f^{(n)}(0)$ nicht gleich Null ist, zunächst g so bestimmen, dass für $-g \leq x \leq g$ immer auch $f^n(x)$ von Null verschieden ist. Nimmt man dann die Zahl a kleiner als den kleinsten absoluten Werth von $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ im Intervalle $-g$ bis $+g$ an, so ist die Bedingung $[f(x)] > [ax^n]$ für $-g < x < g$ erfüllt; und umgekehrt, wenn diese letzte Bedingung erfüllt ist, können die n ersten Ableitungen von $f(x)$ für $x=0$ nicht sämmtlich verschwinden, da sonst

$$f(x) = f^{(n+1)}(\vartheta x) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

und somit $\lim_{x=0} \frac{f(x)}{ax^n} = 0$ wäre, was mit der Voraussetzung $[f(x)] > [ax^n]$ für $-g < x < g$ unverträglich ist.

§ 2.

Functionen zweier Veränderlichen. Unrichtigkeit der üblichen Schlussweise.

Den Fall zweier Variablen x und y sucht man häufig folgendermassen auf den eben erledigten zurückzuführen.

Verschwinden an der Stelle $x=0, y=0$ die beiden ersten partiellen Ableitungen der Function $f(x, y)$ nach x und y , so setzt man $x = \alpha\xi, y = \alpha\eta$ und entwickelt die Differenz $f(\alpha\xi, \alpha\eta) - f(0, 0)$, oder, wenn wir der Einfachheit wegen wiederum $f(0, 0) = 0$ annehmen, die Function $f(\alpha\xi, \alpha\eta)$ (kurz mit $f_{\xi\eta}(\alpha)$ bezeichnet) unter Benutzung der Lagrange'schen Restform nach Potenzen von α . Dies giebt:

$$(2) \quad f(\alpha\xi, \alpha\eta) = \frac{1}{1 \cdot 2} f''_{\xi\eta}(0) \alpha^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''_{\xi\eta}(0) \alpha^3 \\ + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}_{\xi\eta}(\vartheta\alpha) \alpha^n, \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Hier ist $\frac{1}{r!} f^{(r)}_{\xi\eta}(0)$ ein homogener Ausdruck r^{ten} Grades in ξ und η , welcher sich von dem Gliede r^{ter} Ordnung in der Entwicklung der

Function $f(x, y)$ nach Potenzen von x und y nur dadurch unterscheidet, dass überall ξ, η an Stelle von x, y steht.

Es lässt sich nun im Allgemeinen mittelst der vorher angegebenen Kriterien für jeden bestimmten Werth des Verhältnisses $\xi : \eta$ entscheiden, ob die bloss noch von der einen Variablen x abhängige Function $f_{\xi\eta}(x)$ an der Stelle $x = 0$ ein Maximum oder Minimum besitzt. Deuten wir x und y als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene, so wird durch die Gleichungen $x = x\xi$, $y = x\eta$ bei constanten Werthen von ξ und η und veränderlichem x jedesmal eine Gerade defnirt, die durch den Nullpunkt geht, und umgekehrt kann jede den Nullpunkt enthaltende Gerade in jener Form dargestellt werden. Es findet dann auf der einzelnen Geraden ξ, η im Nullpunkte ein Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$ oder keines von beiden statt, je nachdem die erste von Null verschiedene Ableitung $f_{\xi\eta}^{(n)}(0)$ von gerader Ordnung und entweder negativ oder positiv, oder von ungerader Ordnung ist.

Man pflegt nun weiter zu schliessen, dass wenn auf jeder der unendlich vielen Geraden durch den Nullpunkt ein Maximum (resp. Minimum) für $x = 0$ vorhanden ist, ein solches auch für die Function $f(x, y)$ der beiden unabhängigen Variablen x und y an der Stelle $(0, 0)$ stattfinden müsse, während, wenn auf einigen dieser Geraden ein Maximum, auf anderen ein Minimum eintritt, von einem Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$ an der Stelle $(0, 0)$ nicht die Rede sein könne. Auf diese Weise würde sich als *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung des Minimums (resp. Maximums) die ergeben, dass für *jedes* beliebige Werthepaar ξ, η die erste von Null verschiedene unter den in (2) vorkommenden homogenen Formen $f'_{\xi\eta}(0)$, $f''_{\xi\eta}(0), \dots$ von gerader Ordnung und positivem (resp. negativem) Werthe sein müsse, und dieses Kriterium würde nur dann versagen, wenn für gewisse Verhältnisse $\xi : \eta$ *alle* jene Formen gleichzeitig verschwänden.

Die vorstehende Deduction enthält indes einen Fehler. Daraus, dass an der Stelle $x = 0, y = 0$ ein Minimum der Function $f(x, y)$ auf jeder einzelnen Geraden stattfindet, folgt noch nicht, dass auch ein Minimum überhaupt eintritt. Die Existenz eines solchen hängt vielmehr davon ab, ob sich eine obere Grenze g so angeben lässt, dass die Function $f(x, y)$ für alle Werthe x, y , welche der Bedingung $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < g$ genügen, positiv wird; oder — geometrisch zu reden — davon, ob ein Kreis mit dem Mittelpunkte $(0, 0)$ existirt, innerhalb dessen die Function $f(x, y)$ durchaus positiv ist — ausgenommen die Stelle $(0, 0)$ selbst, wo sie verschwindet. Es kann aber sehr wohl auf jeder einzelnen Geraden ein Minimum im Null-

punkte stattfinden, ohne dass ein solcher Kreis existirt. Man wird das am Besten an einem Beispiele ersehen.

Es seien durch die Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ zwei Curven definiert, deren jede den Nullpunkt enthält und die xy -Ebene wenigstens in der Umgebung desselben in zwei Theile zerschneidet: einen, in welchem $\varphi(x, y)$ (resp. $\psi(x, y)$) positiv, und einen, in welchem $\varphi(x, y)$ (resp. $\psi(x, y)$) negativ ist. Das Product $f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y)$ wird dann bei dem Fortgange auf einem den Nullpunkt umgebenden kleinen Kreise zweimal positiv und zweimal negativ werden (vgl. Fig. 1) und beim Fortgange auf einer den Nullpunkt enthaltenden Geraden an der Stelle $(0, 0)$ einen Maximal- oder Minimalwerth annehmen, je nachdem die Gerade in's Gebiet $f(x, y) < 0$ oder in's Gebiet $f(x, y) > 0$ eintritt.

Fig. 1.

Nun kann es aber vorkommen, dass alle überhaupt möglichen Geraden, welche man durch den Nullpunkt legen kann, zunächst im Gebiete $f(x, y) > 0$ bleiben; und zwar wird dies immer eintreten, wenn die beiden Curven an der Stelle $(0, 0)$ eine gemeinschaftliche Tangente haben und in gleichem Sinne gekrümmt sind. In diesem Falle findet auf jeder einzelnen Geraden im Nullpunkte ein Minimum statt, nicht aber ein Minimum überhaupt, da in jeder Nähe des Punktes $(0, 0)$ noch negative Werthe von $f(x, y)$ vorkommen. Es sei z. B.

$$\varphi(x, y) = y - p^2 x^2, \quad \psi(x, y) = y - q^2 x^2.$$

Dann haben wir zwei Parabeln, welche im Nullpunkte die x -Axe berühren und ihre Höhlungen nach oben kehren. Das Product

$$f(x, y) = (y - p^2 x^2)(y - q^2 x^2)$$

ist sowohl oberhalb als unterhalb beider Curven positiv, in dem

Fig. 2.

zwischen den Curven gelegenen Theile der Ebene aber negativ (vgl. Fig. 2). Jede von der y - und der x -Axe verschiedene, durch

den Nullpunkt gelegte Gerade trifft in grösserem oder geringerem Abstände von diesem einmal das Gebiet $f < 0$, tritt aber vom Nullpunkte aus immer zunächst in das Gebiet $f > 0$. Die Strecke vom Nullpunkte bis zum Uebergange der Geraden in den negativen Theil sinkt allerdings, wenn die Gerade um den Nullpunkt gegen die x -Axe hin gedreht wird, unter jede angebbare Grenze; aber in dem Momente, wo sie gleich Null werden würde, nämlich beim Zusammenfallen mit der x -Axe, streift die Gerade nur noch das negative Gebiet und hält sich gänzlich in dem positiven Theile.

Dieses Verhalten der Function $f(x, y)$ auf den verschiedenen Geraden, wonach die x -Axe eine ausgezeichnete Stellung unter den letzten einnimmt, spiegelt sich in dem Verhalten der Coefficienten der Entwicklung (2) gleichsam ab. Es wird nämlich

$$f(x\xi, x\eta) = \eta^2 x^2 - (p^2 + q^2) \xi^2 \eta x^3 + p^2 q^2 \xi^4 x^4;$$

der Coefficient von x^2 ist also im Allgemeinen positiv, ausgenommen für $\eta = 0$, d. h. für den Fall, dass die Linie ξ, η mit der x -Axe zusammenfällt, wo dann gleichzeitig mit dem Coefficienten von x^2 derjenige von x^3 verschwindet, sodass nun derjenige von x^4 ausschlaggebend wird, welcher wiederum positiv ist.*)

§ 3.

Verschiedene Versuche der Verbesserung.

Nachdem wir erkannt haben, dass aus dem Stattfinden des Maximums, resp. Minimums einer Function $f(x, y)$ auf allen einzelnen

*) Das Beispiel $(y - p^2 x^2)(y - q^2 x^2)$, (welches zugleich das denkbar einfachste sein dürfte), rührt von Herrn G. Peano her. Derselbe hat in einigen dem Werke: *A. Genocchi, Calcolo differenziale pubblicato con aggiunte dal G. Peano, Torino 1884* beigefügten Noten zuerst die oben auseinandergesetzte Schlussweise, welche man in der Theorie der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Veränderlichen häufig angewandt findet, in ihrer Fehlerhaftigkeit erkannt und bis zu einem gewissen Punkte durch eine bessere ersetzt. Ich war, ohne Peano zu kennen, durch Untersuchungen über höhere Variationen bestimmter Integrale auf Beispiele geführt worden, welche mir für das Gebiet der Variationsrechnung schliesslich genau die gleiche Erkenntniss verschafften, welche Peano auf dem Gebiete der gewöhnlichen Maxima und Minima gewonnen hatte (vgl. meine Note: Ueber die Bedeutung der Begriffe „Maximum und Minimum“ in der Variationsrechnung, Leipz. Ber. 1885 und Mathem. Annalen XXVI, p. 197). Ich fand sodann, dass analoge Verhältnisse auch in der Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima vorliegen, und hatte die hier folgenden Untersuchungen, welche über diejenigen von Peano wesentlich hinausgehen, der Hauptsache nach beendigt, als ich durch Herrn A. Mayer auf das neu erschienene Werk von Genocchi-Peano hingewiesen wurde, welches, wie mir derselbe mittheilte, auch von Herrn Harnack in einem Nachtrage zu seiner Serret-Uebersetzung (II, 1 p. 380) bereits citirt wird. Ich werde in diesem Aufsätze diejenigen Resultate, welche sich bei Peano finden, ausdrücklich als solche bezeichnen.

durch den Nullpunkt zu legenden Geraden noch keine Schlüsse auf ein Maximum oder Minimum in der *Ebene* gezogen werden können, tritt die Frage nach erweiterten Kriterien für die Maxima und Minima der letzten Art auf. Wir wollen, bevor wir diese Frage in völlig erschöpfender Weise beantworten, zunächst einige Schritte auf einem Wege vorwärts thun, welcher auf den ersten Augenblick verlockend erscheinen könnte, während eine nähere Betrachtung desselben uns überzeugen wird, dass er nicht wesentlich weiter führt als der zuerst eingeschlagene.

Bei dem Beispiele $f(x, y) = (y - p^2 x^2)(y - q^2 x^2)$ erhalten wir auf allen Geraden ein Minimum im Nullpunkte. Nicht so überhaupt auf allen Curven, welche durch den Nullpunkt gelegt werden können; vielmehr muss sich auf jeder Curve, welche in dem von den beiden gegebenen Parabeln eingeschlossenen Flächenstreifen liegt (beispielsweise auf der Parabel $y - \frac{p^2 + q^2}{2} x^2 = 0$) ein Maximum ergeben. Nun lässt sich jede beliebige Curve analytisch durch einen variablen Parameter x darstellen, indem x und y als Functionen desselben ausgedrückt werden. Es liegt daher die Frage nahe, ob man nicht durch Untersuchung des Maximums oder Minimums auf allen einzelnen Curven, welche den Nullpunkt enthalten, zur Entscheidung über das Maximum oder Minimum in der *Ebene* gelangen kann. Es ist wohl zweifellos, dass hier ein Zusammenhang besteht; die Beschränkungen indessen, welche man den Functionen $x(x)$ und $y(x)$ und dadurch den in Betracht zu ziehenden Curven auferlegen muss, um auf die Function $f(x(x), y(x))$ die für Functionen einer Veränderlichen entwickelten Kriterien mit Erfolg anwenden zu können, machen auch diese Schlussweise unbrauchbar.

Offenbar nämlich ist die einzige Form, welche man den Functionen $x(x)$ und $y(x)$ geben kann, ohne die Principien der ganzen Theorie zu verlassen, diejenige von Reihen, welche nach Potenzen von x fortschreiten. Man setze also:

$$(3) \quad \begin{aligned} x(x) &= \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_m x^m, \\ y(x) &= \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \dots + \eta_n x^n, \end{aligned}$$

und stelle die Forderung, dass die Function $f(x(x), y(x))$ für $x = 0$ ein Maximum (resp. Minimum) werden solle, welche Werthe man auch für die ganzen positiven Zahlen m, n und die $m + n$ Grössen $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$ annehmen mag, vorausgesetzt natürlich, dass nicht alle ξ und η gleichzeitig gleich Null sind.

Diese Forderung ist z. B. bei der Function

$$f(x, y) = (y - p^2 x^2)(y - q^2 x^2)$$

hinreichend, um das *Nichtstattenfinden* eines Maximums oder Minimums zu Tage treten zu lassen. Denn für $m = 1$, $n = 2$ wird

$$f(x(x), y(x)) = \eta_1^2 x^2 + \eta_1 (2\eta_2 - (p^2 + q^2) \xi_1^2) x^3 \\ + (\eta_2 - p^2 \xi_1^2) (\eta_2 - q^2 \xi_1^2) x^4.$$

Ist η_1 von Null verschieden, so ist der Coefficient von x^2 positiv, es findet daher auf allen solchen Curven im Nullpunkte ein Minimum statt; ist dagegen $\eta_1 = 0$, so reducirt sich die Entwicklung auf das Glied 4^{ter} Ordnung, und dieses kann durch geeignete Wahl der Constanten ξ_1 und η_2 (z. B. durch die Substitution $\eta_2 = \frac{p^2 + q^2}{2} \xi_1^2$) negativ gemacht werden; es findet daher auf den Curven der letzten Art unter Umständen ein Maximum statt. Es ist aber gerade bei diesem Beispiele evident, dass man durch Anwendung dieses Verfahrens eigentlich keinen Vortheil erlangt. Denn der Coefficient von x^4 , welcher untersucht werden muss, hat genau die Gestalt der Function $f(x, y)$, nur dass x, y durch die Constanten ξ_1, η_2 ersetzt sind. Die Discussion des Vorzeichens dieser Coefficienten für die verschiedenen Werthe jener Constanten bietet daher an sich genau dieselbe Schwierigkeit, wie die entsprechende Discussion für die Function $f(x, y)$ selbst.

Das folgende Beispiel zeigt noch weiter, dass die gestellte Forderung nicht einmal eine *hinreichende* Bedingung des Minimums ausdrückt und schon aus diesem Grunde werthlos ist. Setzen wir nämlich

$$\varphi(x, y) = y - \sin^2 x, \\ \psi(x, y) = y - \sin^2 x - e^{-\frac{1}{x^2}},$$

so werden durch die Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ zwei Curven defnirt, welche im Nullpunkte die x -Axe als gemeinschaftliche Tangente und überdies mit einander eine Berührung von unendlich hoher Ordnung haben. Es giebt alsdann keine in der Form (3) darstellbare Curve, welche vom Nullpunkte aus zwischen jene beiden fiele; denn eine solche müsste mit diesen Curven ebenfalls eine Berührung von unendlich hoher Ordnung haben, während offenbar jede Curve von der Form (3) als algebraische Curve nur eine Berührung von endlicher Ordnung mit jenen transcendenten Curven haben kann. Nun ist die Function $f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y)$ in der ganzen Ebene positiv, ausgenommen den zwischen den beiden Curven befindlichen Flächenstreifen, in welchem sie negativ ist; es findet daher an der Stelle $f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum statt. Trotzdem tritt auf jeder Curve (3) ein wirkliches Minimum ein, und zwar ein solches, welches durch die für Functionen einer Variablen gültigen allgemeinen Kriterien deutlich erkennbar ist; in der That überzeugt

man sich leicht, dass bei jeder Wahl der Zahlen m, n und der Grössen $\xi_1, \dots, \eta_n$ von Null verschiedene Coefficienten in der Entwicklung von $f(x(x), y(x))$ vorkommen, deren erster dann natürlich jedesmal von gerader Ordnung und positiv ist.

Man könnte die angegebene Methode so erweitern, dass sie auch bei dem letzten Beispiele nicht geradezu ein falsches Resultat liefern würde, indem man nämlich das Maximum und Minimum nicht nur auf allen Curven von der Form (3), sondern auch auf allen denjenigen Curven untersucht, welche aus der Form (3) dadurch hervorgehen, dass man m und n unendlich gross werden lässt. In dieser erweiterten Form ist auch die Curve $y - \sin^2 x = 0$ darstellbar, wenn man

$$x = x, \quad y = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right)^2$$

setzt; es würden für diese Curve alsdann die sämtlichen Entwicklungscoefficienten der Function $f(x(x), y(x))$ verschwinden, sodass man einen Schluss auf das Minimum der Function $f(x, y)$ überhaupt nicht ziehen könnte. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass diese erweiterte Forderung wirklich eine zugleich nothwendige und hinreichende Bedingung des Minimums ausdrückt. Indes ist dieselbe praktisch noch unbrauchbarer, als diejenige, welche vorher angenommen war; denn sie macht durch Einführung unendlich vieler unbestimmter Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots, \eta_1, \eta_2, \dots$ im Allgemeinen eine unendlich grosse Anzahl von Einzeluntersuchungen nothwendig, da durch Nullsetzen einer genügenden Menge jener Grössen immer beliebig viele der Entwicklungscoefficienten von $f(x(x), y(x))$ zum Verschwinden gebracht werden können, wobei also jedesmal der erste nicht verschwindende Coefficient hinsichtlich des Vorzeichens zu untersuchen bleibt. Wir sehen daher von einer weiteren Discussion jener Forderung ab und schlagen jetzt einen Weg ein, der uns auf bequeme Art zu völlig allgemeinen und gleichzeitig praktisch brauchbaren Kriterien hinführen wird.

§ 4.

Fundamentale Eintheilung der Functionen von zwei Variabeln.

Wir beginnen mit einer wichtigen Unterscheidung aller im Nullpunkte verschwindenden Functionen $f(x, y)$ hinsichtlich ihres Verhaltens in der Umgebung dieser Stelle. Wir sahen nämlich, dass bei Functionen einer einzigen Veränderlichen die Anwendbarkeit der auf Potenzentwicklung gegründeten Kriterien des Maximums oder Minimums davon abhängig war, ob die Function $f(x)$ sich in der Umgebung der Stelle $x = 0$, an der sie verschwindet, schnell genug mit x veränderte, sei es in dem einen oder anderen Sinne; es musste eine

Potenz ax^n mit der Eigenschaft existiren, dass zwischen gewissen Grenzen $-g < x < g$ der absolute Werth von $f(x)$ beständig grösser als $[ax^n]$ (oder höchstens gleich $[ax^n]$) wurde; bei denjenigen Functionen, welche dieser Bedingung nicht genügten, konnte auf dem Wege der Potenzentwicklung überhaupt keine Entscheidung über das Maximum oder Minimum gewonnen werden. Offenbar wird für eine Function von zwei Variablen eine analoge Bedingung existiren, von deren Erfüllung von vornherein die Möglichkeit abhängt, durch Potenzentwicklung über Maximum und Minimum zu entscheiden. Es fragt sich, wie diese Bedingung zu formuliren sein wird. Eine Potenz ar^n (wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) mit der Eigenschaft, dass für $0 < r < g$, d. h. innerhalb eines Kreises mit dem Radius g , überall $f(x, y)$ absolut grösser als ar^n sei, darf man jedenfalls nicht verlangen; denn dadurch würden überhaupt alle Functionen $f(x, y)$, die an der Stelle $(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum haben, von der Untersuchung ausgeschlossen, da dieselben auf jedem noch so kleinen Kreise um den Nullpunkt sowohl positiv als negativ und daher auch gleich Null werden können. Es wäre dies aber auch durchaus nicht die natürliche Verallgemeinerung unserer für Functionen eines einzigen Argumentes präcisirten Forderung; denn die charakteristische Eigenschaft der letzteren lag nur darin, dass das Verhalten der Function in der Umgebung des Nullpunktes bis zu einem gewissen Grade der Deutlichkeit ausgeprägt sein musste, gleichgültig, ob dies im Sinne des Maximums oder des Minimums oder des Nichteintretens von Maximum und Minimum der Fall war. Zu der wahren Verallgemeinerung jener Forderung für Functionen von zwei Variablen führt folgende Ueberlegung.

Offenbar wird die im Nullpunkte verschwindende Function $f(x, y)$, da sie stetig ist, auf jedem um den Nullpunkt als Centrum mit einem beliebigen Radius r beschriebenen Kreise irgendwo einen grössten und einen kleinsten Werth annehmen (falls sie sich nicht auf eine Function der einen Variablen $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ reducirt), und zwar werden die Vorzeichen dieser beiden *extremen Werthe*, welche wir mit $f_1(r)$ und $f_2(r)$ bezeichnen wollen, für genügend kleine Radien r das Eintreten oder Nichteintreten des Maximums oder Minimums im Nullpunkte erkennen lassen. Sind nämlich beide Grössen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ positiv, so wird ein Minimum, sind beide negativ, ein Maximum, sind endlich die Vorzeichen entgegengesetzt, weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinden. Der Grad der *Deutlichkeit*, bis zu welchem das Verhalten der Function $f(x, y)$ ausgeprägt ist, ist nun in allen drei Fällen gleichmässig daran zu messen, ob eine Potenz ar^n mit der Eigenschaft existirt, dass für *jeden* Werth von r unterhalb einer gewissen Grenze g beide *Extremwerthe* $f_1(r)$ und $f_2(r)$, *absolut genommen*, grösser als ar^n werden. Die Forderung, dass eine solche Potenz angebbar sei, ist

die gesuchte Verallgemeinerung der vorher für Functionen einer Veränderlichen präcisirten Bedingung, von welcher die Anwendbarkeit der allgemeinen Kriterien abhing; ist jene Forderung nicht erfüllt, so kann man auf die Gewinnung sicherer Kennzeichen des Maximums oder Minimums durch Potenzentwickelungen irgend welcher Art keinenfalls rechnen. Denn alsdann ist der äusserste Betrag, bis zu welchem die Function $f(x, y)$ in der Umgebung der Stelle $(0, 0)$ entweder dem Werthe Null von der einen Seite nahekومت, oder um den sie darüber hinausgehend sich nach der andern Seite von demselben entfernt, ein so geringer, dass er sich durch keine noch so hohe Potenz von r ausdrücken lässt; die Potenzentwickelung kann daher auch nicht zur Unterscheidung zwischen den beiden Fällen führen, wo der Werth Null nicht ganz erreicht und wo er noch um ein Weniges überschritten wird. Ein Beispiel dieser Art liefert die Function $y^2 + e^{-\frac{y^2}{x^2}}$, welche ein Minimum, sowie die Function

$$y^2 - e^{-\frac{y^2}{x^2}} = \left(y + e^{-\frac{y^2}{2x^2}}\right) \left(y - e^{-\frac{y^2}{2x^2}}\right),$$

welche weder ein Maximum noch ein Minimum hat. Jene nähert sich dem Werthe Null von der positiven Seite bis zum Betrage $e^{-\frac{y^2}{x^2}}$ (für $y = 0$), diese überschreitet die Null um denselben Betrag nach der negativen Seite hin. Uebrigens gehören hierher auch sämtliche Quadrate von Functionen, die sowohl positiv als negativ werden können, sowie überhaupt alle Functionen, welche in jeder Nähe der Stelle $(0, 0)$ den Werth 0 zwar noch erreichen, aber nicht überschreiten.

Existirt nun andererseits eine Potenz ar^n , deren Werth, solange r unterhalb einer gewissen Grenze g bleibt, immer kleiner als die absoluten Werthe der beiden Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ ist, so lässt sich die Frage, ob im Nullpunkte ein Maximum oder ein Minimum der Function $f(x, y)$ oder keins von beiden stattfindet, auf Grund der Potenzentwickelung immer mit Sicherheit und mittelst einer endlichen Anzahl principiell geordneter Einzeluntersuchungen beantworten. Wie das geschieht, soll im Folgenden auseinandergesetzt werden.

§ 5.

Reduction des Problems von beliebigen Functionen auf ganze rationale Functionen.

Man entwickle die Functionen $f(x, y)$ mit Benutzung der Lagrange'schen Restform nach Potenzen von x und y . Bezeichnet man dann die Gesammtheit der Glieder r ter Ordnung kurz mit $f^{(r)}(x, y)$, so wird:

$$(4) \quad f(x, y) = f^{(1)}(x, y) + \dots + f^{(n)}(x, y) + R_{n+1}(x, y) \\ = G_n(x, y) + R_{n+1}(x, y).$$

Das Restglied $R_{n+1}(x, y)$ ist eine binäre Form $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten aus den partiellen Ableitungen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Function $f(x, y)$ für die Argumente $\vartheta x, \vartheta y$ ($0 < \vartheta < 1$) gebildet sind. Man kann in diesem Restgliede x und y durch r und zugleich alle Coefficienten durch die grösstmöglichen absoluten Werthe ersetzen, welche sie überhaupt annehmen können, so lange r unterhalb einer gewissen Grenze bleibt, und erhält so für den absoluten Werth von $R_{n+1}(x, y)$ eine obere Grenze $A r^{n+1}$. Da nun für alle genügend kleinen r die mit $f_1(r)$ und $f_2(r)$ bezeichneten extremen Werthe der Function $f(x, y)$ nach Voraussetzung absolut grösser als $a r^n$ sind, $a r^n$ aber andererseits wiederum grösser als $A r^{n+1}$ ist, so folgt aus Formel (4) *erstens*, dass für genügend kleine r immer die extremen Werthe der ganzen rationalen Function $G_n(x, y)$ mit den Grössen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entsprechend gleiche Vorzeichen haben; und *zweitens*, dass, wenn a' irgend eine Zahl zwischen 0 und a bedeutet, immer eine obere Grenze g' für den Radius r so angegeben werden kann, dass die beiden extremen Werthe von $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a' r^n$ werden, so lange r kleiner als g' bleibt.

Fixiren wir nämlich für's Erste einen Radius r , welcher kleiner als $\frac{a}{A}$ ist und somit der Bedingung $a r^n > A r^{n+1}$ genügt, so wird auf der rechten Seite der Gleichung

$$(5) \quad G_n(x, y) = f(x, y) - R_{n+1}(x, y)$$

jedenfalls an denjenigen beiden Stellen, welche den Extremen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ der Function $f(x, y)$ auf der Peripherie des Kreises r entsprechen, das Vorzeichen des ersten Gliedes massgebend sein, da dasselbe hier (absolut) grösser als $a r^n$ ist, während das zweite Glied kleiner als $A r^{n+1}$ wird; haben nun die beiden Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ gleiches Vorzeichen, so ist überhaupt auf der ganzen Peripherie der Werth von $f(x, y)$, als zwischen den beiden Extremen liegend, absolut grösser als $a r^n$ und stimmt daher nach (5) im Vorzeichen mit $G_n(x, y)$ überein, es haben daher auch die beiden Extreme von $G_n(x, y)$ gleiches Vorzeichen mit den Extremen von $f(x, y)$; haben dagegen die beiden Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entgegengesetzte Vorzeichen, so haben die entsprechenden Werthe von $G_n(x, y)$ ebenfalls entgegengesetzte Vorzeichen, es müssen daher um so mehr den beiden *Extremen* der letzteren Function entgegengesetzte Vorzeichen zukommen. Hiermit ist die *erste* der aufgestellten Behauptungen erwiesen.

Die *zweite* Behauptung ergibt sich durch ganz ähnliche Ueberlegungen, wenn man den Radius r nicht nur kleiner als $\frac{a}{A}$, sondern

so klein annimmt, dass $ar^n - Ar^{n+1}$ grösser als $a'r^n$ wird, d. h. wenn man g' gleich $\frac{a-a'}{A}$ und r kleiner als g' macht. Dann nämlich hat die rechte Seite der Gleichung (5) für die den Extremen $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entsprechenden Werthe von x, y nicht nur das Vorzeichen von $f(x, y)$, sondern ist auch absolut grösser als $a'r^n$. Es wird daher, wenn die Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ gleiches Vorzeichen haben, die rechte Seite der Gleichung (5) überhaupt auf der ganzen Peripherie absolut grösser als $a'r^n$ sein; und wenn die Extreme $f_1(r)$ und $f_2(r)$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, werden die jenen Extremen entsprechenden, ebenfalls mit entgegengesetztem Zeichen versehenen Werthe von $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$ sein, um so mehr muss also dasselbe von den Extremen dieser letzteren Function gelten.

Wir können die beiden eben bewiesenen Behauptungen folgendermassen zusammenfassen.

„Es sei $f(x, y)$ eine an der Stelle $(0, 0)$ verschwindende Function, deren Verhalten in der Umgebung jener Stelle genügend deutlich ist, damit die Entscheidung über das Eintreten oder Nichteintreten eines Maximums resp. Minimums auf dem Wege der Potenzentwicklung nicht principiell unmöglich sei; mit anderen Worten, es existire eine Potenz ar^n von der Art, dass auf jedem um den Nullpunkt beschriebenen Kreise, dessen Radius r kleiner als eine bestimmte Grösse g ist, die beiden extremen Werthe (der grösste und der kleinste) der Function $f(x, y)$, $f_1(r)$ und $f_2(r)$, absolut grösser als ar^n seien. Entwickelt man dann $f(x, y)$ mit Benutzung der Lagrange'schen Restform nach Potenzen von x, y und bezeichnet die Gesammtheit aller Glieder der n ersten Dimensionen mit $G_n(x, y)$, das Restglied mit $R_{n+1}(x, y)$, sodass:

$$f(x, y) = G_n(x, y) + R_{n+1}(x, y)$$

wird, so verhält sich die ganze rationale Function $G_n(x, y)$ in der Umgebung der Stelle $(0, 0)$ ganz so wie die Function $f(x, y)$. Erstens nämlich stimmen die extremen Werthe beider Functionen für jeden genügend kleinen Radius r dem Vorzeichen nach entsprechend überein, woraus folgt, dass im Nullpunkte für beide Functionen gleichzeitig ein Maximum oder ein Minimum oder weder eines noch das andere eintritt; und zweitens sind, wenn a' irgend eine Zahl zwischen 0 und a bedeutet, für jeden Radius r innerhalb eines gewissen Kreises g' die extremen Werthe der Function $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$, woraus folgt, dass auch der Grad der Deutlichkeit, welchen das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ zeigt, der nämliche, wie bei der Function $f(x, y)$ ist.“

Man überzeugt sich leicht, dass in dem zum Beweise des vorstehenden Satzes angestellten Ueberlegungen überall $f(x, y)$ mit $G_n(x, y)$ vertauscht werden kann, da nur die Gleichung (5) zur An-

wendung kommt. Man erhält dadurch einen neuen Satz, welcher gewissermassen als Umkehrung des vorstehenden gelten kann. Bedenkt man noch, dass, wenn $f(0, 0)$ verschieden von Null ist, man nur im Vorhergehenden überall $f(x, y)$ durch die Differenz $f(x, y) - f(0, 0)$ zu ersetzen hat, so ergibt sich durch Zusammenfassung beider Sätze schliesslich Folgendes:

Eine beliebig gegebene Function $f(x, y)$ werde nach Potenzen von x, y entwickelt. Lässt sich dann die Zahl n und eine positive Grösse a' so bestimmen, dass die aus allen Gliedern der ersten n Dimensionen gebildete ganze rationale Function $G_n(x, y)$ auf jedem Kreise r , der in einem gewissen Gebiete g' liegt, extreme Werthe von absolut grösserem Betrage als $a' r^n$ besitzt, so haben die beiden Functionen $f(x, y)$ und $G_n(x, y)$ im Nullpunkte gleichzeitig ein Maximum oder ein Minimum oder weder ein Maximum noch ein Minimum. Lässt sich dagegen eine solche Zahl n mit der angegebenen Eigenschaft nicht bestimmen, so ist die Entscheidung über das Verhalten der Function $f(x, y)$ auf dem Wege der Potenzentwicklung überhaupt principiell unmöglich. Es genügt hiernach, um aus der Function $G_n(x, y)$ einen Schluss auf die Function $f(x, y)$ zu ziehen, noch nicht, dass $G_n(x, y)$ ein deutliches Verhalten hinsichtlich des Maximums oder Minimums zeigt; vielmehr muss noch die auf die Grössenordnung der Extreme von $G_n(x, y)$ bezügliche Bedingung erfüllt sein.

Wir werden die letztere Thatsache später schon an Beispielen von der denkbar einfachsten Beschaffenheit bestätigt finden, wo nämlich die Function $f(x, y)$ selbst eine ganze rationale Function ist und wo einmal die aus den ersten n Dimensionen zusammengesetzte Function $G_n(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes beständig positiv ist, während $f(x, y)$ auch negativ werden kann, ein andermal hingegen $G_n(x, y)$ sowohl positiv als negativ wird, während $f(x, y)$ constantes Vorzeichen bewahrt (vgl. Beispiel (4) und (2) am Schluss).

Durch den aufgestellten Fundamentalsatz ist die Untersuchung der Function $f(x, y)$ zurückgeführt auf die Untersuchung der ganzen rationalen Function $G_n(x, y)$. Man wird zunächst $n = 2$ annehmen, dann $n = 3$ u. s. w., und jedesmal die entsprechende Function $G_n(x, y)$ hinsichtlich ihrer Extremwerthe prüfen. Ist dann die Entscheidung über das Maximum oder Minimum der Function $f(x, y)$ überhaupt auf dem Wege der Potenzentwicklung ausführbar, so muss man früher oder später zu einer Function $G_n(x, y)$ gelangen, für welche jene Extremwerthe absolut grösser als ein Ausdruck $a' r^n$ sind, und diese Function liefert die gesuchte Entscheidung.

Es ist jetzt die Frage zu beantworten: Wie kann man erkennen, ob eine Grenze g' und eine Grösse a' von der Art existiren, dass auf jedem Kreise $r < g'$ die Extremwerthe einer gegebenen ganzen rationalen

Function n^{ten} Grades $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^n$ werden? Und wie kann man eventuell die Vorzeichen jener Extremwerthe feststellen und damit schliesslich zur Entscheidung über das Maximum oder Minimum der Function $G_n(x, y)$ im Nullpunkte kommen? Mit anderen Worten: Wie gestaltet sich die Theorie der Maxima und Minima für ganze rationale Functionen, auf deren Behandlung der Fundamentalsatz das allgemeine Problem zurückführt?

Diese Frage lässt sich, wie die nachfolgende Untersuchung zeigen wird, mit absoluter Vollständigkeit beantworten.

§ 6.

Homogene Functionen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, wo $G_n(x, y)$ ein *homogener* Ausdruck n^{ten} Grades ist:

$$G_n(xy) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} y^i.$$

Der Werth einer solchen homogenen Function ändert sich auf jeden den Nullpunkt enthaltenden Geraden proportional der n^{ten} Potenz von r . Sind also G und G' die Extremwerthe von $G_n(x, y)$ auf der Peripherie des Einheitskreises, so sind Gr^n und $G'r^n$ die Extremwerthe auf einem beliebigen Kreise r . Die Vorzeichen von G und G' kann man direct durch Zerlegung der Form G_n in ihre linearen Factoren erkennen, zu deren Auffindung die Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades genügt. Im Voraus sieht man, dass, wenn die Ordnung n eine *ungerade* ist, G und G' von 0 verschieden und entgegengesetzt gleich sein müssen, da der Ausdruck $G_n(x, y)$ bei Vertauschung von x, y gegen $-x, -y$ sein Vorzeichen wechselt. Ist dagegen n eine *gerade* Zahl, und sind erstens die Linearfactoren imaginär, so kann die Form $G_n(x, y)$ weder ihr Vorzeichen wechseln, noch verschwinden, sie ist *definit* und die Extreme G und G' haben gleiche Vorzeichen; sind zweitens reelle Linearfactoren und mindestens einer derselben in ungerader Ordnung vorhanden, so nimmt die Form $G_n(x, y)$ beide Vorzeichen an, sie ist *indefinit* und das Vorzeichen von G' ist dem von G entgegengesetzt; treten endlich drittens reelle Linearfactoren zwar auf, aber jeder nur in gerader Ordnung, so kann die Form $G_n(x, y)$ zwar verschwinden, aber nicht das Zeichen wechseln, sie ist *semidefinit* und eins der Extreme G und G' ist gleich Null.

In allen Fällen mit Ausnahme des letzten, ist eine positive Zahl a' so bestimmbar, dass auf jedem beliebigen Kreise r die Extremwerthe der Function $G_n(x, y)$, nämlich Gr^n und $G'r^n$; absolut grösser als $a'r^n$ werden; man braucht ja nur a' kleiner als die absoluten Werthe

von G und G' anzunehmen. In allen jenen Fällen findet daher an der Stelle $(0, 0)$ auf genügend *deutliche* Weise (im vorher präcisirten Sinne des Wortes) entweder ein Maximum oder ein Minimum der Function $G_n(x, y)$ oder keines von beiden statt, worüber die Vorzeichen der Extreme G und G' entscheiden. Welches diese Vorzeichen sind, ist jedesmal leicht aus den Linearfactoren erkennbar; denn wenn die Form $G_n(x, y)$ indefinit ist, so sind die Vorzeichen entgegengesetzt, und wenn sie definit ist, stimmen sie unter einander und mit dem Vorzeichen der Form $G_n(x, y)$ selbst für irgend ein specielles Werthepaar von x, y überein. In dem Falle endlich, wo reelle Linearfactoren vorhanden sind, aber jeder nur in gerader Ordnung, tritt an der Stelle $(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum der Form $G_n(x, y)$ ein, da dieselbe in der Umgebung zwar nicht beide Vorzeichen erhalten, wohl aber verschwinden kann. Eine Grösse a' mit der verlangten Eigenschaft existirt in diesem Falle nicht.

Die Zerlegung der Function $G_n(x, y)$ in Linearfactoren, welche die Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades erfordert, ist übrigens nicht unbedingt nothwendig, sondern man kann auch durch elementare algebraische Operationen zum Ziele gelangen.

Zunächst nämlich wird man nach bekannter Methode durch Absonderung der etwaigen vielfachen Factoren die Function $G_n(x, y)$ auf die Form bringen:

$$G_n = \psi_m^m \psi_{m-1}^{m-1} \cdots \psi_2^2 \psi_1,$$

wo allgemein ψ_x das einfache Product aller der Linearfactoren bezeichnet, welche G_n in der x^{ten} Ordnung enthält (sodass also, wenn kein Factor dieser Ordnung vorkommt, ψ_x eine blosse Constante ist, und im Besondern die Function G_n sich auf ψ_1 reducirt, wenn sie nur einfache Factoren besitzt). Vermittelst des Sturm'schen Satzes lässt sich dann weiter für jede der Functionen $\psi_m, \dots$ entscheiden, ob sich unter ihren Linearfactoren reelle befinden oder nicht; worauf man, da man auch die Exponenten $m, \dots$ kennt, die vorher angegebenen Sätze unmittelbar anwenden kann.

Die eben skizzirte Theorie der ganzen homogenen Functionen liefert uns auf Grund des Fundamentaltheorems für die allgemeine Theorie des Maximums und Minimums beliebiger Functionen den bekannten Satz:

„Sind in der Entwicklung der Function $f(x, y)$ nach Potenzen von x, y alle Glieder 1^{ter} bis $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension identisch gleich Null, während die Glieder n^{ter} Dimension eine Form $G_n(x, y)$ bilden, und ist erstens $G_n(x, y)$ indefinit (was bei ungeradem n immer der Fall ist), so findet an der Stelle $(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum der Function $f(x, y)$ statt; ist zweitens $G_n(x, y)$ definit, so tritt je nach

dem Vorzeichen dieser Form ein Maximum oder Minimum von $f(x, y)$ ein; ist endlich $G_n(x, y)$ semidefinit, so lässt sich das Verhalten der Function $f(x, y)$ aus dem Verhalten von $G_n(x, y)$ überhaupt nicht erkennen.“*)

§ 7.

Nicht homogene Functionen.

Es sei nun $G_n(x, y)$ ein beliebiger (nicht homogener) Ausdruck n^{ten} Grades ohne constantes Glied. Die Frage, ob im Nullpunkte ein Minimum oder ein Maximum von $G_n(x, y)$ stattfindet, d. h. ob in der Umgebung desselben $G_n(x, y)$ überall dasselbe Vorzeichen hat, ist dann offenbar gleichbedeutend mit der Frage, ob die algebraische

*) Der Beweis dieses bekannten Satzes wird häufig auf Betrachtungen gegründet, deren Fehlerhaftigkeit wir im Anfange dieses Aufsatzes nachgewiesen haben. Herr Peano giebt, um den gewöhnlichen Fehler zu vermeiden, einen Beweis (p. 197), welcher auf demselben Grundgedanken wie der unsrige beruht. Es scheint mir indes, dass dieser Beweis viel zu umständlich ist, wofern man bei dem einzelnen Satze stehen bleiben und denselben nicht vielmehr bloss als Bestandtheil einer umfassenderen Theorie ansehen will. Hat man nur jenen einen Satz im Auge, so lässt sich der Beweis (für beliebig viele Variabeln $x, y, z, \dots$) wohl am kürzesten dadurch führen, dass man in der Entwicklung der Function $f(x, y, z, \dots)$ schon für das Glied n^{ter} Ordnung (nicht erst für das nächste) die Lagrange'sche Restform einführt. Es wird dann nämlich

$$f(x, y, \dots) = \bar{G}_n(x, y, \dots),$$

wo $\bar{G}_n(x, y, \dots)$ eine Form n^{ten} Grades ist, deren Coefficienten nicht, wie diejenigen von $G_n(x, y, \dots)$ aus den n^{ten} partiellen Ableitungen der Function $f(x, y, \dots)$ für die Argumente $0, 0, \dots$, sondern aus den entsprechenden Ableitungen für die Argumente $\vartheta x, \vartheta y, \dots$ ($0 < \vartheta < 1$) zusammengesetzt sind. Man erkennt nun leicht, dass, so lange r , d. i. $\sqrt{x^2 + y^2 + \dots}$ und somit gleichzeitig die Grössen $\vartheta x, \vartheta y, \dots$ unterhalb einer gewissen Gränze g bleiben, die Form $\bar{G}_n(x, y, \dots)$ definit oder indefinit ist, jenachdem die Form $G_n(x, y, \dots)$ definit oder indefinit ist. Denn die beiden extremen Werthe welche eine Form n^{ter} Ordnung mit unbestimmten Coefficienten annimmt, wenn man ihre Argumente $x, y, \dots$ der Bedingung $x^2 + y^2 + \dots = 1$ unterwirft, sind offenbar stetige (algebraische) Functionen jener Coefficienten; und da diese Extremwerthe für die Form $G_n(x, y, \dots)$, falls dieselbe entweder definit oder indefinit (nur nicht semidefinit) ist, beide von Null verschieden sind, werden sie bei genügend kleinen Veränderungen der Coefficienten der Form, d. h. (wofern wir diese in die Form $\bar{G}_n(x, y, \dots)$ übergehen lassen) bei genügend kleinen Werthen von $\vartheta x, \vartheta y, \dots$ ihre Vorzeichen nicht wechseln. — Es findet daher an der Stelle $(0, 0, \dots)$ ein Maximum oder Minimum der Function $\bar{G}_n(x, y, \dots)$ (d. h. der Function $f(x, y, \dots)$) oder weder das eine noch das andere statt, je nachdem die Form $G_n(x, y, \dots)$ definit und entweder negativ oder positiv, oder indefinit ist. W. z. b. w.

Curve $G_n(x, y) = 0$ im Nullpunkte einen isolirten Punkt besitzt, oder nicht. Hierdurch wird der Gedanke nahe gelegt, die bei der Discussion der Singularitäten algebraischer Curven gebräuchlichen Methoden auf unsern Fall anzuwenden. In der That werden uns jene Methoden von wesentlichem Nutzen sein; denn wir werden vermittelst derselben die Discussion der Function $G_n(x, y)$ auf die Discussion einer Reihe *homogener* Functionen reduciren und so zur vollständigen Beantwortung nicht nur der Frage nach dem Maximum oder Minimum von $G_n(x, y)$, sondern auch der Frage nach der Existenz eines Ausdrucks $a'r^h$ gelangen, welcher für alle genügend kleinen Werthe von r kleiner sein soll, als die absoluten Beträge der dem Radius r entsprechenden Extremwerthe von $G_n(x, y)$.

1. Um uns zunächst über die verschiedenen Möglichkeiten, welche in dem Verhalten der Function $G_n(x, y)$ auftreten können, zu orientiren, fassen wir einen kleinen Kreis r ins Auge und suchen auf demselben diejenigen beiden Stellen, an welchen die Function $G_n(x, y)$ ihren grössten und ihren kleinsten Werth annimmt. Man findet dieselben bekanntlich, indem man die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_n(x, y)}{\partial x} - \lambda x &= 0, \\ \frac{\partial G_n(x, y)}{\partial y} - \lambda y &= 0, \\ x^2 + y^2 &= r^2\end{aligned}$$

nach x, y und λ auflöst. Durch Elimination von λ aus den beiden ersten Gleichungen entsteht die Gleichung n^{ten} Grades

$$(1) \quad y \frac{\partial G_n(x, y)}{\partial x} - x \frac{\partial G_n(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Dieselbe muss für alle Werthe von x und y befriedigt werden, welche den Stellen der extremen Werthe von $G_n(x, y)$ auf ganz beliebigen Kreisen r entsprechen. Es liegen daher alle jene Extremstellen auf der durch die Gleichung (1) definirten algebraischen Curve. Nun ist aus der Theorie der algebraischen Functionen bekannt, dass jeder den Nullpunkt enthaltende Zweig einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung sich in der Umgebung des Nullpunktes durch eine unabhängige Variable x in der Form:

$$(2) \quad \begin{cases} x = a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \\ y = b_1 x + b_2 x^2 + \dots \end{cases}$$

darstellen lässt; und zwar kann die Darstellung, welche auf unendlich viele Arten möglich ist, immer so eingerichtet werden, dass in jeder

der *beiden* Reihen der erste von Null verschiedene Coefficient (falls ein solcher überhaupt existirt) höchstens den Index n hat. Es sind also auch diejenigen beiden den Nullpunkt enthaltenden Zweige der algebraischen Curve (1), deren Schnittpunkte mit jedem Kreise von hinreichend kleinem Radius r die Stellen liefern, welche den extremen Werthen von $G_n(x, y)$ auf diesem Kreise entsprechen, in der Form (2) durch einen unabhängigen Parameter x darstellbar, so lange wenigstens, als es sich nur um die unmittelbare Umgebung des Nullpunktes, d. h. um genügend kleine Werthe von x handelt. Wir wollen jene Zweige kurz die beiden *Extremcurven* der Function $G_n(x, y)$ nennen.

Es ist jetzt der Fall, wo (ausser etwa für vereinzelte Werthe von r) die Extremwerthe von $G_n(x, y)$ beide von Null verschieden sind, von dem andern, wo einer derselben beständig gleich Null ist, zu trennen. Sind beide Extremwerthe von Null verschieden, so wird der Ausdruck $G_n(x, y)$, falls man für x und y die einer Extremcurve entsprechenden Reihen (2) einsetzt, mit einer Potenz Ax^μ beginnen, welche für genügend kleine Werthe von x sowohl das Vorzeichen als auch die Ordnung der Kleinheit des ganzen Ausdrucks bestimmt. Diese Ordnung ist die m^{te} , wofern man x als Grösse erster Ordnung, und die $\frac{m}{\mu}^{\text{te}}$, wofern man r als Grösse erster Ordnung betrachtet und mit μ den niedrigsten in den Reihen (2) *wirklich vorkommenden* Exponenten von x bezeichnet. Die Zahl μ ist, wie schon erwähnt, bei geeigneter Wahl der Parameterdarstellung (2) höchstens gleich n . Entsprechende Grössen A' , m' und μ' erhält man für die zweite Extremcurve. Sind nun die Zahlen m und m' nicht beide gerade, so kann von einem Minimum oder Maximum der Function $G_n(x, y)$ im Nullpunkte keinesfalls die Rede sein, da die Function dann jedenfalls auf einer Extremcurve das Vorzeichen mit x wechselt. Das Gleiche gilt, wenn zwar m und m' gerade Zahlen sind, A und A' aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, da alsdann auch die Function $G_n(x, y)$ auf den beiden Extremcurven verschiedene Vorzeichen aufweist. Ist endlich m und m' gerade und zugleich A von gleichem Vorzeichen mit A' , so tritt ein Maximum oder Minimum der Function $G_n(x, y)$ ein, je nachdem dieses Vorzeichen das positive oder das negative ist. In allen drei Fällen lässt sich offenbar eine Grösse a' und eine obere Grenze g' des Radiusvectors r so bestimmen, dass für $r < g'$ die Werthe von $G_n(x, y)$ auf beiden Extremcurven überall absolut grösser als $a' r^p$ werden, wo mit p die grössere der beiden Zahlen $\frac{m}{\mu}$ und $\frac{m'}{\mu'}$ bezeichnet ist, und zwar ist dieser Exponent p (der aber natürlich nicht nothwendig eine ganze Zahl zu sein braucht), zugleich der *kleinste*, für welchen ein Ausdruck $a' r^p$ mit der angegebenen Eigenschaft existirt.

Ist dagegen der Werth von $G_n(x, y)$ auf einer der beiden Extremcurven beständig gleich Null, so findet selbstverständlich kein Maximum oder Minimum im Nullpunkte statt; und noch weniger giebt es einen Ausdruck $a'r^p$ von der eben verlangten Art. Dieser Fall kann aber nur dann eintreten, wenn die Function $G_n(x, y)$ einen quadratischen Factor enthält, durch dessen Nullsetzen eine den Nullpunkt enthaltende reelle Doppelcurve definirt wird, da sonst mit dem Verschwinden der Function $G_n(x, y)$ beim Fortgange auf irgend einem Kreise r ein Zeichenwechsel verbunden sein müsste. Nun kann man sich allemal im Voraus durch elementaralgebraische Operationen Gewissheit hinsichtlich der Existenz quadratischer Factoren überhaupt verschaffen. Wir wollen daher in der Folge der Einfachheit wegen annehmen, dass die Function $G_n(x, y)$ solche quadratische Factoren, durch welche *reelle* Doppelcurven definirt würden, jedenfalls nicht enthält.

Unter dieser Voraussetzung, deren Eintreffen man bei jedem einzelnen Beispiele in erster Linie zu prüfen haben wird, giebt es, den vorher angestellten Ueberlegungen zufolge, immer eine kleinste Zahl p , zu welcher sich eine Constante a' und eine obere Grenze g' des Radius r so bestimmen lässt, dass auf jedem Kreise $r < g'$ beide Extremwerthe der Function $G_n(x, y)$ absolut grösser als $a'r^p$ werden, und zwar drückt jene Zahl p (wenn man die Ordnung von r als Einheit nimmt) die Ordnung der Kleinheit der Function $G_n(x, y)$ auf derjenigen der beiden Extremcurven aus, auf welcher diese Ordnung die höhere ist. Ist p höchstens gleich n , so ist $a'r^p$ für kleine r nicht kleiner als $a'r^n$, die beiden Extremwerthe von $G_n(x, y)$ sind daher sicher auch absolut grösser als $a'r^n$; ist dagegen p grösser als n , so wird für kleine r mindestens einer der Extremwerthe von G_n absolut kleiner als $a'r^n$, wie auch die Constante a gewählt werden mag; denn p ist der kleinste Exponent, für welchen die Extremwerthe absolut noch grösser als ein Ausdruck $a'r^p$ bleiben. Je nach dem Verhalten auf beiden Extremcurven tritt im Nullpunkte ein Maximum oder ein Minimum der Function $G_n(x, y)$ oder weder eins noch das andere ein. Indessen ist nach unserem Fundamentaltheorem die Function $G_n(x, y)$ für eine Function $f(x, y)$, aus deren Entwicklungsgliedern 1^{ter} bis n ^{ter} Ordnung sie besteht, hinsichtlich des Maximums oder Minimums nur dann massgebend, wenn der charakteristische Exponent p höchstens gleich n ist.

2. Wollte man im einzelnen Falle die Function $G_n(x, y)$ auf dem Wege, welchen die vorstehenden allgemeinen Ueberlegungen genommen haben, discutiren, so müsste man die Coefficienten in den Reihen (2) wirklich berechnen und alsdann diese Reihen in die Function $G_n(x, y)$ einsetzen. Ein solches Verfahren wäre, da jene Coef-

ficienten von unübersichtlichen Gleichungen höheren Grades abhängen, äusserst schwerfällig. Nun lässt sich aber ein Algorithmus aufstellen, der aus lauter elementaren Operationen besteht und indirect schliesslich zu demselben Ziele führt, welches bei den vorstehenden Ueberlegungen direct ins Auge gefasst wurde. Dieser Algorithmus ist in seinen wesentlichen Zügen als Newton-Cramer'sche Regel aus der Theorie der Singularitäten algebraischer Curven längst bekannt.

Der Grundgedanke, durch welchen man zu diesem Algorithmus hingeleitet wird, ist folgender: Man denke sich zunächst die Reihen (2) mit ihren unbestimmten Coefficienten $a_1, a_2, \dots b_1, b_2, \dots$ in die Function $G_n(x, y)$ eingesetzt und diese nach Potenzen von x entwickelt. Dann nehme man für die Coefficienten $a_1, a_2, \dots b_1, b_2, \dots$ alle überhaupt möglichen Werthe an und untersuche jedesmal die niedrigste in der Entwicklung von $G_n(x, y)$ auftretende Potenz von x . Jedes System von Werthen der Coefficienten $a_1, a_2, \dots b_1, b_2, \dots$ stellt eine bestimmte Curve dar, und die niedrigste Potenz von x charakterisirt jedesmal das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ auf derselben hinsichtlich des Maximums oder Minimums. Unter den unendlich vielen Curven kommen dann jedenfalls auch die beiden Extremcurven vor, welche die endgültige Entscheidung der gestellten Fragen liefern; die Discussion derselben wird daher in der Discussion aller überhaupt möglichen Curven implicite erhalten sein.

Es lässt sich aber weiter zeigen, dass man auf diesem Wege jedesmal schon durch eine *endliche* Anzahl einzelner Untersuchungen zu sicherer Entscheidung gelangen kann.

Man erkennt dies am besten, wenn man die Form der Reihen (2) von Anfang an noch beschränkt. Jede beliebige Einschränkung nämlich ist für unsern Zweck zulässig, sobald nur die Gewissheit vorliegt, dass durch dieselbe keine der beiden Extremcurven ausgeschlossen wird. Nun lässt sich jeder Zweig einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung, welche den Nullpunkt enthält, immer durch Gleichungen von der Form

$$(3) \quad \begin{cases} x = a_\alpha x^\alpha, \\ y = b_\beta x^\beta + b_{\beta+1} x^{\beta+1} + \dots \end{cases}$$

ausdrücken, wo sowohl α als auch der Index β des ersten von Null verschiedenen Coefficienten b_β (falls ein solcher überhaupt existirt) höchstens gleich n ist. Unter den Curven von der Form (3) müssen daher nothwendig auch die beiden unbekannten Extremcurven enthalten sein.

Enthält nun, wie wir angenommen haben, die Function $G_n(x, y)$ keinen quadratischen Factor, dessen Nullsetzung eine reelle Doppelcurve definirt, so beginnen die den beiden Extremcurven (3) entsprechenden Entwicklungen von $G_n(x, y)$ mit Potenzen Ax^m , resp.

$A'x^{m'}$. In die Coefficienten A und A' dieser Potenzen können die Grössen b jedenfalls höchstens bis zum Index m , resp. m' eingehen. Es wird daher, um das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes und speciell auf ihren beiden Extremcurven zu erkennen, genügen, dass man, unter M die grösste der Zahlen m und m' verstanden, nach Einführung der unbestimmten Reihen

$$\begin{aligned}x &= a_\alpha x^\alpha, \\y &= b_1 x + b_2 x^2 + \dots\end{aligned}$$

in die Function $G_n(x, y)$ nur den ersten M Grössen $b_1, b_2, \dots$ alle möglichen Werthe giebt; denn die Werthe der folgenden sind ohne Einfluss auf das Verhalten der Function. Nun kennt man allerdings die Zahl M nicht im Voraus; dieselbe ergibt sich indessen im Laufe der Untersuchungen von selbst. Denn für beliebig angenommene Werthe einer gewissen Anzahl von Coefficienten b kann man, wie in der Folge ausführlich gezeigt werden soll, jedesmal entscheiden, ob die höheren Coefficienten noch Einfluss auf das erste Glied der Entwicklung von $G_n(x, y)$ haben können, oder nicht; zieht man also der Reihe nach immer mehr Coefficienten b in Betracht, so erkennt man den Moment, wo die Zahl M erreicht ist, ganz genau.

Durch die vorangehende Ueberlegung sollte zunächst nur nachgewiesen werden, dass man schliesslich immer zu einer Zahl M mit der Eigenschaft gelangen muss, dass die Coefficienten $b_{M+1}, b_{M+2}, \dots$ für die Beurtheilung des Verhaltens von $G_n(x, y)$ auf den beiden Extremcurven unwesentlich sind.

3. Wir gehen jetzt dazu über, das in den Grundzügen angedeutete Verfahren schrittweise im Einzelnen durchzuführen.

Setzt man nach (3)

$$\begin{aligned}x &= a_\alpha x^\alpha, \\y &= b_\beta x^\beta + b^{\beta+1} x^{\beta+1} + \dots\end{aligned}$$

und lässt die Coefficienten $a_\alpha, b_\beta, \dots$ unbestimmt, während man den Zahlen α und β irgend welche Werthe giebt, so werden im Allgemeinen nicht alle Glieder der Function $G_n(x, y)$ bei der Entwicklung nach x Beiträge zu der niedrigsten Potenz liefern. Man gewinnt einen Ueberblick über die verschiedenen möglichen Fälle vermittelt der Newton-Cramer'schen Regel.

Es sei nämlich $x^\xi y^\eta$ ein Potenzausdruck mit unbestimmten Exponenten ξ, η ; wir fragen zunächst nach den sämmtlichen Werthen ξ, η , welche denselben, wenn darin

$$(4) \quad x = x^\alpha, \quad y = x^\beta$$

gesetzt wird, in eine gegebene Potenz x^m verwandeln. Offenbar haben diese Eigenschaft alle diejenigen Zahlen ξ, η , welche der Gleichung

$$\alpha\xi + \beta\eta = m$$

genügen, und nur diese. Deuten wir ξ und η als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so definirt jene Gleichung eine gerade Linie, welche, wofern α , β , m positive Zahlen sind, sowohl die ξ - wie die η -Axe auf der *positiven* Seite schneidet. Fixirt man einen beliebigen Punkt $(\xi\eta)$ im *Innern* des von jener Geraden und den Axen ξ und η gebildeten Dreiecks, so ist für denselben immer $\alpha\xi + \beta\eta$ kleiner als m , d. h. $x^\xi y^\eta$ wird durch die Substitutionen (4) einer niedrigeren als der m^{ten} Potenz von x gleich; umgekehrt wird für jeden, *ausserhalb* des Dreiecks in dem von der $+\xi$ - und der $+\eta$ -Axe gebildeten Winkel gelegenen Punkt $\alpha\xi + \beta\eta$ grösser als m , d. h. $x^\xi y^\eta$ wird einer höheren als m^{ten} Potenz von x gleich.

Wir denken uns nun sämmtliche, den einzelnen Gliedern $x^\xi y^\eta$ des Ausdrucks $G_n(x, y)$ entsprechende Punkte $\xi\eta$ construirt und fixiren von diesen Punkten (die sämmtlich zwischen (oder auf) der $+\xi$ - und der $+\eta$ -Axe liegen) zunächst denjenigen, welcher der η -Axe am nächsten (resp. auf derselben) liegt, und, falls deren mehrere existiren, speciell denjenigen, welcher die kleinste Ordinate η hat. Um diesen Punkt P_1 drehen wir eine gerade Linie aus einer durch die *negative* η -Axe bestimmten Anfangslage gegen die Richtung der positiven ξ -Axe hin, bis sie einen der übrigen Punkte (P_2) trifft (oder gleichzeitig mehrere, in welchem Falle unter P_2 der am weitesten von P_1 entfernte zu verstehen ist) und verbinden P_1 mit P_2 durch eine Gerade. Hierauf drehen wir die bewegliche Linie in demselben Sinne so lange um den Punkt P_2 , bis sie einen der übrigen Punkte (P_3) trifft (wobei, wenn gleichzeitig mehrere getroffen werden, wiederum unter P_3 der am weitesten von P_2 entfernte verstanden werden soll) und ziehen die Gerade $P_2 P_3$. Dies ist so lange fortzusetzen, bis derjenige der Punkte P erreicht ist, welcher der ξ -Axe am nächsten (resp. auf derselben) liegt und, falls mehrere solche existiren, unter diesen zugleich die kleinste Abscisse ξ hat. Auf diese Weise entsteht eine *aus geradlinigen Stücken bestehende Curve C*, deren convexe Seite gegen den Anfangspunkt des Coordinatensystems gerichtet ist.

Nimmt man nun in den Reihen (3) für α und β irgend welche bestimmte Zahlen an, während die Coefficienten a und b noch unbestimmt bleiben sollen, so rührt die niedrigste Potenz von x in der Entwicklung der Function $G_n(x, y)$ auf den Curven (3) zunächst nur von den Substitutionen $x = a_\alpha x^\alpha$, $y = b_\beta x^\beta$ her. Es können ferner zu dieser niedrigsten Potenz immer nur solche Glieder von $G_n(x, y)$ beitragen, deren entsprechende Punkte P auf der Curve C liegen. Denn ist $P_0 = (\xi_0 \eta_0)$ ein beliebiger jener Punkte, der nicht auf C liegt, so bildet, wie wir gesehen haben, die durch P_0 gelegte Gerade

$$\alpha\xi + \beta\eta = \alpha\xi_0 + \beta\eta_0$$

mit der ξ - und der η -Axe ein Dreieck von der Beschaffenheit, dass jedes Glied $x^\xi y^\eta$, dessen Exponenten einem *innern* Punkte des Dreiecks entsprechen, eine niedrigere Potenz von x liefert, als das dem Punkte P_0 selbst entsprechende Glied; bedenkt man aber, dass die durch P_0 gelegte Gerade (da α wie β positiv ist) sowohl die ξ -Axe als die η -Axe auf der positiven Seite trifft, so überzeugt man sich durch den Augenschein leicht davon, dass von den auf der Curve C gelegenen Punkten P immer mindestens einer ein innerer Punkt des betrachteten Dreiecks ist. — Aber auch von denjenigen Gliedern der Function $G_n(x, y)$ welchen Punkte auf der Curve C entsprechen, können nicht alle *gleichzeitig* Beiträge zu der niedrigsten Potenz von x liefern; vielmehr theilnehmen sich daran, je nach der Wahl der Zahlen α und β , entweder nur ein einziger der vorher mit $P_1, P_2, P_3, \dots$ bezeichneten Eckpunkte, oder doch höchstens die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, welche auf einer und derselben in der Curve C enthaltenen Geraden liegen. Denn verbindet man irgend zwei nicht auf derselben Geraden befindliche Curvenpunkte (P und P') mit einander, so entsteht wiederum ein Dreieck, in dessen Innerem das ganze Stück der Curve C von P bis P' verläuft; und da dieses Curvenstück sicher einen Eckpunkt enthält, d. h. einen Punkt, dem ein Glied der Function G_n entspricht, so hat man für dieses Glied wiederum eine niedrigere Potenz von x , als für die den Punkten P und P' entsprechenden Glieder.

Andrerseits theilnimmt sich, wie sogleich gezeigt werden soll, jeder beliebige Eckpunkt von C und jede beliebige in C enthaltene Gerade bei richtiger Wahl der Zahlen α und β auch wirklich an der niedrigsten Potenz von x in der Entwicklung von $G_n(x, y)$; und zwar kann man nach Belieben bewirken, dass diese niedrigste Potenz nur von einem einzigen (einem Eckpunkte entsprechenden) Gliede herrührt, oder aus mehreren (einer Geraden entsprechenden) Gliedern zusammengesetzt ist.

4. Wir ziehen zunächst einen beliebigen *Eckpunkt* (oder auch einen der beiden Eckpunkte) der Curve C in Betracht und legen durch denselben irgend eine Gerade, welche sowohl die positive ξ -Axe als die positive η -Axe schneidet und zugleich zwischen diesen beiden Schnittpunkten niemals auf die concave Seite der Curve C übertritt. Ist $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$ die Gleichung einer solchen Geraden, wobei offenbar in Anbetracht des Spielraums, den wir derselben gelassen haben, für α und β *ganze positive* Zahlen angenommen werden dürfen, so liefert, wenn wir $x = x^\alpha$, $y = x^\beta$ setzen, einzig und allein das jenem Eckpunkte entsprechende Glied von $G_n(x, y)$ die niedrigste Potenz von x ; und zwar ist dies die Potenz $x^{\alpha\xi + \beta\eta}$, wenn ξ und η die Coordinaten des Eckpunktes sind. Denn alle anderen Punkte P liegen wiederum

ausserhalb der von der Linie $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$ und den Axen ξ und η gebildeten Dreiecks. Man sieht nun, dass auf den Curven

$$(5) \quad \begin{cases} x = \alpha, & y = \alpha^\beta, \\ x = \alpha, & y = -\alpha^\beta, \\ x = -\alpha, & y = \alpha^\beta, \\ x = -\alpha, & y = -\alpha^\beta \end{cases}$$

und überhaupt auf allen Curven von der Form (3) für die angenommenen Werthe von α und β im Nullpunkte nur dann gleichzeitig ein Minimum oder gleichzeitig ein Maximum der Function $G_n(x, y)$ stattfinden kann, wenn in dem betrachteten Gliede $x^\xi y^\eta$ dieser Function die Exponenten ξ und η beide gerade sind; und zwar findet alsdann, wenn der Coefficient jenes Gliedes positiv ist, ein Minimum, wenn er negativ ist, ein Maximum statt; ist dagegen mindestens einer der beiden Exponenten ξ und η ungerade, so hat die Function $G_n(x, y)$ an der Stelle $(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Betrachten wir zunächst den letzten Fall eingehender! Offenbar wird bei geeigneter Bestimmung einer positiven Constanten a' die Function $G_n(x, y)$ auf den Curven (5) für genügend kleine Werthe von x sowohl grösser als $a' x^{\alpha\xi + \beta\eta}$, als auch kleiner als $-a' x^{\alpha\xi + \beta\eta}$. Nennen wir nun ε die kleinere der beiden Zahlen α und β , und r , wie früher, den Radiusvector $\sqrt{x^2 + y^2}$, so ist r auf den betrachteten Curven von der Ordnung x^ε und das Anfangsglied in der Entwicklung

der Function $G_n(x, y)$ von der Ordnung $r^{\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}}$. Es wird daher (wiederum bei geeigneter Bestimmung einer positiven Constante a'')

die Function $G_n(x, y)$ auf den Curven (5) sowohl grösser als $a'' r^{\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}}$, als auch kleiner als $-a'' r^{\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}}$.

Nun ist klar, dass die Veränderung der Function $G_n(x, y)$ auf den beiden unbekannten Extremcurven mindestens ebenso rasch vor sich gehen muss, d. h. dass auf einer derselben

$G_n(x, y)$ sicherlich auch grösser als $a'' r^{\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}}$, auf der andern kleiner als $-a'' r^{\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}}$ sein wird.

Ist die Grösse $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ höchstens gleich n , so sind damit überhaupt alle hinsichtlich der Function G_n gestellten Fragen erledigt; denn es folgt in diesem Falle, dass das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ deutlich genug ist, um für eine beliebige Function $f(x, y)$, von der sie die Entwicklungsglieder 1^{ter} bis n ^{ter} Ordnung bildet, massgebend zu sein. Ist dagegen $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ grösser als n , so zeigt die Untersuchung des einzelnen Eckpunktes zwar, dass die Function $G_n(x, y)$ selbst kein Maximum oder Minimum hat, aber

sie entscheidet nicht die Frage, ob die Aenderung auf den Extremcurven genügend stark ist, um für die Function $f(x, y)$ den Ausschlag zu geben. Indessen ist es möglich, dass man durch Ausnutzung des Spielraumes, den die Gerade $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$ und mit ihr die Zahlen α und β haben, auch dann noch die Grösse $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ gleich n oder kleiner als n machen kann, wenn dieses bei der zufällig getroffenen Wahl von α und β nicht der Fall war. Offenbar entspricht (für eine wirkliche Ecke) der *grösste* und der *kleinste* Werth jenes Quotienten $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ den beiden zur Curve C gehörigen Geraden, die in der betrachteten Ecke zusammenstossen. Da wir aber diese Geraden nachher noch besonders untersuchen werden, ist die Erörterung der entsprechenden Werthe von $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ an *dieser* Stelle unnöthig; wie wir denn überhaupt den Quotienten $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ hier nur zum Zwecke einer vorläufigen Orientirung über die verschiedenen Möglichkeiten erwähnt haben.

Im anderen Falle, wenn beide Exponenten ξ und η in dem betrachteten Gliede von $G_n(x, y)$ gerade sind, erkennt man aus der Untersuchung der einzelnen Ecke noch weniger als in dem eben besprochenen Falle. Man sieht nämlich alsdann nur erstens, dass auf den jenem einen Eckpunkte von C entsprechenden Curven (5) gleichzeitig ein Minimum, resp. Maximum von $G_n(x, y)$ im Nullpunkte stattfindet, und eventuell, wenn $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ höchstens gleich n ist, noch zweitens, dass das Verhalten auf *einer* der beiden Extremcurven allerdings die genügende Deutlichkeit besitzt. Dagegen bleibt das Verhalten auf der anderen Extremcurve durchaus ungewiss, man kann nicht einmal über das Vorzeichen auf derselben irgend einen Schluss ziehen, geschweige denn auf den Grad der Deutlichkeit. In diesem Falle muss man also die Discussion schon weiter führen, wenn man überhaupt nur die Antwort auf die erste der beiden Hauptfragen, nämlich die Frage nach dem Maximum oder Minimum von $G_n(x, y)$ erhalten will.

Es sind dann zunächst der Reihe nach alle Eckpunkte der Curve C einzeln zu untersuchen, und, falls sich unter ihnen keiner findet, von dessen Coordinaten ξ, η wenigstens eine ungerade ist, und für den zugleich

$$\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon} \leq n$$

werden kann, die Ergebnisse dieser Einzeluntersuchungen mit einander zu vergleichen. Sind die Coordinaten irgend einer Ecke nicht beide gerade (ohne dass sich jedoch die obige Ungleichung erfüllen liesse), oder aber kommen unter den Gliedern von $G_n(x, y)$, welche

Eckpunkten entsprechen, wenigstens zwei $c x^\xi y^\eta$ und $c' x^\xi y^\eta$ vor, in denen alle Exponenten gerade Zahlen und die Coefficienten c und c' von entgegengesetztem Zeichen sind, so zeigt dies wenigstens, dass $G_n(x, y)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum im Nullpunkte besitzt. Sind dagegen in allen denjenigen Gliedern $c x^\xi y^\eta$ von $G_n(x, y)$, welche Ecken der Curve C angehören, beide Exponenten ξ und η gerade und zugleich die Coefficienten c sämmtlich von demselben Vorzeichen, so bleibt auch schon unsere erste Hauptfrage vorläufig noch unentschieden.

5. Unter Umständen können aber dann die *Endpunkte* der Curve C dieselbe entscheiden. Auch für sie werden die angedeuteten Untersuchungen auszuführen sein, und zwar in derselben Weise, wie für die eigentlichen Eckpunkte. Es tritt diesen gegenüber nur der eine Unterschied ein, dass in jedem Endpunkte bloss eine einzige Gerade der Curve C ausmündet und man daher in dem Werthe, welchen die Ordnungszahl $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ für diese Gerade annimmt, nur entweder den grössten oder den kleinsten von den, im Eckpunkte ihr gestatteten Werthen erhält. Offenbar wird man aber den andern Extremwerth jener Zahl für den einen Endpunkt (den Ausgangspunkt unserer Construction) dadurch erhalten, dass man (in dem entsprechenden Gliede von $G_n(x, y)$) $x = 0$, für den zweiten dadurch, dass man $y = 0$ setzt. Verschwindet dieses Glied hierbei nicht, so giebt seine Ordnung unmittelbar jenen anderen Extremwerth an. Liegt dagegen der erste Endpunkt nicht auf der y -Axe oder der zweite nicht auf der x -Axe, so enthält $G_n(x, y)$ den Factor x oder y und wird also durch jene Substitution identisch Null, sodass in diesem Falle etwa von einer unendlich hohen Ordnungszahl $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ gesprochen werden und von einem Maximum oder Minimum der Function $G_n(x, y)$ keinesfalls die Rede sein kann. Indem wir übrigens in dieser Weise bei der Discussion der beiden Eckpunkte von C gleich die Curven $x = 0$ und $y = 0$ in Betracht ziehen, werden wir in die Lage gesetzt, später die beiden Coefficienten a_α und b_β in den Reihen (3) immer von Null verschieden anzunehmen.

6. Hat auch die Untersuchung der beiden Eckpunkte noch keine vollständige Entscheidung der gestellten Fragen gegeben, so sind nun diejenigen Werthe von α und β in Betracht zu ziehen, für welche gleichzeitig mehrere Glieder von $G_n(x, y)$, deren entsprechende Punkte auf einer und derselben in der Curve C enthaltenen Geraden liegen, Beiträge zu der niedrigsten Potenz von x liefern. Wie sind die Zahlen α und β einer bestimmten jener Geraden entsprechend zu wählen? Offenbar muss, wenn $\xi\eta$ und $\xi'\eta'$ zwei Punkte der Geraden sind,

$$\alpha\xi + \beta\eta = \alpha\xi' + \beta\eta', \text{ d. h. } \alpha : \beta = \eta - \eta' : \xi' - \xi$$

werden; und durch diese Proportion ist α und β vollständig definiert, wenn man noch festsetzt, dass diese beiden ganzen positiven Zahlen frei von gemeinschaftlichen Divisoren sein sollen. Wir bestimmen jetzt der Reihe nach die Zahlen α, β für alle in der Curve C enthaltenen Geraden. Bilden wir dann jedesmal die Ausdrücke

$$(3) \quad \begin{cases} x = a_\alpha x^\alpha, \\ y = b_\beta x^\beta + b_{\beta+1} x^{\beta+1} + \dots \end{cases}$$

und lassen die Coefficienten $a_\alpha, b_\beta, \dots$ zunächst unbestimmt, so rührt (nach Nr. 3) in der Entwicklung der Function $G_n(x, y)$ die niedrigste Potenz von x immer nur von denjenigen Gliedern dieser Function her, welche Punkten der in Betracht gezogenen Geraden entsprechen; und zwar treten darin, wie bereits früher bemerkt wurde, von den in (3) vorkommenden Coefficienten nur die ersten, nämlich a_α und b_β auf. Es ist nun jedesmal zu untersuchen, wie jene niedrigste Potenz sich für ganz beliebige Werthe der Grössen a_α und b_β , von denen jedoch keine gleich Null sein darf, verhält: ob sie beständig positiv oder beständig negativ oder beider Zeichen fähig ist, oder ob sie endlich zwar verschwinden, aber nicht das Vorzeichen wechseln kann. Tritt einer der drei ersten Fälle ein, so ist die Untersuchung für die betreffende Gerade abgeschlossen; auf allen Curven (3), die der betrachteten Geraden α, β entsprechen, beginnt dann die Entwicklung der Function $G_n(x, y)$ sicher mit der Potenz $x^{\alpha\xi + \beta\eta}$ und die Function selbst wird also, wenn wieder ε die kleinere der beiden Zahlen α und β bezeichnet, auf jeder dieser Curven in der Nähe des Nullpunktes von der Ordnung $\alpha\xi + \beta\eta$

ε . Im letzten Falle hingegen wird, falls nicht die für eine andere Gerade angestellte Untersuchung bereits definitive Ergebnisse hinsichtlich des Verhaltens der Function G_n zu Tage gefördert hat, die Hinzufügung der höheren Coefficienten $b_{\beta+1}, \dots$ nothwendig.

Wir wollen zunächst den Fall in Betracht ziehen, dass man für alle den verschiedenen Geraden von C entsprechenden Exponenten α, β , auch ohne Berücksichtigung der höheren Coefficienten $b_{\beta+1}, \dots$ abgeschlossene Resultate erhalten hat, also nirgends dem letzten Falle begegnet ist. Dann ist die Untersuchung überhaupt beendet. Denn sie ist bei der Betrachtung der Ecken und der Geraden von C für alle in der Form (3) darstellbaren Curven durchgeführt worden, die nicht mit der x - oder y -Axe zusammenfallen, und bei der Discussion der beiden Endpunkte von C auch für die Curven $x = 0$ und $y = 0$ selbst, und unter allen diesen Curven müssen sich auch die beiden Extremcurven befinden, welche für das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ entscheidend sind. Es ergibt sich nun entweder, dass alle jene Curven

bei der Entwicklung von $G_n(x, y)$ ein positives Anfangsglied, oder dass alle ein negatives Anfangsglied, oder dass einige ein positives, andere ein negatives Anfangsglied liefern. Im ersten Falle hat $G_n(x, y)$ im Nullpunkte ein Minimum, im zweiten ein Maximum, im dritten endlich weder Minimum noch Maximum. In allen drei Fällen aber ist das Verhalten von $G_n(x, y)$ auf jeder der beiden Extremcurven durch eine Potenz von r gegeben, deren Exponent einer der im Laufe der Untersuchung vorgekommenen Ordnungszahlen $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ ist. Findet ein Maximum oder Minimum statt, so gelten für die beiden Extremcurven offenbar der *grösste* und der *kleinste* aller im Laufe der Untersuchung vorgekommenen Werthe von $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$; tritt weder Maximum, noch Minimum ein, so gilt für die eine Extremcurve der *kleinste* vorgekommene Werth von $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$, welcher einem *positiven* Anfangsgliede entspricht: für die andere der *kleinste* Werth derselben Zahl, welcher ein *negatives* Anfangsglied geliefert hat. In allen Fällen sind die Werthe von $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ für die beiden Extremcurven jetzt mit Sicherheit festgestellt und damit die Deutlichkeit des Verhaltens von $G_n(x, y)$ erkannt; dasselbe ist für eine beliebige Function $f(x, y)$, deren Entwicklungsglieder erster bis n^{ter} Ordnung G_n bildet, massgebend oder nicht, jenachdem beide Werthe jener Ordnungszahl höchstens gleich n sind oder nicht.

Es bleibt aber noch übrig zu zeigen, wie man für eine bestimmte Gerade der Curve C entscheidet, welcher von unsern vier Fällen eintritt. Zur Beantwortung dieser Frage reichen die für die Untersuchung *homogener* Ausdrücke angegebenen Hilfsmittel aus. Der Coefficient des Anfangsgliedes in der Entwicklung des Werthes, welchen $G_n(x, y)$ durch die einer bestimmten Geraden α, β von C zugehörigen Substitutionen (3) erhält, ist nämlich aus den Coefficienten derjenigen Glieder der Function $G_n(x, y)$, welche Punkten der betrachteten Geraden entsprechen, und aus den beiden unbestimmten Grössen a_α und b_β zusammengesetzt und es handelt sich darum, ihn hinsichtlich seines Vorzeichens für beliebige Werthe der letzten beiden Grössen zu prüfen. Setzen wir aber, was die Willkürlichkeit derselben nicht beschränkt,

$$a_\alpha = \pm a^\alpha, \quad b_\beta = \pm b^\beta,$$

d. h. also: geben wir den Substitutionen (3) die Form

$$x = \pm a^\alpha x^\alpha, \quad y = \pm b^\beta x^\beta + b_{\beta+1}^{\beta+1} x^{\beta+1} + \dots,$$

so wird offenbar der zu untersuchende Coefficient homogen in a und b , und seine Discussion damit zurückgeführt auf die Discussion von *vier homogenen* Functionen der Grössen a und b (entsprechend den vier Vorzeichencombinationen), welche sich auf zwei, resp. auf eine reduciren, wenn alle Glieder von $G_n(x, y)$, deren Punkte der betrachteten

Geraden entsprechen, in Bezug auf x oder in Bezug auf y , resp. in Bezug auf beide Variablen von gerader Ordnung sind. Erweisen sich diese homogenen Functionen sämmtlich als *definit* oder als *indefinit*, so tritt für die betrachtete Gerade einer der ersten drei Fälle ein; ist aber irgend eine derselben *semidefinit*, so erhalten wir den vierten Fall.

7. Bevor wir zur Untersuchung dieses vierten Falles übergehen, wollen wir noch zeigen, dass die Untersuchung der *einzelnen Ecken*, mit welcher wir die Discussion begonnen haben, durch die jetzt angegebene Erörterung der verschiedenen in C enthaltenen Geraden *ganz und gar überflüssig wird*. Zu dem Zwecke fassen wir eine der *beiden* Geraden von C ins Auge, welche in einer beliebigen Ecke P zusammenstossen, und zwar, um die Vorstellung zu fixiren, diejenige, welche von P aus gegen die ξ -Axe gerichtet ist. Sind α und β die derselben entsprechenden Exponenten, so ist $x = \pm a^\alpha x^\alpha$ $y = \pm b^\beta y^\beta$ zu setzen, und derjenige homogene Ausdruck der Grössen a und b zu untersuchen, welcher den ersten Entwicklungscoefficienten von $G_n(x, y)$ bildet. Nun enthält in diesem Ausdrücke das dem Punkte P entsprechende Glied zugleich die höchste Potenz von b und die niedrigste von a ; man wird also dadurch, dass man a sehr klein gegen b macht, immer erreichen können, dass der ganze Ausdruck das Vorzeichen jenes Gliedes annimmt. Dasselbe kann bei der anderen in dem Eckpunkte P mündenden Geraden dadurch bewirkt werden, dass man umgekehrt b klein gegen a macht. Was aber die vorher mit $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ bezeichnete Ordnung betrifft, welche das zur Ecke P gehörige Glied von $G_n(x, y)$ im Vergleiche zu r besitzt, so sind, wie schon in Nr. 4 erwähnt wurde, der grösste und der kleinste aller Werthe, die jene Ordnungszahl $\frac{\alpha\beta + \xi\eta}{\varepsilon}$ in dem Eckpunkte überhaupt annehmen kann, eben diejenigen, welche den beiden in P zusammenstossenden Geraden der Curve C entsprechen. In derselben Weise wird durch die Discussion der *einen* Geraden von C , die in einem *Endpunkte* mündet, sowohl das Vorzeichen des ihm entsprechenden Gliedes von $G_n(x, y)$ als auch (Nr. 5) der grösste oder der kleinste von allen den Werthen erkannt, deren $\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon}$ in dem Endpunkte fähig ist. Man braucht also in der That schliesslich *nur die Geraden der Curve C , sowie (für $x = 0$, resp. $y = 0$) die beiden Glieder von $G_n(x, y)$ zu untersuchen, welche dem ersten und dem letzten Punkte dieser Curve entsprechen*.

8. Wir kommen jetzt schliesslich zu dem Falle, wo die Untersuchung der verschiedenen in der Curve C enthaltenen Geraden und der Endpunkte von C noch nicht zu abgeschlossenen Resultaten geführt hat, indem für eine oder mehrere jener Geraden die niedrigste Potenz

in der Entwicklung von $G_{\alpha}(x, y)$ ohne eines Zeichenwechsels fähig zu sein, doch durch geeignete Bestimmung der beiden Grössen a_{α} und b_{β} , oder, wenn man nach Nr. 7, $a_{\alpha} = \pm a^{\alpha}$, $b_{\beta} = \pm b^{\beta}$ setzt, bei passender Wahl der Vorzeichen und des Verhältnisses $a : b$, zum Verschwinden gebracht werden kann. In diesem Falle wird möglicher Weise die eine von beiden Extremcurven, oder unter Umständen beide, in der Schaar derjenigen Curven (3) zu suchen sein, für welche jener erste Entwicklungscoefficient verschwindet. Existiren mehrere Geraden α, β von C oder auch zu einer und derselben Geraden mehrere Werthe von $a : b$, resp. mehrere Zeichencombinationen, welche dieses Verschwinden bewirken, so wird die Untersuchung für jede einzelne solche Werth- und Zeichenzusammenstellung weiter zu führen sein. Man bilde alsdann für jeden einzelnen Fall mit den betreffenden bestimmten Werthen von α, β und $a : b$ und mit den bezüglichen Vorzeichen die Substitutionen:

$$(6) \quad \begin{cases} x = \pm a^{\alpha} x^{\alpha}, \\ y = \pm x^{\beta} (b^{\beta} + x') \end{cases}$$

und verwandle dadurch die Function $G_{\alpha}(x, y)$ in eine Function $G'(\alpha, \alpha')$ von α und α' . Dann untersuche man die Function $G'(\alpha, \alpha')$ der beiden Argumente α und α' genau in derselben Weise, wie vorher die Function $G_{\alpha}(x, y)$ der beiden Argumente x und y . Man construire also wieder in einem rechtwinkligen Axensystem $\xi' \eta'$ diejenigen Punkte, deren Coordinaten den Exponenten ξ' und η' von α und α' in den verschiedenen Gliedern des Ausdrucks $G'(\alpha, \alpha')$ gleich sind, und zeichne die zugehörige Curve C' . Dann untersuche man auf die frühere Weise die verschiedenen Geraden, welche diese Curve bilden, sowie denjenigen (End-) Punkt von C' , welcher auf der ξ' -Axe oder ihr zunächst liegt. Der andere Endpunkt (der Anfangspunkt) der Curve C' kommt nämlich hier nicht mehr in Betracht, weil der Fall $\alpha = 0$ nach (6) $x = 0, y = 0$ nach sich ziehen würde und daher auszuschliessen ist, während der Fall $\alpha' = 0$ nicht übergangen werden darf. Man erhält so, den verschiedenen Graden von C' entsprechend, eine Reihe von Substitutionen

$$\alpha = \pm a' \alpha' \alpha'' \alpha', \quad \alpha' = \pm b' \beta' \alpha'' \beta',$$

welche, in $G'(\alpha, \alpha')$ eingeführt, bei unbestimmten Werthen von $a' b'$, jedesmal ein Anfangsglied

$$A'' \alpha'' \alpha' \xi + \beta' \eta$$

der Entwicklung dieser Function liefern. Dieses Anfangsglied ist in Bezug auf α von der Ordnung:

$$\frac{\alpha' \xi + \beta' \eta}{\alpha}$$

und in Bezug auf r also von der Ordnung:

$$\frac{\alpha' \xi + \beta' \eta}{r^{\frac{\alpha' \xi + \beta' \eta}{\alpha' \varepsilon}}},$$

wenn ε , wie vorher, die kleinere der beiden Zahlen α und β bedeutet. Es kommt dann zur Entscheidung des Maximums oder Minimums von $G_n(x, y)$ wieder auf den Coefficienten jenes Anfangsgliedes, zur Entscheidung des Deutlichkeitsgrades auf den Quotienten $\frac{\alpha' \xi + \beta' \eta}{\alpha' \varepsilon}$ an.

Ausserdem ist noch das Verhalten der Function $G'(x, x')$ für $x' = 0$ zu untersuchen, welches sich durch das dem letzten Punkte von C' entsprechende Glied der Function offenbart.

Treten auch hier wieder unbestimmte Resultate auf, so ist das Verfahren in derselben Weise fortzusetzen. Den in Nr. 2 angestellten Ueberlegungen zu Folge muss die Untersuchung nach einer endlichen Anzahl von Operationen schliesslich von selbst ihren Abschluss finden, falls nicht $G_n(x, y)$ einen quadratischen Factor enthält, durch dessen Nullsetzen eine den Nullpunkt enthaltende reelle Doppelcurve defnirt wird. Es lassen sich also — wenn man diesen Fall ausschliesst — die beiden Fragen nach dem Eintreten oder Nichteintreten eines Maximums oder Minimums und nach dem Grade der Deutlichkeit, welchen das Verhalten der Function $G_n(x, y)$ zeigt, auf dem angegebenen Wege jedesmal mit Sicherheit entscheiden.

§ 8.

Beispiele.

$$1., G_4(x, y) = y^2 - (p^2 + q^2)x^2y + p^2q^2x^4$$

(Beispiel von Peano). Die den einzelnen Gliedern von $G_4(x, y)$ entsprechenden Punkte der $\xi\eta$ -Ebene sind (02), (21), (40); die Curve C verbindet dieselben in der Reihenfolge, in welcher sie eben genannt wurden, und zwar ist C hier eine einzige Gerade. Es sind zunächst die den Endpunkten entsprechenden Glieder y^2 und $p^2q^2x^4$ einzeln zu untersuchen, und zwar das erste für $x = 0$, das letzte für $y = 0$; es zeigt sich, dass beide positiv und resp. von der Ordnung r^2 und r^4 sind. Es bleibt nun noch übrig, die Gerade C selbst zu untersuchen. Die Gleichung derselben ist $\xi + 2\eta = 4$; ihr entspricht die Proportion $\alpha : \beta = 1 : 2$ und es ist daher

$$x = ax, \quad y = \pm b^2 x^2$$

zu setzen, wodurch $G_4(x, y)$ in:

$$(b^4 \pm (p^2 + q^2)a^2b^2 + p^2q^2a^4)x^4$$

übergeht. Zur Untersuchung des homogenen Ausdrucks

$$b^4 \pm (p^2 + q^2)a^2b^2 + p^2q^2a^4$$

löst man denselben am Einfachsten in seine Factoren auf. Dies giebt zunächst $(b^2 \pm p^2a^2)(b^2 \pm q^2a^2)$; und für das untere Vorzeichen weiterhin

$$(b + pa)(b - pa)(b + qa)(b - qa).$$

Es sind also, wenn das untere Vorzeichen gewählt wird, reelle einfache Linearfactoren vorhanden, die Form ist daher indefinit und es findet kein Maximum oder Minimum der Function $G_4(x, y)$ statt.

Da auch die der Geraden C entsprechende Potenz x^4 von der Ordnung r^4 ist $\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon} = \frac{4}{1}\right)$, so verhält sich zugleich die Function $G_4(x, y)$ genügend deutlich, um massgebend für jede beliebige Function $f(x, y)$ zu sein, deren Entwicklungsglieder 1^{ter} bis 4^{ter} Ordnung sie bildet, d. h. jede Function, welche aus $G_4(x, y)$ durch Vermehrung um Glieder von 5^{ter} und höherer Dimension entsteht, theilt mit $G_4(x, y)$ die Eigenschaft, im Nullpunkte weder ein Maximum noch ein Minimum, zu haben. —

$$2., \quad G_3(x, y) = y^2 + x^2y.$$

Die den beiden Gliedern der Function entsprechenden Punkte $\xi \eta$ sind (02) und (21): die Curve C besteht aus der sie verbindenden Geraden. Für den ersten Endpunkt ist $x = 0$, für den andern $y = 0$ zu setzen. dies giebt für $G_3(x, y)$ resp. die Werthe y^2 und 0, und man sieht schon, dass ein Maximum oder Minimum jedenfalls nicht stattfinden kann. Um den Grad der Deutlichkeit zu erkennen, welchen das Verhalten der Function aufweist, ist noch die Linie C in Betracht zu ziehen. Dieselbe hat die nämliche Gleichung $\xi + 2\eta = 4$, wie im ersten Beispiel; man muss also wieder $x = \alpha x$, $y = \pm b^2x^2$ setzen, wodurch $G_3(x, y)$ in $(b^4 \pm a^2b^2)x^4$ übergeht. Die dem unteren Vorzeichen entsprechende Form $b^4 - a^2b^2$ oder $b^2(b^2 - a^2)$ ist offenbar indefinit, $G_3(x, y)$ kann daher sowohl positiv als negativ werden. Indessen ist x^4 von der Ordnung $r^4\left(\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\varepsilon} = \frac{4}{1}\right)$, also von höherer Ordnung als r^3 . Es hat daher die Function $G_3(x, y)$ auf allen denjenigen Curven, wo sie negativ wird, eine höhere Grössenordnung als r^3 , woraus folgt, dass das Verhalten jener Function für eine beliebige Function $f(x, y)$, deren Glieder 1^{ter} bis 3^{ter} Dimension sie bildet, nicht massgebend ist. In der That hat z. B. die Function

$$f(x, y) = y^2 + x^2y + x^4$$

im Nullpunkte ein richtiges Minimum (siehe das folgende Beispiel).

$$3., \quad G_4(x, y) = y^2 + x^2y + x^4.$$

Dass diese Function ein Minimum hat, erkennt man leicht, wenn man sie in der Form $\left(y + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^4$ schreibt. Aber ist das Minimum

deutlich genug, um massgebend für eine beliebige Function $f(x, y)$ zu sein, die in den Gliedern 1^{ter} bis 4^{ter} Ordnung mit jener Function übereinstimmt?

Um hierüber zu entscheiden, müssen wir unsere allgemeine Methode in Anwendung bringen. Die Punkte $\xi\eta$ und die Curve C sind dieselben, wie im Beispiel (1). Die Endpunkte geben für $G_4(x, y)$ die positiven Werthe y^2 und x^4 , deren Ordnung resp. r^2 und r^4 , also jedenfalls nicht höher als r^4 ist. Für die Gerade C ist wieder $x = a\kappa$, $y = \pm b^2\kappa^2$ zu setzen, wodurch

$$G_4(x, y) = (b^4 \pm a^2b^2 + a^4)\kappa^4$$

wird. Die Formen $b^4 + a^2b^2 + a^4$ und $b^4 - a^2b^2 + a^4$ sind beide definit und positiv, was man am leichtesten durch die Transformation

$$b^4 \pm a^2b^2 + a^4 = \left(b^2 \pm \frac{1}{2}a^2\right)^2 + \frac{3}{4}a^4$$

erkennt. Es findet also ein Minimum statt, und da auf keiner Curve die Ordnung von $G_4(x, y)$ höher als r^4 ist, so haben auch alle Functionen $f(x, y)$, deren Glieder 1^{ter} bis 4^{ter} Dimension gleich $G_4(x, y)$ sind, im Nullpunkte ein Minimum.

$$4., \quad G_4(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 + y^4.$$

Schreibt man $G_n(x, y) = (y - x^2)^2 + y^4$, so sieht man unmittelbar, dass ein Minimum stattfindet, es ist indessen nicht erkennbar, ob dasselbe einen genügenden Grad der Deutlichkeit besitzt, um für beliebige Functionen $f(x, y)$, deren Glieder 1^{ter} bis 4^{ter} Dimension mit $G_4(x, y)$ übereinstimmen, massgebend zu sein. Wir führen daher die Untersuchung nach unserer allgemeinen Methode durch.

Die Punkte $\xi\eta$ sind hier (02), (21), (40), (04). Die Curve C besteht hier wieder aus der einen Geraden, welche die drei Punkte (02), (21), (40) verbindet und die Gleichung $\xi + 2\eta = 4$ hat. Der Punkt (04) kommt, da er nicht auf C liegt, zunächst gar nicht in Betracht. Für die beiden Endpunkte von C wird, wie vorher, $G_4(x, y)$ resp. gleich y^2 oder gleich x^4 , also positiv und höchstens von der Ordnung r^4 . Setzt man, der Geraden C entsprechend, $x + a\kappa$, $y = \pm b^2\kappa^2$, so enthält das Anfangsglied der Entwicklung von $G_4(x, y)$ nach Potenzen von κ die Gestalt

$$(b^4 \mp 2a^2b^2 + a^4)\kappa^4.$$

Der Coefficient von κ^4 ist hier für das untere Zeichen definit und positiv, für das obere hingegen semidefinit, indem er zwar (für $a^2 = b^2$) verschwinden, aber nicht negativ werden kann. Es lässt sich also vorläufig nur behaupten, dass die Function $G_4(x, y)$ positiv und höchstens von der Ordnung r^4 auf allen denjenigen Curven ist, welchen bei der Darstellung durch einen Parameter κ nicht die Anfangsglieder

$\pm ax$ für x und a^2x^2 für y (resp. $\pm ax^m$ für x und a^2x^{2m} für y , da nur das Verhältniss der Exponenten α und β bestimmt ist) zukommen. Für diese speciellen Curven muss die Untersuchung weiter geführt werden.

Wir setzen, entsprechend unsern allgemeinen Vorschriften,

$$x = x, \quad y = x^2(1 + x'),$$

indem wir x statt ax schreiben, wodurch offenbar die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird. Dann geht $G_4(x, y)$ über in:

$$G'(x, x') = x^4x'^2 + x^8(1 + x')^5.$$

Der Ausdruck $G'(x, x')$ könnte nun auf demselben Wege, wie vorher der Ausdruck $G_4(x, y)$ geprüft werden. Man übersieht indessen direct, dass derselbe immer positiv ist, da ja der Fall $x = 0$ hier ausgeschlossen werden muss.

Die Function $G_4(x, y)$ hat also auf allen Curven der letzten Art, ebenso wie auf allen früheren und somit sicher auch auf den beiden massgebenden Extremcurven ein Minimum im Nullpunkte, woraus folgt, dass ein Minimum überhaupt stattfindet. Indessen ist die Grössenordnung der Functionswerthe auf einer der beiden Extremcurven durch eine sehr hohe Potenz von r (die 8^{te}) gegeben; denn die Entwicklung von $G'(xx')$ fängt, sobald x' der zweiten oder einer höheren Potenz von x proportional gesetzt wird, mit x^8 an, und x hat selbst die Ordnung des Radius r . Das Verhalten der Function $G_4(x, y)$ ist daher, obschon dieselbe selbst ein deutliches Minimum zeigt, für eine beliebige Function $f(x, y)$, deren Glieder 1^{ter} bis 4^{ter} Dimension sie bildet, nicht massgebend. In der That hat z. B. die Function

$$f(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 + y^4 - x^6$$

kein Minimum. Denn nähert man sich dem Nullpunkte auf der Curve $y - x^2 = 0$, auf welcher $f(x, y) = x^6(x^2 - 1)$ ist, so tritt im Nullpunkte sogar ein Maximum ein.

5., Wir geben noch ein Beispiel, bei welchem die Curve C nicht, wie in den vorhergehenden Fällen, aus einer einzigen Geraden, sondern aus mehreren geradlinigen Stücken besteht. Es sei

$$G_{12}(x, y) = x^2y^4 - 3x^4y^3 + x^6y^2 - 3xy^7 + y^8 - 10x^{10}y + 5x^{12}.$$

Von den 7 Punkten, welche man, entsprechend den 7 Gliedern des vorstehenden Ausdruckes, in der $\xi\eta$ -Ebene zu construiren hat, fallen 5 auf die Curve C , nämlich der Reihe nach die Punkte $(0, 8)$, $(2, 4)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(12, 0)$, die beiden übrigen Punkte $(1, 7)$ und $(10, 1)$ kommen überhaupt nicht in Betracht. Den Endpunkten von C entsprechen die Ausdrücke y^8 und x^{12} , welche positiv und resp. von der Grössenordnung r^8 und r^{12} sind. Die drei in C enthaltenen Geraden haben resp. die Gleichungen

$$2\xi + \eta = 8,$$

$$\xi + 2\eta = 10,$$

$$\xi + 3\eta = 12.$$

Für die erste derselben ist also $x = a^2 x^2$, $y = b x$,

für die zweite $x = a x$, $y = \pm b^2 x^2$,

für die dritte $x = a x$, $y = b^3 x^3$

zu setzen. Dies giebt für $G_{12}(x, y)$ die drei Anfangsglieder:

$$(b^8 + a^4 b^4) x^8 = b^4 (b^4 + a^4) x^8,$$

$$(a^2 b^8 \mp 3 a^4 b^6 + a^6 b^4) x^{10} = a^2 b^4 ((a^2 \mp b^2)^2 \mp a^2 b^2) x^{10}.$$

$$(a^6 b^6 + 5 a^{12}) x^{12} = a^6 (b^6 + 5 a^6) x^{12}.$$

Dieselben sind resp. von den Grössenordnungen r^8 , r^{10} , r^{12} ; das erste und dritte ist ferner durchaus positiv, das zweite hingegen wird bei der Wahl des oberen Vorzeichens auch negativ (z. B. für $b^2 = a^2$). Es kann daher weder ein Maximum noch ein Minimum stattfinden, und zwar wird $G_{12}(x, y)$ auf einer der beiden unbekannten Extremcurven sicher das der ersten Geraden von C entsprechende Verhalten zeigen, nämlich in der Nähe des Nullpunktes positiv und proportional r^8 sein, auf der anderen Extremcurve hingegen entsprechend der zweiten jener Geraden, schliesslich negativ und proportional r^{10} werden. Das Verhalten der Function ist also genügend deutlich, um den Schluss zu motiviren, dass *jede beliebige* Function $f(x, y)$, deren Glieder erster bis 12^{ter} Dimension $G_n(x, y)$ übereinstimmen, ebenfalls weder ein Maximum noch ein Minimum im Nullpunkte haben kann. —