

*2. Zur Theorie der Ionisation in Kolonnen;
von George Jaffé.*

Die Theorie der Ionisation in Gasen ist bis jetzt vorwiegend auf Grund der Annahme entwickelt worden, daß es sich um eine gleichmäßige Ionisation des gesamten leitenden Volumens handelt. Während die Abweichungen von der Homogenität des elektrischen Feldes — wo ein solches in Betracht kommt — wiederholt den Anlaß zu tiefgehenden Studien gegeben haben, ist auf die ungleichförmige Anordnung der ursprünglich erzeugten Ionisation wohl nur in dem einen Falle Rücksicht genommen worden, daß die Ionisation auf eine sehr dünne Schicht beschränkt ist — und auch dann meist ohne Berücksichtigung der Diffusionserscheinungen.

Wie wenig aber, selbst im Falle der Ionisation durch Röntgen- oder β -Strahlen, die ursprüngliche Anordnung als homogen angesehen werden darf, zeigen auf das deutlichste die schönen photographischen Aufnahmen von C. T. R. Wilson¹⁾, wenn es auch schon früher — wenigstens für den Fall der Ionisation durch α -Strahlen — aus rein elektrischen Versuchen gefolgert worden war.

Bragg und Kleemann²⁾ wiesen zuerst darauf hin, daß im Falle der Ionisation durch α -Strahlen Sättigung sehr viel schwerer zu erreichen ist, als es die Theorie voraussehen läßt, und daß für hinreichend schwache Ionisationsstärken die Sättigungskurve von der Intensität der Strahlung und der Form der Ionisationskammer unabhängig wird. Beides erklärten sie durch die Annahme einer „anfänglichen Wiedervereinigung“, derzufolge das aus dem gleichen Molekül stammende Ionenpaar eine besondere Tendenz zur Wiedervereinigung hätte;

1) C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. A. 87. p. 277. 1912.

2) W. H. Bragg u. R. D. Kleemann, Phil. Mag. 11. p. 466. 1906;
R. D. Kleemann, Phil. Mag. 12. p. 273. 1906.

erst sehr starke Felder sollten eine vollständige Trennung bewirken können.

Später hat Moulin¹⁾ die durch α -Strahlen erzeugte Ionisation einer eingehenden experimentellen Untersuchung unterzogen und zur Deutung seiner Versuche eine von der Bragg'schen abweichende, von Langevin vorgeschlagene Hypothese herangezogen. Nach dieser sind die Ionen anfänglich nicht gleichmäßig über das ganze Volumen verteilt, sondern finden sich angehäuft in den nahezu geradlinigen Bahnen der α -Teilchen; infolgedessen wird die Wiedervereinigung zunächst viel stärker sein als bei gleichmäßiger Verteilung der gleichen Zahl von Ionen. Nach Langevin besteht also eine vorzugsweise Rückbildung nicht zwischen solchen Ionen, welche aus dem gleichen Molekül stammen, sondern zwischen allen denen, welche einer „Kolonie“, d. h. der Bahn des gleichen α -Teilchens, angehören; im übrigen sollen aber für die Vorgänge in der Kolonie Rekombination und Diffusion in normaler Weise verantwortlich sein.

Moulin hat aus dieser Hypothese eine Reihe von Folgerungen gezogen und durch das Experiment bestätigt gefunden, welche mit der Bragg'schen Annahme nicht vereinbar sind. Darum scheint — für Gase wenigstens — die Langevin'sche Hypothese den Vorzug zu verdienen, obgleich Wheelock²⁾ in einer Experimentaluntersuchung über den gleichen Gegenstand zu dem Schlusse kommt, daß man mit ihr alleine — ohne die Hilfsannahme einer anfänglichen Wiedervereinigung — nicht alle Beobachtungen erklären kann.

Neuerdings sind nun auch vom Verfasser³⁾ die Erscheinungen, die in ionisierten flüssigen Dielektriken beobachtet werden, mit einer Ionisation in Kolonnen in Zusammenhang gebracht worden. Gibt es solche Kolonnen — und daran kann wohl kaum gezweifelt werden — so müssen sogar die

1) M. M. Moulin, Thèses, Paris, Gauthier-Villars 1910, abgedruckt in *Ann. de chim. et de phys.* VIII. 21. p. 550. 1910 und VIII. 22. p. 26. 1911.

2) F. E. Wheelock, *Amer. Journal of Science* 30. p. 233. 1910.

3) G. Jaffé, *Le Radium* 10. p. 126. 1913; auf diese Arbeit wird im folgenden mit dem Buchstaben J und folgender Seitenzahl im Text verwiesen.

daraus sich ergebenden Abweichungen vom normalen Verhalten im flüssigen Medium viel ausgeprägter sein als in Gasen, und können sich möglicherweise schon bei der Ionisation durch β - und γ -Strahlen bemerkbar machen. Messungen von Greinacher¹⁾ und vom Verfasser (J, Tab. V) haben ergeben, daß α -Strahlen in flüssigen Medien scheinbar nur etwa 1000mal so wenig Ionen erzeugen als in Gasen; β -Strahlen dagegen nur etwa 5—10mal so wenig. Dieser Umstand, sowie die langsame Zunahme des Ionisationsstromes, die bei homogenem Felde bei den höchsten Feldwerten immer noch zu beobachten ist, sind vom Verfasser auf die Ionisation in Kolonnen zurückgeführt worden und es wurde auch durch eine vorläufige Rechnung gezeigt, daß die Hypothese im Einklang mit den beobachteten Größenverhältnissen ist.

Alle bisher genannten Abweichungen vom normalen Verhalten ergaben sich aus der Beobachtung von Sättigungskurven. In jüngster Zeit hat nun Plimpton²⁾ auch an direkten Wiedervereinigungsversuchen gezeigt, daß sich selbst bei der Ionisation durch Röntgenstrahlen, in den ersten Augenblicken (bis zu etwa $\frac{1}{10}$ Sek.) nach Erzeugung der Ionisation, Abweichungen vom normalen Verhalten nachweisen lassen, die wohl nur auf die Inhomogenität der Ionisation zurückgeführt werden können.

Es war zu erwarten, daß die gesamten angeführten Beobachtungen in einheitlicher Weise durch eine Theorie der Ionisation in Kolonnen dargestellt werden könnten. Der Versuch einer solchen Theorie ist im folgenden gegeben; dabei war es unumgänglich, außer der Wiedervereinigung auch die Diffusion zu berücksichtigen. Da sich dadurch die Rechnung wesentlich kompliziert, und da andererseits die darzustellenden Abweichungen vom normalen Verhalten von ganz anderer Größenordnung sind als etwa die aus der Inhomogenität des elektrischen Feldes resultierenden, schien es dem Verfasser gerechtfertigt, sich mit einer näherungsweise Behandlung des Problems zufrieden zu geben.

1) H. Greinacher, *Physik. Zeitschr.* 10. p. 986. 1909.

2) S. J. Plimpton, *Phil. Mag.* 25. p. 65. 1913.

I. Theorie der Ionisation in Kolonnen bei Abwesenheit eines elektrischen Feldes.

Den folgenden Entwicklungen liegt die Annahme zugrunde, daß die Bahn eines jeden ionisierenden Teilchens geradlinig ist, und daß nach dem Durchgange eines jeden Teilchens die von ihm erzeugten Ionen beiderlei Zeichens in seiner Bahn angehäuft sind. Der Vorgang in einer einzelnen, so erzeugten Kolonne soll untersucht werden. Die Zeit, welche das ionisierende Teilchen zu seinem Durchgange braucht, darf als verschwindend klein angesehen werden, und die Zeitvariable t soll von diesem Durchgange an gezählt werden. Über die Anordnung der Ionen zur Zeit t_0 kann zunächst keine bestimmte Annahme gemacht werden; es ist anzunehmen, daß bei hinlänglicher Kleinheit des Kolonnendurchmessers die anfängliche Verteilung in ihr keine entscheidende Rolle spielen wird. Geht man aber von der Auffassung aus, daß im Moment der Ionisation das positive und negative Ion mit einer gewissen Heftigkeit auseinandergerissen werden, so wird man eine Anfangsverteilung bevorzugen, welche die Ionen nach einem Wahrscheinlichkeitsgesetze um die Achse der Kolonne, d. h. die Bahn des ionisierenden Teilchens, angeordnet sein läßt.

Ist kein äußeres Feld vorhanden, wie es zunächst vorausgesetzt werden soll, so bestehen die Änderungen in der sich selbst überlassenen Kolonne in zwei Vorgängen: sie verbreitert sich durch Diffusion, und gleichzeitig nimmt die Zahl der Ionen durch Wiedervereinigung ab, bis alle Ionen molisiert sind. Für beide Vorgänge sollen die üblichen Gesetze mit den sonst gültigen Werten des Diffusionskoeffizienten D und des Wiedervereinigungskoeffizienten α maßgebend sein. Nimmt man noch an, daß beide Ionenarten gleiche Geschwindigkeit haben, und wählt man die Achse der Kolonne zur Achse eines Zylinderkoordinatensystems, so wird sich der Vorgang in der Kolonne nach der folgenden Differentialgleichung abspielen:

$$(1) \quad \frac{\partial n}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} \right) - \alpha n^2.$$

Dabei bedeutet n die Dichte beider Ionenarten, und als einzige Bedingung tritt hinzu, daß sich die Lösung für $t = 0$ auf die noch zu bestimmende Anfangsverteilung reduziert.

Die strenge Behandlung der Gleichung (1) läßt sich bis zu einem gewissen Grade durchführen, liefert aber keine übersichtlichen Resultate. Um solche zu erzielen, soll ein Näherungsverfahren gewählt, und zunächst ein Integral der Gleichung (1) unter Vernachlässigung des Wiedervereinigungsgliedes gesucht werden. Unter dieser Annahme reduziert sich die Gleichung (1) auf die Gleichung der radialen Wärmeleitung in einem Zylinder

$$(1) \quad \frac{\partial n'}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 n'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n'}{\partial r} \right).$$

Für diese Gleichung läßt sich ein partikuläres Integral angeben, das für die vorliegenden Zwecke brauchbar ist. Man überzeugt sich leicht, daß

$$(2) \quad n' = \frac{N}{\pi(4Dt + b^2)} e^{-\frac{r^2}{4Dt + b^2}}$$

der Gleichung (1) genügt. Die Gleichung (2) stellt eine Verteilung der Ionen um die Kolonnenachse nach Art des Gauss'schen Fehlergesetzes dar; dabei wächst der Parameter der Verteilung mit der Zeit. Die Zahl der in der Kolonne vorhandenen Ionen eines jeden Zeichens ist zu jeder Zeit N . Es soll nun nur ein Stück der Kolonne von der Länge 1 der Betrachtung unterworfen werden, so daß mit N in der ganzen Arbeit die „lineare Ionisationsdichte“, d. h. die Zahl der Ionen in einer Kolonne *pro Zentimeter* verstanden wird. Der mittlere Abstand aller Ionen von der Achse ist zu einer gegebenen Zeit

$$(3) \quad \bar{r} = \sqrt{\frac{\pi(4Dt + b^2)}{4}},$$

vergrößert sich also — wenn b^2 sehr klein gedacht wird — annähernd proportional der Wurzel aus der Zeit. Zur Zeit $t = 0$ ist die Verteilung

$$(2) \quad n_0' = \frac{N}{\pi b^2} e^{-\frac{r^2}{b^2}},$$

stellt also eine Verteilung nach dem Fehlergesetz mit dem mittleren Abstand

$$(3') \quad \bar{r}_0 = b \sqrt{\frac{\pi}{4}}$$

dar. Würde b in (2) gleich Null gesetzt, so würde zur Zeit $t = 0$ die Zahl der Ionen ihren Wert N behalten, es würde n überall gleich Null sein außer für $r = 0$, und es würde sich eine unendliche Volumendichte n für $r = 0$ ergeben. Das entspräche dann dem idealen Falle, daß alle Ionen zur Zeit $t = 0$ mathematisch genau in der Achse der Kolonne angeordnet wären. In Wirklichkeit wird man einen endlichen, wenn auch kleinen Wert von b anzunehmen haben.

Man darf wohl sagen, daß eine Anfangsverteilung von der Form (2'), mit kleinem, aber endlichem b , bei Abwesenheit bestimmter Anhaltspunkte über den Vorgang der Dissoziation, als die wahrscheinlichste anzusehen ist. Sie soll darum im folgenden als wahrer Anfangszustand der Kolonnen vorausgesetzt werden. Die Gleichung (2) lehrt dann, wie sich eine solche Kolonne unter dem Einflusse der Diffusion allein verändert.

Kommt nun noch die Wiedervereinigung hinzu, so hat das zur Folge, daß einerseits die Form der Verteilungskurven sich anders mit der Zeit ändert, als es (2) entspricht, und daß andererseits die Gesamtzahl N mit der Zeit abnimmt. Da nun aber die durch (2) dargestellte, mit der Zeit zunehmende Verbreiterung der Kolonnen unabhängig ist vom Betrage von N , scheint es berechtigt, die vereinfachende Annahme zu machen, daß die Form der Verteilungskurven durch die Wiedervereinigung nicht beeinflusst wird, sondern nur die Gesamtzahl N der vorhandenen Ionen. D. h., es soll (2) als Lösung auch von (1) angesehen werden, wenn N in geeigneter Weise als Zeitfunktion bestimmt wird. Über die Zulässigkeit dieser Annahme wird an der Hand der erhaltenen Lösung das Nötige zu sagen sein.

Wir machen also die Annahme, daß (2) eine Lösung von 1) ist, wenn N in (3) als variabel mit der Zeit — und *nur* variabel mit der Zeit — angesehen wird. Um diese Zeitfunktion geeignet zu bestimmen, setzen wir (2) in (1) ein, und gelangen so zu der Gleichung:

$$(4) \quad \frac{dN}{dt} e^{-\frac{r^2}{4Dt+b^2}} = - \frac{\alpha N^2}{\pi^2(4Dt+b^2)^2} e^{-\frac{2r^2}{4Dt+b^2}}.$$

Integriert man diese Gleichung über den ganzen Zylinder von der Höhe 1, von $r = 0$ bis $r = \infty$, so erhält man daraus eine totale Differentialgleichung für N :

$$(5) \quad \frac{dN}{dt} = - \frac{\alpha N^2}{2\pi(4Dt + b^2)}.$$

Diese Gleichung liefert integriert

$$(6) \quad N = \frac{N_0}{1 + \frac{\alpha N_0}{8\pi D} \lg\left(\frac{4Dt + b^2}{b^2}\right)},$$

und demnach ergibt sich als angenäherte Lösung der Gleichung (1) unter den gemachten Annahmen:

$$(7) \quad n = \frac{N_0}{1 + \frac{\alpha N_0}{8\pi D} \lg\left(\frac{4Dt + b^2}{b^2}\right)} \frac{e^{-\frac{r^2}{4Dt + b^2}}}{\pi(4Dt + b^2)}.$$

Die Form der durch (7) dargestellten Verteilungskurven ist die gleiche, wie die am Anschluß an (2) diskutierte; auch der mittlere Abstand der Ionen wird nach wie vor durch (3) gegeben. Für $t = 0$ reduziert sich (7) auf

$$(8) \quad n = \frac{N_0}{\pi b^2} e^{-\frac{r^2}{b^2}}.$$

Während aber bei (2) die Gesamtzahl der vorhandenen Ionen konstant blieb, nimmt sie jetzt nach der Formel (6) ab. Diese Formel ist ähnlich gebaut wie die Formel, welche die Abnahme einer homogenen Volumionisation darstellt; während aber bei dieser der Nenner proportional der Zeit wächst, nimmt der Nenner von (6) nur proportional dem Logarithmus der Zeit zu. Es zeigt sich hierin der Einfluß der Verbreiterung der Kolonnen. Indem diese sich mit zunehmender Zeit mehr und mehr verbreitern und abflachen, wird der Einfluß der Wiedervereinigung immer schwächer.

In hinreichend langer Zeit führt natürlich auch dieser Vorgang zu einer Molisierung sämtlicher Ionen (da die Geschwindigkeit der beiden Ionenarten gleich vorausgesetzt wurde); für $t = \infty$ ist $n = 0$ für alle Werte von r . Aber bevor dieser Zustand erreicht ist, wird — wenn mehrere Kolonnen gleichzeitig vorhanden sind — eine jede Kolonne mit ihren Nachbar-

kolonnen in Berührung treten. Dann erfolgt die weitere Abnahme von N nicht mehr gemäß der Gleichung (6), sondern so, als ob eine annähernd homogene, von allen Kolonnen herführende Volumionisation vorhanden wäre. Wann dieser Zustand eintritt, hängt natürlich von der Zahl der gleichzeitig vorhandenen Kolonnen ab, und die Zahl der dann noch aus jeder Kolonne übrig gebliebenen Ionen ist bedingt durch die in (7) auftretenden Konstanten, vorwiegend durch N_0 .

Die Diffusion bewirkt also — wie selbstverständlich — einen Ausgleich der ursprünglich vorhandenen Inhomogenitäten in der Anordnung der Ionen; der Ausgleich darf als beendet angesehen werden, wenn eine Kolonne mit ihren Nachbar Kolonnen in Kontakt getreten ist. Insofern dann noch im Mittel ein bestimmter Bruchteil der ursprünglich in einer Kolonne vorhandenen Ionen vorhanden ist, kann man sagen, daß dieser Bruchteil durch Diffusion der Wiedervereinigung in der Kolonne „entronnen“ ist. Diese entronnenen Ionen unterliegen nur noch der allgemeinen Wiedervereinigung, d. h. es ist für jedes dieser Ionen ebenso wahrscheinlich, daß es sich mit einem Ion des anderen Zeichens verbindet, das aus einer anderen Kolonne herrührt, als mit einem, das aus der gleichen Kolonne stammt. Für die entronnenen Ionen gilt das Gesetz der Wiedervereinigung in seiner normalen Form.

Moulin¹⁾ hat gezeigt, wie man aus Versuchen mit Gasen angenähert die Zahl der entronnenen Ionen bestimmen kann, und der Verfasser hat die gleiche Bestimmung für Flüssigkeiten ausgeführt (J., p. 132). Bei Flüssigkeiten ist dabei diese Bestimmung mit erheblicher Genauigkeit ausführbar, obgleich im Falle der Ionisation durch α -Strahlen nur etwa $\frac{1}{1000}$ der ursprünglich gebildeten Ionen der Kolonne entronnen.

Um die Ergebnisse des Experiments mit der Theorie vergleichen zu können, ist es nun zunächst erforderlich, genau festzusetzen, was unter einem entronnenen Ion verstanden sein soll. Man denke sich zu diesem Zwecke eine jede Kolonne mit einem konaxialen Zylinder C vom Radius R umgeben — dabei wird R eine Größe sein, die mit dem mittleren Abstand zweier Kolonnen vergleichbar ist; jedes Ion nun, welches durch

1) M. M. Moulin, Thèses p. 77; vgl. auch Fig. 25 p. 93.

C hinausgelangt, soll als entronnen bezeichnet werden, und die Gesamtheit der aus einer Kolonne entronnenen Ionen heiße der „Diffusionsverlust“ dieser Kolonne.

Nach dieser Definition beträgt also der Diffusionsverlust N_1 einer Kolonne

$$(9) \quad N_1 = - \int_0^\infty 2 R \pi D \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)_R dt = 4 D R^2 \int_0^\infty \frac{N(t)}{(4 D t + b^2)^2} e^{-\frac{R^2}{4 D t + b^2}} dt.$$

Fhrt man hier die folgende Variable ein

$$(10) \quad \xi = \frac{R^2}{4 D t + b^2}; \quad \xi_0 = \frac{R^2}{b^2}; \quad d\xi = - \frac{4 D R^2}{(4 D t + b^2)^2} dt,$$

so wird der Prozentsatz der entronnenen Ionen

$$(11) \quad \frac{N_1}{N_0} = - \int_{\xi_0}^0 \frac{e^{-\xi} d\xi}{1 + \frac{\alpha N_0}{8 \pi D} \lg \frac{\xi_0}{\xi}}.$$

Es wird sich zeigen, daß für ξ_0 ein großer Wert zu wählen ist, um die Versuche richtig wiederzugeben; in diesem Falle würde die im folgenden gegebene Entwicklung des Integrals (11) gänzlich unbrauchbar werden, falls man die Integration bei ξ_0 beginnen ließe. Nun sieht man aber ohne weiteres, daß wegen des Faktors $e^{-\xi}$ große Werte von ξ nichts zu dem Integral beitragen; man kann darum die Integration bei einem kleineren Werte ξ_1 beginnen lassen, und eine einfache Betrachtung lehrt, daß der Fehler im Resultat unter 0,5 Proz. bleibt, wenn man $\xi_1 = 6$ setzt.

Entwickelt man $e^{-\xi}$ nach Potenzen, so folgt durch einfache Umrechnung

$$(12) \quad \frac{N_1}{N_0} = - \int_{\xi_1}^0 \frac{e^{-\xi} d\xi}{1 + \frac{\alpha N_0}{8 \pi D} \lg \frac{\xi_0}{\xi}} = \sum_1^\infty (-1)^{\nu} \frac{e^{\nu \alpha}}{(\nu - 1)!} \text{li } e^{-\nu c}.$$

Dabei ist gesetzt

$$(12') \quad \begin{cases} a = \frac{8 D \pi}{\alpha N_0} + \lg \xi_0, \\ c = \frac{8 D \pi}{\alpha N_0} + \log \xi_0 - \lg \xi_1, \end{cases}$$

und es bedeutet

$$(12'') \quad \operatorname{li} e^x = \int_{\infty}^{-x} \frac{e^{-u}}{u} du$$

den Integrallogarithmus. Die numerischen Werte desselben findet man aus Tabellen oder den bekannten Reihen.¹⁾ Namentlich für große Werte von $8D\pi/\alpha N_0$ gestaltet sich die Rechnung dann verhältnismäßig einfach. Immerhin erfordert (12) bei $\xi_1 = 6$ die Berücksichtigung von etwa 20 Gliedern, so daß für die meisten Zwecke eine geometrische Integration von (11) vorzuziehen sein dürfte.

Bevor die Formel (11) mit der Erfahrung verglichen werden kann, ist es notwendig, einige Worte darüber zu sagen, welcher Grad von Annäherung durch die gewählte Behandlung der Gleichung (1) erreicht worden ist. Durch Differentiation der Lösung (7) findet man, daß sie der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$(1'') \quad \frac{\partial n}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} \right) - \alpha \frac{e^{\frac{r^2}{4Dt} + b^2}}{2} - n^2.$$

Die vorgeschlagene Lösung löst also ein dem gestellten verwandtes Problem; man kann nämlich (1'') folgendermaßen interpretieren: der Diffusionsvorgang erfolgt nach dem normalen Gesetz und auch die Wiedervereinigung ist proportional n^2 ; aber der Wiedervereinigungskoeffizient ist nicht konstant. Zu jeder Zeit ist er innerhalb eines gewissen Kreises kleiner, außerhalb desselben größer als α . Der Radius dieses Kreises bestimmt sich durch die Gleichung $e^{r^2/4Dt + b^2} = 2$; im Innern ist der Wiedervereinigungskoeffizient mindestens $\alpha/2$; für sehr große r kann er sehr groß werden, aber das hat keinerlei Bedeutung, weil αn^2 stärker Null wird. In der Tat stimmt der variable Wiedervereinigungskoeffizient von (1'') im Mittel mit α überein; es folgt ja aus der Art, wie die Lösung gewonnen wurde, daß der Gesamtwiedervereinigungsverlust in der ganzen Kolonne durch (1'') richtig wiedergegeben wird. Das ist leicht zu verifizieren, indem man die Lösung (7) in

1) Man vgl. z. B. E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln p. 19. 1909. B. G. Teubner. Leipzig.

das letzte Glied von (1) bzw. (1') einsetzt und über die ganze Kolonne integriert.

Es läßt sich nun eine numerische Grenze für den Fehler bei der Berechnung des Diffusionsverlustes gewinnen, indem man diese Berechnung einmal auf Grund der Gleichung (1), sodann auf Grund der Gleichung (1') durchführt.

Integriert man (1) über den Zylinder von der Höhe 1 von 0 bis R , integriert man dann nach der Zeit von 0 bis ∞ , so findet man unter Anwendung des Gauss'schen Satzes für den Diffusionsverlust:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= - \int_0^\infty D 2 R \pi \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)_R dt = \int_0^R [n]_0^\infty 2 r \pi dr \\ &\quad - \int_0^\infty dt \int_0^R \alpha n^2 2 r \pi dr \end{aligned} \right.$$

und analog aus (1')

$$(13') \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{N}_2 &= - \int_0^\infty D 2 R \pi \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)_R dt = \int_0^R [n]_0^\infty 2 r \pi dr \\ &\quad - \int_0^\infty dt \int_0^R \alpha n^2 \frac{e^{4Dt+b}}{2} 2 r \pi dr. \end{aligned} \right.$$

Setzt man in diese beiden Gleichungen die Lösung (7) ein, integriert erst nach r , dann partiell nach t und führt endlich die Variable (10) ein, so ergibt sich aus (13)

$$(14) \quad \mathfrak{N}_1 = N_0 \left(e^{-\frac{2R^2}{b^2}} - e^{-\frac{R^2}{b^2}} \right) - \int_{\xi_0}^0 \frac{N_0 e^{-\xi} d\xi}{1 + \frac{\alpha N_0}{8\pi D} \lg \frac{\xi_0}{\xi}}$$

und aus (13')

$$(14') \quad \mathfrak{N}_2 = - \int_{\xi_0}^0 \frac{N_0 e^{-\xi} d\xi}{1 + \frac{\alpha N_0}{8\pi D} \lg \frac{\xi_0}{\xi}}.$$

Der Ausdruck für \mathfrak{N}_2 stimmt überein mit dem direkt aus (7) gewonnenen Ausdruck (11); der aus der Differentialgleichung (1)

abgeleitete Wert (14) ist von (11) etwas verschieden. Wäre nun (7) ein streng richtiges Integral von (1), so müßte der direkt gewonnene Wert (11) mit dem aus (1) abgeleiteten Wert (14) identisch sein. Der Unterschied zwischen (14) und (11) ist also ein Maß für die Größe, welche der Fehler erreichen kann.

Die numerische Berechnung lehrt nun, daß sich für den in Betracht kommenden Bereich (ξ_0 zwischen 500 und 1000) die Ausdrücke (14) und (14') nicht wesentlich unterscheiden. Bei Gasen (wo $\alpha N_0/8\pi D$ klein ist) beträgt die Abweichung nur 1—2 Proz.; für Flüssigkeiten ($\alpha N_0/8\pi D > 100$) ist die Abweichung größer, etwa 6—8 Proz., aber es ist zu berücksichtigen, daß in diesem Falle der Diffusionsverlust nur etwa $1/1000$ des Wiedervereinigungsverlustes beträgt.

Je größer ξ_0 ist, d. h. je größer der Durchmesser der Zylinder C im Vergleich zum ursprünglichen Durchmesser der Kolonnen ist, desto geringer wird der Unterschied von (14) und (14'). Für die tatsächlich in Betracht kommenden Größenverhältnisse dürfte der Fehler die genannten Grenzen keinesfalls überschreiten.

Aus der Formel (11), die nunmehr mit der Erfahrung verglichen werden soll, ergibt sich, daß der Diffusionsverlust nur von einer Konstanten $\xi_0 = R^2/b^2$ abhängig ist; der absolute Betrag des Kolonnenparameters b kommt nicht in Betracht, sondern nur sein Verhältnis zu der Entfernung R , bis zu welcher ein Ion gelangen muß, um der Kolonne zu entinnen. Vergleicht man nun Kolonnen in verschiedenen Medien, so ist aus dem Vorhergehenden zu folgern, daß vergleichbare Verhältnisse bestehen, nicht wenn die Kolonnen einen gewissen gleichen Durchmesser erreicht haben, sondern wenn der Durchmesser das gleiche Vielfache des ursprünglichen geworden ist. Man darf also erwarten, daß die Formel (11) den Diffusionsverlust in verschiedenen Medien richtig wiedergibt, wenn man die einfachste Annahme $\xi_0 = \text{constans}$ einführt und ξ_0 aus den Versuchen bestimmt. Diese Annahme kann nicht streng genommen richtig sein, denn R und damit auch ξ_0 hängen bis zu einem gewissen Grade von der Zahl der Kolonnen pro cm^3 ab; andererseits ist aber für hinreichend große ξ_0 die Formel (11) sehr wenig empfindlich gegen Änderungen von ξ_0 , d. h. wenn die Kolonne erst eine gewisse Breite erreicht hat, ändert

sich die Zahl der in ihr vorhandenen Ionen sehr langsam, und darum ermöglicht die Annahme $\xi_0 = \text{constans}$ einen Vergleich des relativen Einflusses von Diffusion und Rekombination in verschiedenen Medien.

In der folgenden Tab. I sind die aus der Arbeit von Moulin entnommenen Zahlen für Luft, Kohlensäure und Wasserstoff mit den Beobachtungen des Verfassers an einigen Flüssigkeiten vereinigt und mit der Formel (11) verglichen. Dabei ist der Wert $\xi_0 = 550$ zugrunde gelegt und die Berechnung für die Gase nach Formel (12) für die Flüssigkeiten (s. u.) auf geometrischem Wege durchgeführt. Über die Herkunft der in Betracht kommenden Konstanten α , D , N_0 ist in der zitierten Arbeit (J, p. 132) das Nötige gesagt; von der Anwendung der Formel (11) auf β -Strahlen wurde abgesehen, weil die notwendigen Konstanten nicht hinreichend genau bekannt sind, man vergleiche auch hierzu die genannte Arbeit. Über die Wahl von N_0 für die drei Gase finden sich weiter unten nähere Angaben.

Tabelle I.

Diffusionsverlust in verschiedenen Medien.

Substanz	N_1/N_0	
	beobachtet	berechnet
H ₂	ca. 1,0	0,97
Luft	ca. 0,65	0,62
CO ₂	ca. 0,43	0,39
CS ₂	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$
Hexan	$1,10 \cdot 10^{-3}$	$1,11 \cdot 10^{-3}$
CCl ₄	$1,04 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-3}$

$$\frac{R^2}{b^2} = 550$$

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist so gut, wie sie nach der vorhergehenden Diskussion zu erwarten ist, und es ist bemerkenswert, daß die Formel (11) die tatsächlichen Verhältnisse richtig wiedergibt, obgleich in Wasserstoff nahezu die Gesamtheit, in den Flüssigkeiten nur etwa der tausendste Teil aller Ionen durch Diffusion der Wiedervereinigung entrinnt.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß für Flüssigkeiten $\alpha N_0/8\pi D$ größer als hundert ist, und darum in dem Intervall, welches zu dem Integral (11) beiträgt, 1 neben $\alpha N_0/8\pi D$ vernachlässigt werden kann. Für diesen Fall wird also

$$(15) \quad \frac{N_1}{N_0} = \frac{8\pi D}{\alpha N_0} \int_0^{\xi_0} \frac{e^{-\xi} d\xi}{\lg \frac{\xi_0}{\xi}} = \frac{8\pi D}{\alpha N_0} \cdot C,$$

wo C eine Konstante bedeutet, die bei $\xi_0 = 550$ den Wert $C = 0,150$ hat.

Um die Natur der Lösung (7) und den relativen Einfluß der in Betracht kommenden Konstanten zu illustrieren, sind in Fig. 1 einige Kurven auf Grund der gewonnenen Lösung (7)

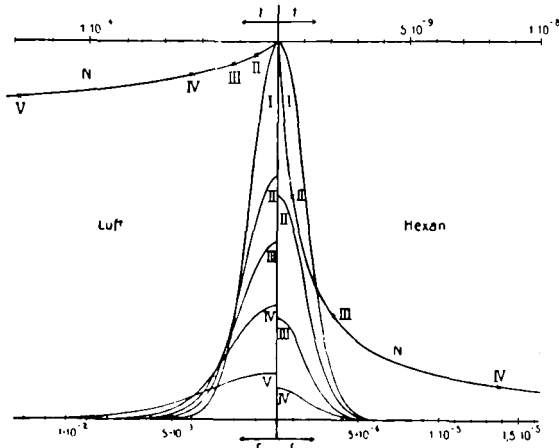


Fig. 1.

berechnet. Die linke Hälfte des Diagrammes bezieht sich auf Luft, die rechte auf Hexan, und es sind für b die später gewonnenen Werte eingesetzt. Die Kurven N geben den Abfall der Ionenzahl mit der Zeit nach Formel (6), und zu den mit römischen Ziffern bezeichneten Punkten auf den Kurven N gehören die ebenso bezeichneten Verteilungskurven (berechnet nach (7)). Die Anfangsdichte n_0 in der Achse beträgt bei Luft $4,87 \cdot 10^9$ Ionen/cm³, bei Hexan $2,51 \cdot 10^{16}$ Ionen/cm³, so daß in dem flüssigen Medium nahe der Achse etwa jedes zwei-

tausendste Molekül ionisiert ist. Man erkennt aus den Kurven deutlich, wie in Luft der Einfluß der Diffusion, umgekehrt in Hexan der Einfluß der Wiedervereinigung überwiegt: die Verteilungskurven für Luft zeigen eine merkliche Verbreiterung, ohne daß N nennenswert abgenommen hätte, bei Hexan hat N erheblich abgenommen, bevor eine merkliche Verbreiterung stattgefunden hat.

So befriedigend nun auch die Übereinstimmung von Rechnung und Experiment nach Tab. I ist, so kann man sie doch nicht als endgültig beweisend für die zugrunde gelegte Hypothese ansehen. Die „Zahl der durch Diffusion entronnenen Ionen“ ist gewissermaßen nur eine Fiktion, denn bei gleicher Geschwindigkeit beider Ionenarten und Abwesenheit eines elektrischen Feldes entrinnen schließlich und endlich gar keine Ionen der Wiedervereinigung; damit hängt die Unsicherheit über die Annahme $\xi_0 = \text{const.}$ zusammen. Dementsprechend kann auch die Zahl N_1 experimentell gar nicht direkt beobachtet werden: sie muß aus Versuchen mit variabler Feldstärke extrapoliert werden.

Es ergibt sich daraus die Notwendigkeit, das Verhalten der Kolonnen im elektrischen Felde zu untersuchen.

II. Theorie der Kolonnen im elektrischen Felde.

a) Das Feld ist parallel den Kolonnen.

Am einfachsten erledigt sich der Fall, daß die Kolonnen dem elektrischen Felde X parallel sind. Dabei wird hier, wie im folgenden überall vorausgesetzt, daß die Homogenität des Feldes durch die Anwesenheit der Ionen nicht gestört wird.

Da der Diffusionskoeffizient für beide Ionenarten gleich vorausgesetzt wurde, muß auch die Beweglichkeit u für die Ionen beiderlei Zeichens gleich angenommen werden. (Von dieser Voraussetzung läßt sich übrigens die Rechnung frei machen.) Bedeutet nun d die Länge der Kolonne, so ist die Zeit T , die zur vollständigen Trennung der beiden Ionenarten erforderlich ist, gegeben durch

$$(16) \quad T = \frac{d}{2uX} .$$

In dem Teile der Kolonne, in welchem positive und negative Ionen noch in Kontakt sind, ändert sich die Ionenzahl pro Längeneinheit nach Formel (6), denn die Bewegung der Ionen im Felde hat keinen Einfluß auf die Wiedervereinigung.¹⁾ Im Zeitelement dt werden also $2u \cdot X N(t) dt$ Ionen eines jeden Zeichens der Kolonne entzogen, und insgesamt werden durch das Feld n_2 Ionen frei gemacht, wobei

$$(17) \quad n_2 = 2u X N_0 \int_0^T \frac{dt}{1 + \frac{\alpha N_0}{8\pi D} \lg \left(\frac{4Dt + b^2}{b^2} \right)}$$

ist.

Insgesamt waren ursprünglich $N_0 \cdot d$ Ionen in der Kolonne vorhanden, also erhält man für das Verhältnis $n_2/N_0 d$ durch einfache Umrechnung

$$(18) \quad Y_1(X) = \frac{n_2}{N_0 d} = \frac{u}{2D} X \frac{b^2}{d} y_1 e^{-y_1} (\text{li } e^{y_1} - \text{li } e^{y_1}),$$

dabei hat die Funktion $\text{li } e^x$ dieselbe Bedeutung wie oben p. 312, Formel (12'') und es ist gesetzt

$$(18') \quad \begin{cases} y_1 = \frac{8\pi D}{\alpha N_0} X, \\ y_2 = \frac{8\pi D}{\alpha N_0} X + \lg \frac{4DT + b^2}{b^2}. \end{cases}$$

Das Verhältnis

$$Y_1(X) = \frac{n_2}{N_0 d}$$

als Funktion von X aufgefaßt, stellt nun die gesuchte Sättigungskurve dar für den Fall, daß die Kolonnen dem Felde parallel sind.

Denkt man sich die Kolonnen zwischen parallelen Elektroden, und ist deren Abstand kleiner als der Bereich der verwendeten Strahlenart, so ist unter d natürlich der Plattenabstand zu verstehen, und es ergibt sich, daß die Charakteristik (18) vom Plattenabstand abhängig ist, solange dieser kleiner ist als der Bereich.

¹⁾ Vgl. P. Langevin, Ann. de chim. et de phys. VII. 28. p. 289. 1903.

b) Das Feld steht senkrecht zu den Kolonnen.

Für den Fall, daß die Kolonnen senkrecht zum Felde stehen, ist eine neue Betrachtung notwendig. Läßt man die z-Achse des Koordinatensystems mit der Kolonnenachse zusammenfallen, legt das elektrische Feld parallel der x-Achse, bezeichnet man ferner mit n_+ bzw. n_- die Dichte der beiden Ionenarten, so wird das zu lösende Problem durch die zwei folgenden simultanen Differentialgleichungen dargestellt:

$$(19) \quad \frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 n_{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_{\pm}}{\partial y^2} \right) \mp u X \frac{\partial n_{\pm}}{\partial x} - \alpha n_+ n_-;$$

dabei ist schon von der Voraussetzung $\operatorname{div} X = 0$ Gebrauch gemacht.

Zur angenäherten Lösung des Systems (19) verfahren wir genau wie bei der Behandlung der Gleichung (1). Vernachlässigt man zunächst das Glied $\alpha n_+ n_-$, so läßt sich wieder ein partikuläres Integral des dann verbleibenden Systems angeben; es lautet:

$$(20) \quad n'_{\pm} = \frac{N}{\pi (4 D t + b^2)} e^{-\frac{(x \mp u X t)^2 + y^2}{4 D t + b^2}}.$$

Das Integral (20) stellt zwei den früher betrachteten analoge, sich allmählich verbreiternde Kolonnen dar, die sich mit der Relativgeschwindigkeit $2 u X$ voneinander entfernen. Für $t=0$ stellen sie den gleichen Anfangszustand dar, wie früher.

Es soll nun wiederum vorausgesetzt werden, daß (20) das Problem (19) löst, wenn N in geeigneter Weise als Zeitfunktion bestimmt wird. Um diese Bestimmung auszuführen, setzen wir (20) in (19) ein; berücksichtigt man wieder, daß N nur von t abhängen soll, so ergibt sich dann aus der ersten Gleichung (19):

$$(21) \quad \frac{dN}{dt} \frac{e^{-\frac{(x - u X t)^2 + y^2}{4 D t + b^2}}}{\pi (4 D t + b^2)} = - \frac{\alpha N^2}{\pi^2 (4 D t + b^2)^2} e^{-\frac{2 u^2 X^2 t^2}{4 D t + b^2}} e^{-\frac{2(x^2 + y^2)}{4 D t + b^2}}.$$

Integriert man nun hier über den ganzen, unendlich ausgedehnten Zylinder von der Höhe 1, so findet man als Differentialgleichung für N :

$$(22) \quad \frac{dN}{dt} = - \frac{\alpha N^2}{2 \pi (4 D t + b^2)} e^{-\frac{2 u^2 X^2 t^2}{4 D t + b^2}}.$$

Diese unterscheidet sich von der früher behandelten durch den Exponentialfaktor und hat als Lösung:

$$(23) \quad N(t) = \frac{N_0}{1 + \frac{\alpha N_0}{2\pi} \int_0^t \frac{e^{-\frac{2u^2 X^2 t^2}{4Dt + b^2}}}{4Dt + b^2} dt}.$$

Der Wert von (23) für N in (20) eingesetzt, ergibt die gesuchte, angenäherte Lösung von (19).

Die Funktion (23) würde sich durch geometrische Quadraturen unschwer auswerten lassen; das Wesentliche an der Lösung (23) ist aber, daß N nicht mehr mit zunehmender Zeit dem Werte Null, sondern einem definierten Endwert zustrebt. Dieser Endwert ist natürlich Funktion von X und gibt die Zahl von Ionen an, welche der Kolonne durch das Feld X entzogen werden.

Bezeichnen wir ihn mit N_∞ , so ist

$$(24) \quad N_\infty = \frac{N_0}{1 + F(X)},$$

wobei gesetzt ist

$$(25) \quad F(X) = \frac{\alpha N_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{2u^2 X^2 t^2}{4Dt + b^2}}}{4Dt + b^2} dt.$$

Diese Funktion $F(X)$ läßt sich nun am einfachsten durch die beiden sukzessiven Substitutionen

$$(25') \quad \begin{cases} 4Dt + b^2 = y, \\ \frac{2u^2 X^2}{16D^2} \frac{(y - b^2)^2}{y} = s \end{cases}$$

auf die folgende Form bringen:

$$(26) \quad F(X) = \frac{\alpha N_0}{8\pi D} \sqrt{\frac{\pi}{z}} S(z);$$

dabei ist gesetzt

$$(26') \quad z = \frac{b^2 u^2 X^2}{2D^2}$$

und es bedeutet

$$(26'') \quad S(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-s} ds}{\sqrt{s \left(1 + \frac{s}{z}\right)}}$$

die aus der Theorie der Zylinderfunktionen bekannte Transzendenten. Entwicklungen dieser Funktion für kleine und große z findet man bei „Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der theoretischen Physik“, Bd. I p. 184 und p. 191. Auch lassen sich die Tabellen bei Jahnke und Emde p. 135 benutzen, wenn man den Zusammenhang berücksichtigt

$$S(z) \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{-\frac{z}{2}} = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}\left(\frac{ix}{2}\right).$$

Setzt man nun (26) in (24) ein, so ergibt sich

$$(27) \quad Y_2(X) = \frac{N_\infty}{N_0} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha N_0}{8\pi D} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \cdot S(z)},$$

und $Y_2(X)$ stellt nun die Sättigungskurve für den hier betrachteten Fall dar, unter der Voraussetzung, daß Wiedervereinigung nur zwischen Ionen einer und derselben Kolonne stattfindet. Der durch $Y_2(X)$ dargestellte Bruchteil aller ursprünglich vorhandenen Ionen unterliegt nun noch der allgemeinen Wiedervereinigung mit den Ionen, die aus anderen Kolonnen stammen. Man könnte dem noch Rechnung tragen, indem man den Anteil $Y_2(X)$ unter Berücksichtigung der Zahl der Kolonnen als homogene Volumionisation behandelt, aber für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung ist das unnötig, da — wie sich zeigen wird — die Sättigung für allgemeine Wiedervereinigung bei sehr viel niedrigeren Feldwerten erreicht wird, als die Sättigung nach Formel (27).

Es sei noch erwähnt, daß die Formel (27) unabhängig ist von der Länge der Kolonne. Für $X=0$ liefert (27) natürlich $N_\infty = 0$; für $X=\infty$ wird $S(z) = 1$ und $N_\infty = N_0$.¹⁾ Der Grad der durch (27) dargestellten Näherung dürfte noch besser sein als bei dem früher behandelten Fall, weil die Lösung mit zunehmenden Feldwerten sich mehr und mehr der streng richtigen Lösung (20) nähert.

c) Bei beliebiger Richtung des Feldes.

Der allgemeine Fall, daß die Achse der Kolonne mit dem Felde den Winkel φ einschließt, erledigt sich auf Grund der beiden behandelten Spezialfälle.

1) Für $x = 50$ ist $S(x) = 0,995$; für hinreichend große X darf man also (27) durch die Näherungsformel (27') p. 334 ersetzen.

Bezeichnet man wieder mit d die Länge der Kolonne, so wird die zur vollständigen Trennung in der Kolonnenrichtung erforderliche Zeit

$$(28) \quad T = \frac{d}{2 u X \cos \varphi}.$$

Die Achsen der positiven und negativen Kolonne trennen sich mit der Relativgeschwindigkeit $2 u X \cdot \sin \varphi$; folglich wird die Ionenanzahl pro Längeneinheit $N'(t)$ in dem Teil der Kolonne, in dem positive und negative Ionen noch miteinander in Kontakt sind, gegeben durch die Formel (23), wenn man darin X durch $X \sin \varphi$ ersetzt. Die Gesamtzahl n_3 der Ionen, welche das Feld X aus der Kolonne befreit, wird demnach

$$(29) \quad n_3 = 2 u X \cos \varphi \int_0^T N'(t) dt,$$

und die Sättigungskurve wird in diesem Falle

$$(30) \quad Y_3(X) = \frac{n_3}{d N_0} = \frac{2 u X \cos \varphi}{d} \int_0^T \frac{dt}{1 + \frac{\alpha N_0}{2 \pi} \int_0^t \frac{e^{-\frac{2 u^2 X^2 \sin^2 \varphi t^2}{4 D t + b^2}}}{4 D t + b^2} dt}.$$

Die Auswertung dieser Funktion durch geometrische Methoden begegnet keiner prinzipiellen Schwierigkeit; sie dürfte aber in den meisten Fällen entbehrlich sein. Denn für kleine Werte von X schmiegt sich die Kurve 30 der Formel (18) an, wenn man darin X durch $X \cos \varphi$ ersetzt, und für größere Werte von X nähert sich Y_3 von größeren Werten aus der Formel (27), wenn man darin X durch $X \cdot \sin \varphi$ ersetzt.

Es ist nämlich

$$(31) \quad Y_3(X) \cong \frac{2 u X \cos \varphi}{d} \int_0^T \frac{dt}{1 + \frac{\alpha N_0}{8 \pi D} \sqrt{\frac{\pi}{z'}} S(z')},$$

wobei

$$(31') \quad z' = \frac{b^2 u^2 X^2 \sin^2 \varphi}{2 D^2}$$

gesetzt ist; also wegen der Konstanz des Integrandus:

$$(32) \quad Y_3(X) \cong \frac{1}{1 + \frac{\alpha N_0}{8 \pi D} \sqrt{\frac{\pi}{x'}} S(x')} = \frac{N'_\infty}{N_0}.$$

Auch eine obere Grenze für $Y_3(X)$ kann man angeben. Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß $N'(t)$ seinen Endwert N'_∞ bis auf einen zu vernachlässigenden Betrag erreicht hat, wenn

$$\frac{2 u^2 X^2 \sin^2 \varphi t^2}{4 D t + b^2} = 6$$

geworden ist.

Bezeichnet man den Wert von t , der sich aus dieser Gleichung berechnen läßt, mit τ , so ist

$$(33) \quad Y_3(X) \cong \frac{\tau}{T} + \frac{T - \tau}{T} \frac{N'_\infty}{N_0},$$

wie sich leicht ergibt, wenn man in dem Integral (30) für das Intervall Null bis τ den zu großen Wert 1 einsetzt.

Die Berechnung ergibt nun, daß in den meisten Fällen, d. h. für nicht zu kleine Werte von X und φ , die Formeln (32) und (33) sich nicht nennenswert unterscheiden (einige Beispiele sind weiter unten gegeben), so daß man dann setzen darf

$$(32') \quad Y_3(X) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha N_0}{8 \pi D} \sqrt{\frac{\pi}{x'}} S(x')}, \quad z' = \frac{b^2 u^2 X^2 \sin^2 \varphi}{2 D^2}.$$

III. Vergleich mit den Versuchsergebnissen.

a) α -Strahlen in Gasen.

Die im vorhergehenden gewonnenen Formeln sollen nun zunächst mit den von Moulin aufgenommenen Sättigungskurven in Luft und Kohlensäure verglichen werden. Die Konstante b , die ja ein Maß für den ursprünglichen Kolonnendurchmesser ist, muß aus den Versuchen bestimmt werden. Die außerdem in Betracht kommenden Konstanten α , D , u , N_0 sind bekannt; da der Quotient u/D bei konstanter Temperatur für verschiedene Substanzen gleich ist, und die Quotienten $\alpha/D \propto \alpha/u$ nach der Langevinschen Beziehung für Gase bei hohen Drucken und Flüssigkeiten nicht sehr variieren, bedingt N_0

hauptsächlich den Unterschied zwischen den Sättigungskurven verschiedener ionisierter Medien. Nun ist die Zahl der pro cm erzeugten Ionen bei α -Strahlen Funktion des Abstandes der Strahlungsquelle von der Ionisationskammer; diese Funktion, wie auch die Absolutbeträge sind wohl noch nicht ganz mit der wünschenswerten Genauigkeit bekannt. Es kann darum sehr wohl sein, daß späterhin eine Korrektur an den gewählten N_0 -Werten anzubringen ist; das macht nun keineswegs die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment illusorisch; es würden dann nur die Konstanten b anders bestimmt werden müssen, und zwar bewirkt eine Änderung von N_0 eine stärkere Änderung von b .

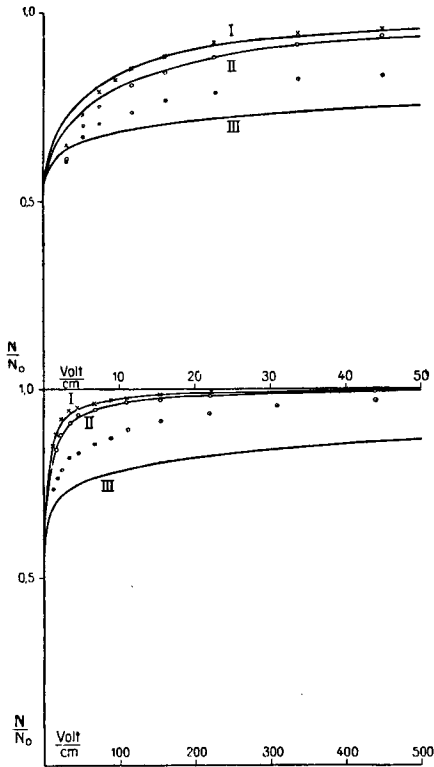
Die Versuche von Moulin sind mit einem Poloniumpräparat ausgeführt; dieses befand sich in 2,3 cm Entfernung von der Mitte der Ionisationskammer, welche 0,4 cm Tiefe hatte. Legt man für die von einem Polonium- α -Teilchen in Luft erzeugte Ionenzahl den von Rutherford¹⁾ akzeptierten Wert $1,63 \cdot 10^6$ zugrunde, und berücksichtigt man dann die von Moulin gegebene Form der Ionisationskurve des Poloniums für einen Kondensator von 4 mm Tiefe²⁾, so gelangt man zu dem Werte $N_0 = 4,9 \cdot 10^4$. Dieser Wert ist im folgenden (wie schon oben p. 315) der Rechnung zugrunde gelegt. Da die geometrische Anordnung bei den Moulinschen Versuchen für verschiedene Gase die gleiche war, ergibt sich der Wert für andere Gase aus dem für Luft und dem Verhältnis der Sättigungsstromstärken. Man findet so $N_0 = 9,13 \cdot 10^4$ für CO_2 und $N_0 = 1,4 \cdot 10^4$ für Wasserstoff.

Die der Rechnung zugrunde gelegten Werte von b^3 sind $3,2 \cdot 10^{-6}$ für Luft und $1,4 \cdot 10^{-6}$ für Kohlensäure. Mit den angegebenen Konstanten sind die Kurven der Fig. 2 für Luft und Fig. 3 für CO_2 berechnet. Die Kurven I entsprechen, wie bei Moulin, dem Fall, daß die α -Strahlen senkrecht zu dem Feld stehen; sie sind nach Formel (27) berechnet. Die Kurven III — für Parallelität zwischen Strahlen und Feld — sind nach (18) berechnet. Endlich die Kurven II, welche dem Falle $\varphi = 45^\circ$ entsprechen, sind gemäß Formel (32') berechnet.

1) E. Rutherford, *Radioactive Substances*. Cambridge 1913. p. 164.

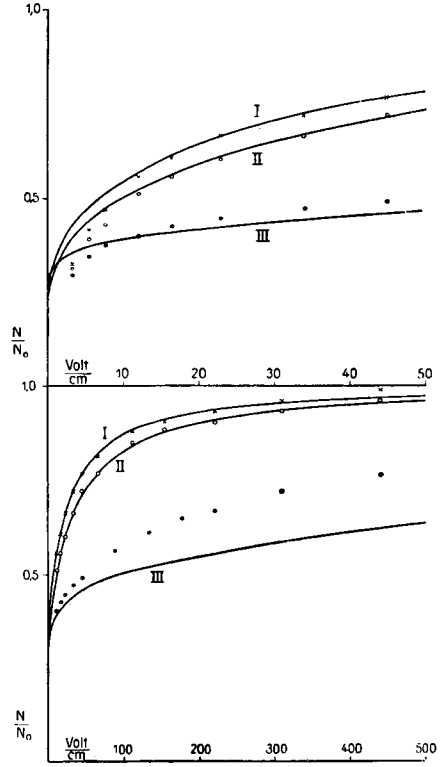
2) M. H. Moulin, *Thèses* p. 22.

Die Beobachtungen von Moulin sind in die theoretischen Kurven eingetragen. Die Kurven I stimmen für Luft, von etwa $X = 10$ Volt/cm an, für CO_2 von etwa $X = 20$ Volt/cm



I Feld senkrecht zu den Strahlen,
 II Feld unter 45° ,
 III Feld parallel zu den Strahlen.
 × Beobachtungen von Moulin,
 ○ " " "
 ⊙ " " "
 Luft von 750 mm Druck mit
 α -Strahlen.

Fig. 2.



I Feld senkrecht zu den Strahlen,
 II Feld unter 45° ,
 III Feld parallel zu den Strahlen.
 × Beobachtungen von Moulin,
 ○ " " "
 ⊙ " " "
 Kohlensäure von 750 mm Druck mit
 α -Strahlen.

Fig. 3.

an, gut mit den beobachteten Werten überein. Es wurde schon erwähnt, daß in den abgeleiteten Formeln die allgemeine

Wiedervereinigung unberücksichtigt geblieben ist, demgemäß muß für niedrige Werte von X , wo noch allgemeine Rekombination stattfindet, die theoretische Kurve größere Werte liefern, als die experimentelle, wie es in der Tat der Fall ist. Will man einen Anhaltspunkt dafür gewinnen, bis zu welchen Feldwerten die allgemeine Rekombination eine Rolle spielt, so kann man als erste Annäherung die Thomsonsche Parabel zugrunde legen. Setzt man die aus den theoretischen Kurven sich ergebenden Werte — unter Berücksichtigung der von Moulin angegebenen absoluten Stromstärken — in die Thomsonsche Formel ein, so gehen in Luft bei $X = 1$ Volt/cm etwa 4 Proz., bei $X = 5$ nur noch 0,2 Proz. durch allgemeine Wiedervereinigung verloren. Bei Kohlensäure sind die analogen Zahlen etwa 1 Proz. bei 5 Volt/cm und 0,3 Proz. bei $X = 10$. Nach dieser Rechnung wäre zu erwarten, daß die theoretischen und experimentellen Werte der Figg. 2 und 3 bei noch niedrigeren Feldwerten zusammenfielen, als es der Fall ist. Diese Abweichung beruht ohne Zweifel auf Diffusion der Ionen nach den Elektroden; diese bewirkt, daß Sättigung erst zu spät eintritt, und ist in der Rechnung nicht berücksichtigt. Aus dem gleichen Grunde zeigen auch die von Moulin mit β -Strahlen zum Vergleich angestellten Messungen eine viel zu schlechte Sättigung.

Die Kurven II sind, wie schon erwähnt, nach der ungenauen Formel (32') berechnet; aber die Berücksichtigung von (32) und (33) lehrt, daß der Fehler für Luft schon bei $X = 20$ weniger als 1 Proz. beträgt, und für Kohlensäure bei $X = 30$ weniger als 2 Proz., so daß von der Berechnung nach (30) abgesehen werden konnte, da ja bei niedrigeren Feldwerten keine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu erwarten ist. Die Übereinstimmung bei den Kurven II beweist übrigens nichts Neues, da schon Moulin gezeigt hat, daß sich die Kurven II aus den Kurven I ableiten lassen durch diejenige Transformation, welche von (27) zu (32') führt.

Die Kurven III zeigen einen ganz anderen Verlauf als die Moulinschen Beobachtungen. Der Grund dafür liegt in der mangelnden Parallelität der Strahlen in den Moulinschen Experimenten. Die Strahlen bildeten im Mittel einen Winkel von etwa 5° mit dem Felde, und in diesem Falle hat die

normale Komponente schon einen merklichen Einfluß. In der Tat hat Moulin gezeigt, daß seine Kurven III sich in befriedigender Weise erklären lassen, wenn man sie — unter Berücksichtigung der Strahlenverteilung — aus den Kurven I ableitet. Die Abweichung seiner Kurven III von den theoretischen beweist also nichts gegen die Richtigkeit der letzteren. Trotzdem bedarf dieser Punkt einer weiteren experimentellen Aufklärung, da Wheelock¹⁾ von Versuchen berichtet, die bei genauer Parallelität zwischen Feld und Kolonnen von den Moulinschen nicht sehr abweichende Kurven lieferten. Versuche in dieser Richtung sind vom Verfasser geplant; sollte sich bei besserer Kanalisierung keine Annäherung an die theoretische Kurve III ergeben, so ist vermutlich N_0 zu hoch bestimmt. Denn gegen Änderungen von N_0 ist Formel (8) empfindlich, während sie von b nur in geringem Grade abhängig ist.

Für Wasserstoff sind, in Übereinstimmung mit Moulins Ergebnissen, keine merklichen Abweichungen vom normalen Verhalten zu erwarten. Wählt man für b^3 den gleichen Wert, wie bei Luft (vermutlich ist ein 16mal so großer Wert richtig! s. w. u.), so würde die Abweichung von vollständiger Sättigung bei $X = 10$ nur etwa 0,4 Proz. betragen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Kurven I, II und III für niedrige Potentiale sehr nahe beieinander verlaufen, und schon für sehr niedrige Potentiale zu einem gemeinsamen, verhältnismäßig hohen Werte ansteigen.²⁾ Das heißt also: ein gewisser Prozentsatz der Ionen wird der Kolonne schon durch sehr schwache Felder, und unabhängig von dessen Richtung entzogen. Das sind die Ionen, die früher als „durch Diffusion entronnen“ bezeichnet wurden, und dieser Begriff gewinnt also hier eine neue, realere Bedeutung. Die Werte, gegen welche die drei Kurven zu konvergieren scheinen, stimmen auch nahezu mit den nach Formel (11) (vgl. Tab. I) berechneten überein.

1) F. E. Wheelock, l. c. p. 246.

2) Für $X < 0,25$ Volt/cm verlaufen sogar die Kurven III über den Kurven I und II.

b) β - und γ -Strahlen in Gasen.

Es kann sich die Frage erheben, ob die entwickelten Formeln auch auf die Ionisation durch β -Strahlen anwendbar sind, da diese keinen geradlinigen Verlauf haben. Immerhin zeigen die Photographien von C. T. R. Wilson, daß der Verlauf der β -Strahlen über hinreichend lange Stücke geradlinig ist, um die Anwendung der Formeln zu gestatten; nur wird der Vergleich mit der Erfahrung dadurch erschwert, daß N_0 für β -Strahlen nur sehr ungenau bekannt ist, und daß sich im voraus nichts darüber aussagen läßt, inwieweit die *anfängliche* Richtung der β -Strahlen für die Charakteristik entscheidend ist. Noch weniger übersichtlich liegen die Verhältnisse bei γ -Strahlen, weil die Ionisation in diesem Falle vermutlich ausschließlich durch die sekundär erzeugten β -Strahlen hervorgerufen wird, und diese einen ganz gewundenen Verlauf haben; die hier entwickelte Theorie kann darum auch in diesem Falle nur als eine erste, grobe Annäherung angesehen werden.

Der Wert von N_0 ist bei β -Strahlen in Luft von Atmosphärendruck von der Größenordnung 100^1) und auch bei den sekundären β -Strahlen dürfte N_0 im Mittel nicht sehr viel größer sein; bei diesen Werten ist kein Einfluß der ursprünglichen Inhomogenität der Ionisierung auf die Sättigungskurve zu erwarten. Dagegen ist dieses wohl der Fall bei einem Druck von mehreren Atmosphären, und neuere Versuche haben in der Tat gezeigt, daß die dann zu beobachtenden Sättigungskurven sich mehr und mehr von dem normalen Verhalten (wie es etwa nach der Thomsonschen Parabel zu erwarten wäre) entfernen.

Aus den oben angeführten Gründen lassen sich φ und N_0 nicht voraussagen; man tut darum am besten, die Kurven nach Formel (32') zu berechnen und N_0 und $b \overline{\sin \varphi}$ als zwei aus den Versuchen zu bestimmende Konstanten anzusehen; dabei bedeutet $\overline{\sin \varphi}$ einen gewissen Mittelwert, der für die betreffenden Versuche maßgebend ist. Man wird erwarten, daß $\overline{\sin \varphi}$ bei β -Strahlen noch gewisse Vorzugswerte zeigen

1) H. Geiger u. F. Kovarik, Phil. Mag. 22. p. 604. 1911; H. Eve, Phil. Mag. 22. p. 551. 1911; S. Bloch, Ann. d. Phys. 38. p. 559. 1912.

wird, sich aber bei γ -Strahlen dem Werte $\overline{\sin \varphi} = \pi/4$ nähert, wie er näherungsweise gelten müßte, wenn alle Strahlenrichtungen gleichmäßig vertreten wären.

In der folgenden Tab. II sind zwei Versuchsreihen von Laby und Kaye¹⁾ mit theoretisch berechneten Kurven verglichen. Labys Versuche beziehen sich auf Luft bei 8 und 15 Atm.; die Strahlung bestand aus harten Strahlen, d. h. also β - und γ -Strahlen, welche zwar nicht kanalisiert waren, aber im wesentlichen parallel dem Felde den Kondensator durchsetzten. Die Konstanten sind folgendermaßen angenommen

$$(34) \quad N_0 = 833 \cdot p; \quad b \overline{\sin \varphi} = 0,527 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{p},$$

wobei p in Atmosphären gerechnet ist. Die angesetzte Abhängigkeit vom Druck ist zu erwarten, da N_0 umgekehrt proportional der mittleren freien Weglänge, und b direkt proportional derselben anzunehmen ist. Ferner muß berücksichtigt werden, daß sich der Quotient $\alpha/D \propto \alpha/u$ wie die Langevinsche Zahl ϵ mit dem Drucke ändert (d. h. also für 8 Atm. $\frac{1}{0,27} = 3,7$ mal so groß ist, wie bei 1 Atm., und sich dann nicht mehr ändert²⁾), und daß u/D unabhängig vom Druck ist.

Tabelle II.

Druck: 8 Atm.			Druck: 15 Atm.		
Feld in Volt/cm	N/N_0		Feld in Volt/cm	N/N_0	
	beob.	ber.		beob.	ber.
100	0,84	0,865	500	0,875	0,870
500	0,92	0,958	1000	0,920	0,931
1000	0,985	0,985	1500	0,957	0,961
1500	1,00	0,996	2000	0,981	0,977
2000	1,00	1,00	2500	0,996	0,988
∞		1,018	3000	0,998	0,994
			3500	1,00	1,00
			∞		1,034
Werte der Konstanten	$\frac{\alpha N_0}{8 \pi D} = 0,045;$ $(b \overline{\sin \varphi})^2 = 4,36 \cdot 10^{-7}$		$\frac{\alpha N_0}{8 \pi D} = 0,0843; (b \overline{\sin \varphi})^2 = 1,24 \cdot 10^{-9}$		

1) T. H. Laby u. G. W. C. Kaye, Phil. Mag. 16. p. 879. 1908.

2) Vgl. J. J. Thomson, Conduction of Elektr. through Gases. 2nd Ed. p. 73.

Die Übereinstimmung ist befriedigend, wenn man bedenkt, daß für die Richtung der Strahlen ein Mittelwert eingesetzt ist. Der Wert $N_0 = 833$ für 1 Atm. erscheint hoch, aber nicht unmöglich, wenn man berücksichtigt, daß C. T. R. Wilsons Zählungen (l. c.) bei sekundären β -Strahlen Werte zwischen den Grenzen 150 und 2160 ergeben haben. Der hier gefundene Wert von b ist bei einer Atmosphäre vergleichbar mit dem für α -Strahlen gefundenen $b = 1,79 \cdot 10^{-3}$; beide Werte wären gleich groß für $\overline{\sin \varphi} = 0,294$. Der Versuch gestattet keine Entscheidung darüber, welcher Wert von $\overline{\sin \varphi}$ einzusetzen ist.

Neuerdings hat Florance¹⁾ Luft bei hohen Drucken, bis zu 70 Atm., mit β -Strahlen von Ur X ionisiert und die Sättigungskurven aufgenommen. Jede einzelne seiner Kurven kann durch Formel (32') wiedergegeben werden bei passender Wahl der Konstanten; aber diese stehen für verschiedene Drucke nicht in der zu erwartenden einfachen Beziehung. Die Floranceschen Kurven sind einander ähnlich, und das kann nach der vorliegenden Theorie, und wohl nach jeder Theorie, die N_0 zur Erklärung heranzieht, unmöglich der Fall sein. Die Kurven müssen mit zunehmendem Druck eine immer schwerer erreichbare Sättigung aufweisen; vielleicht sind die Floranceschen Versuche in dieser Beziehung durch Diffusion nach der einen Elektrode oder durch mangelnde Homogenität des Feldes entstellt, denn die Strahlungsquelle befand sich sehr nahe der einen Elektrode und es war kein Schutzring angebracht worden.

Die Kurve für 70 Atm. ist mit den folgenden Konstanten

$$(35) \quad N_0 = 70 \cdot 212; \quad b \overline{\sin \varphi} = 0,358 \cdot \frac{1}{70} \cdot 10^{-3}$$

berechnet worden, und die Beobachtungen in Fig. 5 in die theoretische Kurve eingetragen. Der Wert von b , der sich aus (35) für Atmosphärendruck ergeben würde, ist wieder von gleicher Größenordnung wie für α -Strahlen; der Wert $N_0 = 212$ für eine Atmosphäre ist wesentlich höher, als die Bestimmung von Geiger und Kovarik²⁾, die für Uranium den Wert $N_0 = 78$ angeben; aber bei den Versuchen von Florance

1) D. C. H. Florance, Phil. Mag. 25. p. 172. 1913.

2) H. Geiger u. F. Kovarik, Phil. Mag. 22. p. 604. 1911. Der Wert von Bloch (l. c.) $N_0 = 54$ ist noch niedriger.

spielen sicherlich Sekundärstrahlen und γ -Strahlen eine erhebliche Rolle. Auch kann man nicht erwarten nach der hier angestellten Berechnung mehr als die Größenordnung festzustellen.

c) Flüssige Dielektrika.

Der Verfasser hat schon vor längerer Zeit gezeigt¹⁾, daß bei Ionisation von flüssigen Dielektriken mit harten, also vorwiegend γ -Strahlen, die Beziehung zwischen Potential e und Strom i durch eine Gleichung von der folgenden Form gegeben wird:

$$(36) \quad i = f(e) + c \cdot e.$$

Dabei stellt $f(e)$ den „sättigbaren“ Anteil der Ionisierung dar, welcher oberhalb etwa 800 Volt/cm konstant bleibt, und c bedeutet eine Konstante, so daß der Verlauf der Stromkurve für große Feldwerte linear ist.

Die Konstante c erwies sich als stark abhängig vom Reinheitsgrad der Flüssigkeit und von der Temperatur, so daß der Verfasser anfangs den Schluß gezogen hat, der Stromanteil $c \cdot e$ rühre ausschließlich von elektrolytischen Verunreinigungen her. Das ist jedoch nicht der Fall; auch die reinsten Flüssigkeitsproben zeigen bei homogenem Felde den linearen Anstieg.²⁾ Diesen hat der Verfasser darum neuerdings (J. p. 134) mit dem Umstand in Zusammenhang gebracht, daß nur ein Bruchteil der ursprünglich erzeugten Ionen in Flüssigkeiten zur Beobachtung gelangt, und hat als Erklärung für beide Erscheinungen die Langevinsche Hypothese der Ionisation in Kolonnen vorgeschlagen. Danach bestände der sättigbare Anteil aus den durch Diffusion entronnenen Ionen und der langsame Anstieg des Sättigungswertes käme dadurch zustande, daß elektrische Felder von zunehmender Stärke den Kolonnen mehr und mehr Ionen entziehen.

Wenn diese Erklärung zutrifft, so müssen die hier entwickelten Formeln die Beobachtungen quantitativ erklären

1) G. Jaffé, Journ. de Phys. (4) 5. p. 262. 1906, Ann. d. Phys. 25. p. 257. 1908.

2) G. Jaffé, Ann. d. Phys. 32. p. 175. 1910.

können. Leider sind die bisherigen Beobachtungen fast ausschließlich mit γ -Strahlen angestellt, und in dem Falle von γ -Strahlen ist die Anwendbarkeit der Formeln aus den oben auseinandergesetzten Gründen am fraglichsten. Es sollen darum zuerst einige neue Beobachtungen an Hexan mit α - und β -Strahlen mitgeteilt werden; es wird sich ergeben, daß der generelle Charakter der Sättigungskurven von der Strahlenart unabhängig ist, und nur die quantitativen Verhältnisse mit der Art der Strahlen variieren — beides Ergebnisse, welche mit der Theorie in Einklang sind.

Die in Tab. III mitgeteilte Stromkurve *A* ist das Mittel von mehreren Beobachtungen, die an Lösungen von Ra-Emanation in Hexan zwischen Elektroden von 2 mm Abstand angestellt wurden. Die Versuche sind im Laboratorium der Frau Curie in Paris ausgeführt. Kurve *B* ist unter analogen Bedingungen mit β -Strahlen des Radiums aufgenommen, und zwar von Hrn. W. Mies im Curieschen Laboratorium. Der Verfasser möchte Hrn. Mies auch an dieser Stelle seinen Dank dafür aussprechen, daß er ihm seine Versuchsergebnisse zur Verfügung gestellt hat.

Tabelle III.

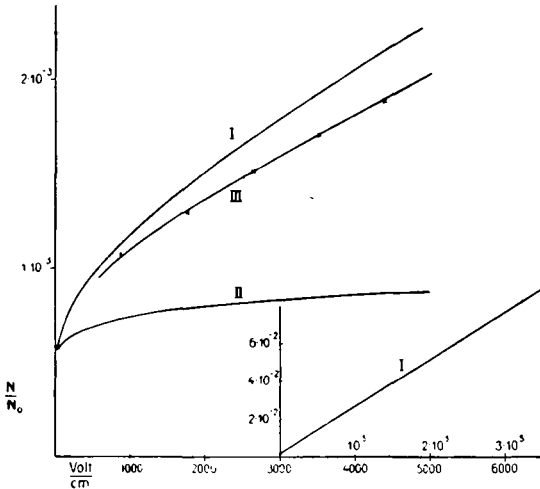
Hexan mit α - und β -Strahlen, die eingeklammerten Werte sind interpoliert.

Feld i Volt/cm	440	880	1000	1320	1760	2640	3520	4400
<i>A</i> α - u. β Strahlen	—	0,977	[1,00]	—	1,12	1,245	1,355	1,458
<i>B</i> β -Strahlen	0,880	0,990	[1,00]	1,05	1,10	1,18	—	1,32
<i>C</i> α -Strahlen	—	0,956	[1,00]	—	1,152	1,35	1,525	1,68

Die Versuche *A* und *B* sind mit sorgfältigst gereinigtem Hexan angestellt; die Form der Kurven erwies sich als in weiten Grenzen unabhängig von der Ionisationsstärke, so daß für die beobachteten Stromwerte ausschließlich die Wiedervereinigung in Kolonnen maßgebend ist. — Da nun bekannt ist (J. Tab. IV), daß bei 1000 Volt/cm nur 38,6 Proz. der von der Emanation erzeugten Ionisation von α -Strahlen herühren, läßt sich unter Verwertung der Kurve *B* aus *A* diejenige Stromkurve ableiten, welche für α -Strahlen allein zur Beob-

achtung gelangen würde. Die so gewonnene Kurve ist unter C in der Tabelle vermerkt.

Der Wert von N_0 in Hexan ist nur für α -Strahlen mit einiger Sicherheit berechenbar (J. p. 132), er beträgt für die α -Strahlen der Emanation $N_0 = 4,32 \cdot 10^7$; mit diesem Werte und $b^2 = 5,48 \cdot 10^{-12}$ sind die Kurven der Fig. 4 berechnet. Kurve I entspricht dem Falle, daß Feld und Kolonnen auf-



Hexan mit α -Strahlen.

- I Feld senkrecht zu den Kolonnen,
- II „ parallel „ „ „
- III Kolonnen gleichmäßig über alle Richtungen verteilt.

Fig. 4.

einander senkrecht stehen, Kurve II dem Falle, daß beide einander parallel sind. Kurve III endlich ist durch geometrische Integration über Kurven von variablem φ gewonnen, und entspricht dem Falle, daß alle Richtungen von Strahlen gleich häufig vertreten sind; diese Kurve ist übrigens wegen des annähernd linearen Verlaufs nur sehr wenig von derjenigen verschieden, welche man erhalten würde, wenn man den Mittelwert $\sin \varphi = \pi/4$ in (32') einsetzt.

In die Kurve III sind die Punkte der aus den Beobachtungen abgeleiteten Kurve C nach Multiplikation mit einem

geeigneten Faktor eingetragen. Die Übereinstimmung ist sehr befriedigend, und auch die absoluten Beträge werden durch die theoretische Kurve richtig wiedergegeben, denn es ist bekannt (J. Tab. V), daß für Potentiale von etwa 1000 Volt/cm $1,10 \cdot 10^{-3}$ mal so viel Ionen zur Beobachtung gelangen, als erzeugt werden.

Der weitere Verlauf der Kurve I ist in Fig. 4 in anderem Maßstabe beigegeben; es zeigt sich, daß die Sättigungskurve in einem sehr weiten Bereiche (von etwa 10^4 — $5 \cdot 10^5$ Volt/cm) geradlinig verläuft. Das läßt sich in der Tat auch aus der Formel (27) ersehen; denn in dem genannten Bereich ist z so groß, daß man $S(z) = 1$ setzen darf; zugleich ist

$$\frac{\alpha N_0}{8\pi D} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

noch hinreichend groß; daß man den Summanden 1 vernachlässigen darf: es ist also dann

$$Y_2(X) = \frac{8\pi D}{\alpha N_0} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{4\sqrt{2\pi} \cdot b u X}{\alpha N_0}$$

Für noch größere X ergibt sich

$$(27') \quad Y_2(X) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha N_0}{4\sqrt{2\pi} \cdot b u X}};$$

es ist also von etwa 10^4 Volt/cm an die Charakteristik unabhängig vom Diffusionskoeffizienten. Aus (27') folgt, daß vollständige Sättigung für α -Strahlen in Flüssigkeiten erst bei Feldern von etwa 10^9 Volt/cm zu erwarten wäre, wenn nicht schon bei viel niedrigeren Feldwerten ganz andere Erscheinungen eintreten würden.

Für β -Strahlen ist der Wert von N_0 nicht bekannt, auch läßt sich über φ keine Angabe machen; wie bei Gasen unter hohem Drucke, müssen darum N_0 und $b \sin \varphi$ als zwei aus den Versuchen zu bestimmende Konstanten angesehen werden.

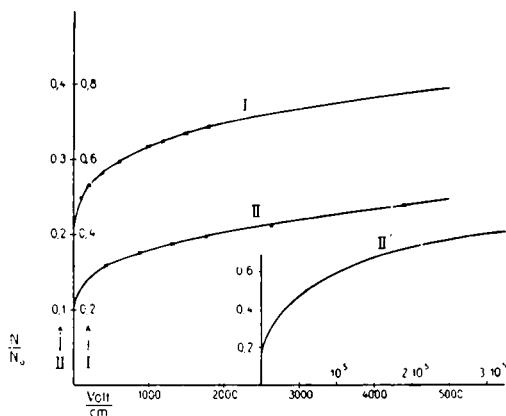
Die Kurven II und II' der Fig. 5 sind mit den folgenden Werten der Konstanten berechnet:

$$(b \sin \varphi)^2 = 1,35 \cdot 10^{-13}; \quad N_0 = 1,46 \cdot 10^6.$$

In die Kurve II sind die Miesschen Beobachtungen eingetragen; die Übereinstimmung ist gut. Auch hier sind die

Konstanten so bestimmt, daß die absoluten Beträge in Übereinstimmung mit der Beobachtung sind; denn nach der Bestimmung des Verfassers (J. Tab. V) beträgt der Bruchteil der „entronnenen“ (d. h. bei 1000 Volt/cm beobachtbaren) Ionen etwa 0,18.

Der Wert $N_0 = 1,46 \cdot 10^5$ entspricht etwa dem Werte $N_0 = 157$ in Luft¹⁾, was in verhältnismäßig guter Übereinstimmung mit dem oben (p. 330) gefundenen Werte ist.



I Luft von 70 Atm. Druck mit β -Strahlen,
II Hexan mit β -Strahlen.

Fig. 5.

Die Theorie der Ionisation in Kolonnen liefert also eine ausreichende Erklärung für den beobachteten Anstieg des Sättigungswertes bei hohen Feldwerten. Der Verlauf der Kurven ist zwar nicht streng linear, wie früher vermutet wurde, aber ihre Krümmung ist immerhin so gering, daß für Änderungen des Potentials um nur einige 1000 Volt/cm die Relation (36) eine brauchbare Annäherung darstellt.

d) Einfluß der Parameter.

Der Einfluß, welchen die *Neigung der Kolonnen gegen das Feld* zur Folge hat, ist bereits diskutiert worden.

1) Die Umrechnung ist auf Grund der Angaben von Kleemann (Proc. Roy. Soc. A. 79. p. 220. 1907) über relative Ionisationen ausgeführt.

Über den Einfluß, welchen der *Druck* eines Gases auf die Form der Ionisierungskurve hat, geben die Formeln Aufschluß, denn die Abhängigkeit der in Betracht kommenden Konstanten vom Druck ist bekannt. Wie schon erwähnt, ist u/D unabhängig vom Druck; a/D ändert sich wie die Langevinsche Zahl s , N_0 ist proportional dem Druck und die Konstante b ist umgekehrt proportional dem Druck zu setzen.

Von dem vorliegenden Material eignet sich leider nur eine Versuchsreihe bei Moulin zur Prüfung der Theorie, weil nur bei dieser einen Reihe die Richtung der Strahlen im Verhältnis zum Felde derart ist, daß eine strenge Berechnung zugänglich ist. In Tab. IV sind die Werte der Moulinschen Tab. IX, die sich auf Luft vom Druck 472 mm bezieht, mit dem Ergebnis der Rechnung verglichen. Die der Rechnung zugrunde gelegten Konstanten sind auf Grund der oben angegebenen Gesetzmäßigkeiten aus den Konstanten für Atmosphärendruck bestimmt — also ohne Zuhilfenahme der darzustellenden Beobachtungen. Für den Fall, daß Strahlen und Feld „parallel“ sind, ist die Berechnung angenähert, indem hier der Wert $\sin \varphi = 0,1$ (wie er im Mittel den Moulinschen Beobachtungen entspricht) in Formel (32) eingesetzt wurde. Die Übereinstimmung ist trotzdem auch hier befriedigend.

Tabelle IV.

Luft von 472 mm Druck.

Feld in Volt/cm	Feld senkrecht z. d. Strahlen		Feld parallel z. d. Strahlen	
	N/N_0		N/N_0	
	beob.	ber.	beob.	ber.
0,31	0,845	0,850	0,810	0,782
5,2	0,930	0,945	0,865	0,865
11,9	0,955	0,966	0,900	0,903
22,9	0,965	0,983	0,920	0,920
111	0,988	0,996	0,977	0,969
221	0,995	0,998	0,990	0,985
660	1,00	1,00	1,00	0,992

Werte der Konstanten $\frac{\alpha N_0}{8\pi D} = 0,0227$; $b^2 = 8,05 \cdot 10^{-6}$ $\sin \varphi = 0,100$

Alle übrigen Beobachtungen, bei Moulin wie bei Wheelock, eignen sich nicht zum Vergleich mit der Theorie; sie sind alle — dem größeren Effekt zu Liebe — mit Strahlen ausgeführt, die dem Felde angenähert parallel sind, so daß die Strahlenverteilung eine entscheidende Rolle spielt; und diese läßt sich nur angenähert in Rechnung setzen.

Ferner sind die Versuche bei abnehmendem Drucke und geringem Plattenabstand ($d = 0,4$ cm) angestellt, so daß fraglos bei den niedrigeren Drucken die Diffusion an die Elektroden die Resultate verfälscht.¹⁾

Trotzdem läßt sich zeigen, daß die Theorie die Abhängigkeit der Beobachtungen vom Druck im wesentlichen richtig wiedergibt. Tab. V gibt einen Vergleich der Rechnung mit den Zahlen der Moulin'schen Tab. V. Die theoretischen Zahlen sind nach Formel (32') berechnet; dabei ist $\sin \varphi = 0,1$ gesetzt, und die Konstanten sind folgendermaßen bestimmt

$$(37) \quad b^2 = 3,2 \cdot 10^{-6} \left(\frac{p_0}{p} \right)^2, \quad \frac{\alpha N_0}{8\pi D} = 0,0600 \frac{p}{p_0} \frac{e}{\epsilon_0},$$

wo sich der Index 0 auf 760 mm bezieht.

N_0 ist wesentlich niedriger angenommen als oben; aber da es sich hier nur darum handelt, die Druckabhängigkeit zu zeigen, schien es berechtigt, N_0 geeignet zu wählen.

Tabelle V.

Druck in mm	X = 23 Volt/cm		X = 111 Volt/cm		X = 221 Volt/cm	
	N/N ₀		N/N ₀		N/N ₀	
	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.
749	0,81	0,78	0,90	0,89	0,945	0,93
702,6	0,83	0,82	0,92	0,91	0,965	0,95
633,9	0,87	0,86	0,94	0,94	0,97	0,96
544,7	0,89	0,91	0,95	0,96	0,99	0,98
472	0,92	0,94	0,98	0,98	0,99	0,99
324	0,96	0,98	0,99	0,99	1,00	1,00
195,6	0,98	0,997	1,00	1,00	1,00	1,00

Werte der Konstanten $b^2 = 3,2 \cdot 10^{-6} \left(\frac{p_0}{p} \right)^2$; $\frac{\alpha N_0}{8\pi D} = 0,0600 \frac{p}{p_0} \frac{e}{\epsilon_0}$

1) P. Langevin, Journ. de Phys. 44. p. 322. 1905.
Annalen der Physik. IV. Folge. 42.

Die Übereinstimmung ist in Anbetracht der charakterisierten Verhältnisse befriedigend, doch zeigen die Abweichungen einen deutlichen Gang: bei den höchsten Druckwerten ist die Sättigung der theoretischen Kurven zu schlecht, bei den niedrigen Feldwerten zu gut. Die Abweichungen liegen so, wie es zu erwarten ist, wenn die Änderung der Strahlungsverteilung (das Präparat wurde mit abnehmendem Druck weiter von der Ionisationskammer entfernt) und die mit abnehmendem Druck zunehmende Diffusion zu den Elektroden eine Rolle spielen.

Eine schärfere Prüfung der Theorie ist auf Grund von Versuchen bei höheren Drucken — von 760 mm aufwärts — zu erwarten.

Von wesentlichem Einfluß auf die Form der Sättigungskurve ist die *lineare Ionisationsdichte* N_0 . Demgemäß ist der Abstand a des ionisierenden Präparats von der Ionisationskammer mitbestimmend für den Mangel an Sättigung bei gegebenem Feldwerte. Das ist in der Tat schon von Bragg und Kleemann beobachtet und von Moulin mit der Größe N_0 in Zusammenhang gebracht worden.

Leider unterliegt auch in diesem Punkte das vorliegende Material denselben Bedenken, wie bei der Druckabhängigkeit: fast alle Beobachtungen sind bei angenäherter Parallelität von Feld und Kolonnen ausgeführt, so daß die Strahlungsverteilung von Einfluß ist.

Vernachlässigt man dieses, und nimmt an, daß bei allen Abständen a der gleiche Wert von $b \sin \varphi$ eingesetzt werden darf, berücksichtigt man ferner, daß bei gleicher Kolonnenzahl die Sättigungsstromstärke ein Maß für N_0 ist, so folgt aus (32') für konstantes X

$$(38) \quad \frac{i}{J} = \frac{1}{1 + C \cdot J}$$

Dabei bedeutet i die bei dem betreffenden Potential beobachtete Stromstärke, J die Sättigungsstromstärke und C eine Konstante.

Nach dieser Formel sind in Tab. VI zwei Versuchsreihen (Moulin, Tab. III und IV) berechnet, die Kleemann und Moulin bei 25 bzw. 120 Volt/cm aufgenommen haben. Die Konstanten ($C = 5,65 \cdot 10^{-6}$ für $X = 25$; $C = 49,5$ für $X = 120$)

sind so gewählt, daß die Werte der Beobachter direkt eingesetzt werden können, sie sind also nicht vergleichbar.

Tabelle VI.

Abstand a	Feld: 120 Volt/cm		Abstand a	Feld: 25 Volt/cm	
	i/J			i/J	
	beob.	ber.		beob.	ber.
1,05	0,90	0,88	0,7	0,81	0,785
1,55	0,89	0,88	1,0	0,79	0,775
1,95	0,88	0,87	1,3	0,76	0,760
2,35	0,885	0,865	1,6	0,75	0,75
2,75	0,85	0,85	1,9	0,74	0,74
3,05	0,825	0,825	2,2	0,72	0,72
3,25	0,81	0,815	2,4	0,705	0,705
3,35	0,81	0,815	2,6	0,70	0,69
3,45	0,81	0,825	2,8	0,66	0,67
3,55	0,835	0,855	3,0	0,655	0,66
3,65	0,88	0,90	3,1	0,66	0,665
3,70	0,90	0,93	3,2	0,665	0,69
—	—	—	3,3	0,685	0,735

$C = 49,5$ $C = 5,65 \cdot 10^{-4}$

Die drei letzten Werte bei Kleemann und der letzte bei Moulin sind weggelassen, weil bei ihnen J nicht mehr als Maß für N_0 angesehen werden darf; denn gegen Ende des Bereichs der α -Strahlen durchsetzen diese nicht mehr die ganze Ionisationskammer.

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist wieder befriedigend; für die größten Werte von a (jenseits des Minimums von i/J) ist jedoch fraglos die experimentelle Sättigung schlechter als die berechnete; hier macht sich offenbar schon der eben erwähnte Umstand bemerkbar.

Endlich ist aus den theoretischen Formeln noch ein *Einfluß der Temperatur* auf die Sättigungskurve vor auszusehen. Da D/u nach der Townsendschen Relation¹⁾ direkt proportional der absoluten Temperatur ist, muß die Sättigung bei

1) Vgl. J. J. Thomson, *Conduction of El. through Gases*. 2nd Ed. p. 42.

höheren Temperaturen früher eintreten. Versuche in dieser Richtung liegen noch nicht vor.

Für Flüssigkeiten ist nach Formel (15) zu erwarten, daß der Diffusionsverlust einer Kolonne proportional der absoluten Temperatur wächst. Diese Folgerung ist vom Verfasser bereits gezogen und als nahezu in Übereinstimmung mit dem Experiment befunden worden (J. p. 133). Auch frühere Versuche des Verfassers¹⁾ finden so ihre Erklärung; doch erscheint hier fraglos der Effekt infolge der Anwesenheit von elektrolytischen Ionen zu groß.

c) Beziehungen zwischen den Konstanten.

Die vorhergehenden Betrachtungen haben gezeigt, daß für das Verhalten der Kolonnen in den verschiedensten Medien außer den Ionenkonstanten und der linearen Ionisationsdichte N_0 ein Kolonnenparameter b maßgebend ist. Seine Abhängigkeit vom Druck wurde schon erwähnt. Es ist nun zu erwarten, daß die Konstanten b auch für verschiedene Substanzen nicht unabhängig voneinander sind. Die Konstante b ist proportional dem mittleren Abstand der Ionen von der Kolonnenachse im Anfangszustand; b wird also um so größer sein, je größer die mittlere freie Weglänge der Ionen ist, und in demselben Verhältnis wird auch die Länge der Kolonnen, d. h. der Bereich der α -Strahlen, variieren. Mit anderen Worten, man kann erwarten, daß bei α -Strahlen die Konstante b dem Bereich der α -Strahlen proportional ist. Das bestätigt sich in der Tat, wie die Tab. VII zeigt.

Tabelle VII.

	b	d	d/b
Luft bei variablen Druck	$1,79 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{p_0}{p}$	$4,16 \frac{p_0}{p}$	$2,32 \cdot 10^3$
CO ₂	$1,18 \cdot 10^{-3}$	2,81	$2,38 \cdot 10^3$
Hexan	$2,34 \cdot 10^{-6}$	$5,44 \cdot 10^{-3}$	$2,32 \cdot 10^3$

Die Kolonnen sind also — und zwar in Medien von so verschiedener Dichte, wie Luft und Hexan, — geometrisch äh-

1) G. Jaffé, Ann. d. Phys. 25. p. 282. 1908.

liche Gebilde. Danach ist es nun möglich, die Form der Sättigungskurve für eine beliebige Substanz voraus zu berechnen, wenn die Ionenkonstanten bekannt sind. Denn die Gesamtzahl der von einem α -Teilchen erzeugten Ionen variiert nur wenig in verschiedenen Substanzen¹⁾ und der Bereich der α -Strahlen läßt sich nach der Regel von Bragg²⁾ mit guter Annäherung berechnen; damit ist aber N_0 bekannt, und b ergibt sich aus der eben festgestellten Beziehung. In vielen Fällen ist sogar die Kenntnis der Ionenkonstanten entbehrlich, denn diese treten nur in gewissen Kombinationen in den Formeln auf; nun ist aber u/D konstant und α/D läßt sich für dichte Medien, in denen die Langevinsche Zahl den Wert 1 hat, aus der Langevinschen und Townsendschen Relation berechnen.

Es wird also das Verhalten der von α -Strahlen in den verschiedensten Medien erzeugten Kolonnen — in und außerhalb eines elektrischen Feldes — durch nur eine neue Konstante $d/b = 2,34 \cdot 10^3$ geregelt. Ob für β -Strahlen der gleiche Kolonnendurchmesser maßgebend ist, wie für α -Strahlen, muß vorläufig dahingestellt bleiben; jedenfalls zeigen die oben mitgeteilten Berechnungen, daß die Größenordnung die gleiche ist.

Was nun die absoluten Beträge der Konstanten b betrifft, so sind sie vielleicht größer, als man erwartet hätte. Der mittlere Abstand der Ionen von der Bahn des erzeugenden α -Teilchens ergibt sich zur Zeit Null für Luft zu

$$r_0 = b \sqrt{\frac{\pi}{4}} = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ cm.}$$

Die mittlere freie Weglänge λ eines Ions³⁾ in Luft ist wie die eines Moleküls von der Größenordnung 10^{-5} , so daß r_0 wesentlich größer ist als λ , und auch für Hexan hat man $r_0 = 2,08 \cdot 10^{-6}$, während die mittlere freie Weglänge nach v. d. Bijl⁴⁾ etwa $1 \cdot 10^{-7}$ sein dürfte.

Die Erklärung des Umstandes, daß der anfängliche Kolonnendurchmesser so viel größer ist als eine freie Weglänge,

1) Man vgl. E. Rutherford, *Radioactive Substances* p. 64.

2) l. c. p. 165.

3) P. Langevin, *Ann. de Chim. et de Phys.* 28. p. 333. 1903.

4) H. J. v. d. Bijl, *Ann. d. Phys.* 39. p. 210. 1912.

bereitet keine Schwierigkeit, wenn man berücksichtigt, was als Anfangszustand der Rechnung anzusehen ist. In der oben entwickelten Theorie ist angenommen, daß den Ionen von der Zeit $t = 0$ an die normalen Werte der Konstanten u , α und D zukommen. Das kann aber nicht streng zutreffen, denn die anderweitig bestimmten Ionenkonstanten beziehen sich auf Ionen, die bereits mit der normalen Zahl von neutralen Molekülen beladen sind, was in den ersten Augenblicken nach Bildung der Kolonne noch nicht der Fall ist. Die Ionisation besteht aller Voraussicht nach in der Abspaltung eines Elektrons aus dem Molekül; das Elektron, wie das positiv geladene Restatom müssen erst eine gewisse Zahl von Kollisionen erleben, bevor sie zu normalen Ionen werden. Nimmt man nun an, daß sich Elektron und Restatom mit Geschwindigkeiten voneinander trennen, die größer sind als die spätere mittlere Geschwindigkeit der Ionen, so werden sich die ersten Kollisionen schnell gegen die späteren Vorgänge der Diffusion usw. abspielen, und die entwickelten Gleichungen geben von diesem ersten Stadium keine Rechenschaft. Als Anfangszustand der Rechnung gilt derjenige Zustand, in dem die Ionen ihre normale Beweglichkeit erlangt haben — und so erklärt sich der verhältnismäßig beträchtliche Kolonnendurchmesser.

Man könnte auch die Hypothese vorschlagen, daß die α -Strahlen primär δ -Strahlen erzeugen, die ihrerseits das Gas ionisieren; aber da von δ -Strahlen solcher Art vorläufig nichts bekannt ist, scheint dem Verfasser die oben gegebene Deutung ungezwungener.

Unter allen Umständen steht der große Wert des Kolonnendurchmessers im Widerspruch mit der Braggschen Annahme einer vorzugsweisen Wiedervereinigung zwischen dem Ionenpaar, das aus dem gleichen Molekül stammt. Die Trennung bei der Dissoziation scheint im Gegenteil — sogar bei flüssigen Medien — sehr vollständig zu sein.

Bei der Berechnung des Diffusionsverlustes einer Kolonne, wurde die Entfernung R eingeführt, bis zu welcher die Ionen gelangen müssen, um der Kolonne zu entrinnen. Wenn die Zahl der Kolonnen bekannt ist, läßt sich diese Größe angenähert berechnen. Aus den Angaben bei Moulin und dem

oben angenommenen Wert für N_0 folgt, daß in den Moulin-schen Experimenten 87,5 Kolonnen pro Sekunde und Quadrat-zentimeter vorhanden waren. Nimmt man der Einfachheit halber an, daß diese 87,5 Kolonnen immer gleichzeitig zu Beginn jeder Sekunde erzeugt werden, so ist der mittlere Abstand zweier Kolonnen¹⁾

$$\bar{R} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{87,5}} = 0,053.$$

Die Hälfte dieses Wertes muß vergleichbar sein mit R , wie es sich aus den Versuchen ergibt. Nun wurde als Mittelwert für alle Substanzen gefunden $R^2/b^2 = 550$; daraus ergibt sich für Luft $R = 4,2 \cdot 10^{-2}$ und für Kohlensäure $R = 2,8 \cdot 10^{-2}$, also von der gleichen Größenordnung wie \bar{R} . Eine quantitative Übereinstimmung ist nach der Art der Berechnung von \bar{R} und der Bestimmung von R nicht zu erwarten. Jedenfalls bestätigt diese Betrachtung die Richtigkeit der großen gefundenen Werte für die Kolonnendurchmesser; denn \bar{R} kann nur noch größer ausfallen, wenn die verschiedene Zeit der Erzeugung der Kolonnen in Betracht gezogen wird.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Es wurde eine Formel für die räumlichen und zeitlichen Änderungen der Ionisationsdichte in einer Kolonne, unter Berücksichtigung der Diffusion und Wiedervereinigung, aufgestellt. Die sich aus der Theorie ergebenden Werte für den Diffusionsverlust in verschiedenen Gasen und Flüssigkeiten sind in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

2. Es wurden Formeln aufgestellt für die Vorgänge in einer Kolonne im elektrischen Felde, unter Berücksichtigung der Diffusion und Wiedervereinigung, bei beliebiger Richtung des Feldes gegen die Kolonne. Die sich aus der Theorie ergebenden Sättigungskurven (Charakteristiken), sind in Übereinstimmung mit der Erfahrung

- a) für Gase unter normalem Druck bei Ionisation mit α -Strahlen,

1) Vgl. P. Hertz, *Mathematische Annalen* 67. p. 387. 1908.

b) für Gase bei hohen Drucken, bei Ionisation mit β -Strahlen,

c) für Hexan, bei Ionisation mit α - oder β -Strahlen.

2. Die aus den Formeln sich ergebende Abhängigkeit der Sättigungskurven: von der Richtung des elektrischen Feldes, vom Druck, von der linearen Ionisationsdichte und der Temperatur ist in quantitativer Übereinstimmung mit den vorliegenden Beobachtungen.

4. Der Durchmesser einer von α -Strahlen erzeugten Kolonne (d. h. der mittlere Abstand der Ionen von der Kolonnenachse im Anfangszustand) erwies sich in verschiedenen Medien als proportional dem Bereich der α Strahlen. Es ist danach möglich, die Sättigungskurve für beliebige, gasförmige oder flüssige Medien vorauszuberechnen.

Leipzig, im Mai 1913.

(Eingegangen 30. Mai 1913.)
