SUR UN TRIPLE SYSTÈME PARTICULIER DE SURFACES ORTHOGONALES.

PAR M. EDOUARD COMBESCURE

DOCTEUR-ÈS-SCIENCES

Dans la plupart des traités élémentaires d'analyse on donne, comme application du problème des trajectoires orthogonales, l'exemple des courbes paraboliques ou hyperboliques renfermées dans l'équation $x^m y^n = a$. On peut se proposer, à l'égard des surfaces paraboliques ou hyperboliques comprises dans l'équation $x^m y^n z^p = \gamma$, où γ est le paramètre variable, la question de trouver les surfaces qui leur sont orthogonales, ce qui n'offre pas la moindre difficulté. Or il arrive ici qu'il existe deux séries de ces surfaces orthogonales qui sont en même temps orthogonales entr'elles; de façon que, en vertu du théorème de M. Dupin, elles s'entrecoupent suivant leurs mutuelles lignes de courbure. La détermination d'un triple système orthogonal offrant en général de très-grandes difficultés, je présente le calcul suivant à cause de son extrême simplicité.

§ I.

Soit, en coordonnées rectangulaires,

$$x^m y^n z^p = \gamma$$

l'équation d'une famille de surfaces paraboliques ou hyperboliques au paramètre γ ; et $f(x, y, z) = \alpha$ l'équation d'une surface quelconque orthogonale aux proposées. En désignant par S une somme symétrique par rapport à x, y, z , on devra avoir

$$S \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\gamma}{dx} = 0;$$

c'est-à-dire ici

$$\frac{m}{x} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{n}{y} \frac{d\alpha}{dy} + \frac{p}{z} \frac{d\alpha}{dz} = 0,$$

d'où l'on tire pour f ou α une fonction arbitraire de u et v , en prenant

$$\frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{p} = 2u, \quad \frac{y^2}{n} - \frac{z^2}{p} = 2v.$$

Maintenant pour que les surfaces $\alpha = f(u, v)$, $\beta = \varphi(u, v)$, qui sont orthogonales aux proposées, quelles que soient les formes f et φ , soient orthogonales entr'elles, il faudra que l'on ait

$$S \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\alpha d\beta}{du du} S \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha d\beta}{du dv} + \frac{d\alpha d\beta}{dv du} \right) S \frac{du dv}{dx dx} + \frac{d\alpha d\beta}{dv dv} S \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = 0.$$

Or des expressions de u et v on tire

$$S \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \frac{x^2}{m^2} + \frac{z^2}{p^2} = \frac{2u}{m} + \frac{(p+m)z^2}{m p^2}$$

$$S \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = \frac{2v}{n} + \frac{(p+n)z^2}{n p^2}$$

$$S \frac{du dv}{dx dx} = \frac{z^2}{p^2}.$$

En substituant dans l'équation précédente et observant que α et β ne doivent dépendre que de u et de v , cette équation se partage dans les deux suivantes

$$\frac{u}{m} \frac{d\alpha d\beta}{du du} + \frac{v}{n} \frac{d\alpha d\beta}{dv dv} = 0,$$

$$\frac{p+m}{m} \frac{d\alpha d\beta}{du du} + \frac{p+n}{n} \frac{d\alpha d\beta}{dv dv} + \frac{d\alpha d\beta}{du dv} + \frac{d\alpha d\beta}{dv du} = 0.$$

Si l'on élimine le rapport $\frac{d\alpha}{du} : \frac{d\alpha}{dv}$ entre ces dernières équations, on obtient

$$\left(\frac{dv}{du} \right)^2 + \left(\frac{n+p}{n} - \frac{m+p}{n} t \right) \frac{d\beta}{du} \frac{d\beta}{dv} - \frac{m}{n} t \left(\frac{d\beta}{dv} \right)^2 = 0$$

où l'on a posé $v = ut$.

Da cette équation on tire

$$\frac{d\beta}{du} : \frac{d\beta}{dv} = S \pm \sqrt{\left(s + \frac{m}{m+p} \right)^2 + \frac{mp(m+n+p)}{n(m+p)^2}}$$

en faisant, pour abréger,

$$s = \frac{m+p}{2n} t - \frac{n+p}{2n}.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{\left(s + \frac{m}{m+p} \right)^2 + \frac{mp(m+n+p)}{n(m+p)^2}} = s + \frac{m}{m+p} + \frac{(m+n+p)\theta}{n(m+p)}$$

il en résulte

$$s + \frac{m}{m+p} = \frac{mnp - (m+n+p)\theta^2}{2n(m+p)\theta},$$

$$\sqrt{\left(s + \frac{m}{m+p}\right)^2 + \frac{mp(m+n+p)}{n(m+p)^2}} = \frac{mnp + (m+n+p)\theta^2}{2n(m+p)\theta},$$

$$t = \frac{(p-\theta)[mn + (m+n+p)\theta]}{(m+p)^2\theta},$$

$$dt = -\frac{mnp + (m+n+p)\theta^2}{(m+p)^2\theta^2} d\theta.$$

En vertu de ces relations l'équation qui détermine $\frac{d\beta}{du} : \frac{d\beta}{dv}$ donnera, pour le cas du signe supérieur,

$$\frac{d\beta}{du} : \frac{d\beta}{dv} = \frac{m(p-\theta)}{(m+p)\theta},$$

et, pour le cas du signe inférieur,

$$\frac{d\beta}{du} : \frac{d\beta}{dv} = -\frac{mn + (m+n+p)\theta}{n(m+p)}.$$

Comme on doit avoir

$$\frac{d\alpha}{du} : \frac{d\alpha}{dv} = -\frac{m}{n} t. \frac{d\beta}{dv} : \frac{d\beta}{du},$$

si l'on prend pour $\frac{d\beta}{du} : \frac{d\beta}{dv}$ la valeur fournie par la première des équations précédentes, on trouvera pour $\frac{d\alpha}{du} : \frac{d\alpha}{dv}$ la valeur de $\frac{d\beta}{du} : \frac{d\beta}{dv}$ fournie par la seconde; ce qu'il était facile de prévoir. On peut donc adopter pour déterminer α et β les deux équations séparées

$$\frac{d\beta}{du} : \frac{d\beta}{dv} = \frac{m(p-\theta)}{(m+p)\theta},$$

$$\frac{d\alpha}{du} : \frac{d\alpha}{dv} = -\frac{mn + (m+n+p)\theta}{n(m+p)}.$$

Posant, pour intégrer la première,

$$\frac{du}{(m+p)\theta} + \frac{dv}{m(p-\theta)} = 0,$$

ou, à cause de $v = ut$,

$$\frac{du}{u} \left(\frac{1}{(m+p)\theta} + \frac{t}{m(p-\theta)} \right) + \frac{dt}{m(p-\theta)} = 0,$$

on aura, d'après les valeurs ci-dessus de t et de dt ,

$$(m+n+p) \frac{du}{u} = \frac{mnp + (m+n+p)\theta^2}{\theta(\theta+m)(p-\theta)} d\theta = \left(\frac{n}{\theta} - \frac{m+n}{\theta+m} + \frac{p+n}{p-\theta} \right) d\theta;$$

d'où l'on conclut

$$\beta = u^{m+n+p} (\theta+m)^{m+n} (\theta-p)^{p+n} \theta^{-n}.$$

De même, pour déterminer α , on devra poser

$$\frac{du}{u} \left(\frac{1}{n(m+p)} - \frac{t}{mn + (m+n+p)\theta} \right) = \frac{dt}{mn + (m+n+p)\theta}$$

ou

$$\begin{aligned} -\frac{du}{u} &= \frac{[mnp + (m+n+p)\theta^2] n d\theta}{\theta \{ (m+n+p)\theta - np \} \{ (m+n+p)\theta + mn \}} \\ &= \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{m+n}{(m+n+p)\theta - np} + \frac{p+n}{(m+n+p)\theta + mn} \right) d\theta; \end{aligned}$$

d'où l'on conclura

$$\alpha = u^{m+n+p} \{ (m+n+p)\theta - np \}^{m+n} \{ (m+n+p)\theta + mn \}^{p+n} \theta^{-(m+n+p)}.$$

Ainsi en résumé, on a le triple système de surfaces orthogonales,

$$\alpha = u^{m+n+p} \{ (m+n+p)\theta - np \}^{m+n} \{ (m+n+p)\theta + mn \}^{p+n} \theta^{-(m+n+p)},$$

$$\beta = u^{m+n+p} (\theta+m)^{m+n} (\theta-p)^{p+n} \theta^{-n},$$

$$\gamma = x^m y^n z^p,$$

aux paramètres α , β , γ . Il reste à introduire dans ces équations la valeur de θ en x , y , z et aussi celle de u qui est $\frac{x^2}{2m} - \frac{z^2}{2p}$. D'après les relations posées précédemment on a

$$\begin{aligned} \frac{2(m+n+p)\theta}{m+p} &= - (m+p) t + \frac{p(m+n+p) - mn}{m+p} \\ &+ \sqrt{(m+p)^2 t^2 - 2 \{ p(m+n+p) - mn \} t + (n+p)^2}, \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire, si l'on veut,

$$\begin{aligned} \frac{2(m+n+p)\theta}{m+p} &= \left[\sqrt{-\frac{(m+p)t}{2} + \frac{(\sqrt{p(m+n+p)} + \sqrt{-mn})^2}{2(m+p)}} \right. \\ &\left. + \sqrt{-\frac{(m+p)t}{2} + \frac{(\sqrt{p(m+n+p)} - \sqrt{-mn})^2}{2(m+p)}} \right]^2 \end{aligned}$$

où l'on doit mettre pour t sa valeur $\frac{v}{u}$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{y^2}{n} - \frac{z^2}{p}\right) : \left(\frac{x^2}{m} - \frac{z^2}{p}\right).$$

Les paramètres α , β , γ sont exprimés directement en fonction de x , y , z ; mais la détermination de x , y , z en fonctions de α , β , γ dépend d'équations qui ne sont pas résolubles algébriquement quand m , n , p restent indéterminés. Ainsi, en divisant α par β , on aura une équation à la seule inconnue θ . Quand on l'aura résolue, u s'en suivra sans difficulté et il en sera de même de v . Ayant ainsi u et v en fonctions de α , β on aura à résoudre l'équation

$$\left(2u + \frac{z^2}{p}\right)^m \left(2v + \frac{z^2}{p}\right)^n z^{2p} = m^{-m} n^{-n} \gamma^2,$$

qui donnera z en fonction de α , β , γ . Les expressions de x et y en résulteront tout de suite.

§ II.

Je vais examiner avec quelques détails le cas particulier où deux des exposants m , n , p sont égaux à 1 et le 3^{me} à -1 . Alors en changeant un peu la notation, on peut prendre pour les trois séries de surfaces orthogonales

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = 2\alpha, \\ \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = 2\beta, \\ \frac{xy}{z} = 2\gamma. \end{array} \right.$$

La 3^{me} est un paraboloïde hyperbolique. La 2^{me} le lieu des points dont la différence des distances aux axes Ox , Oy est constante. Pour la 1^{re} c'est la somme des mêmes distances qui est constante.

On sait que l'Académie de Bruxelles a proposé, en 1860, pour le concours de 1862, la question de « trouver l'intégrale de l'équation des lignes de courbure de la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante » (voir les *Ann. de M. Terquem*, t. XX, p. 152). Ce lieu géométrique, dans le cas où les deux droites sont rectangulaires, a été l'objet d'une étude particulière à la page 57 du volume cité. J'ignore si la question des lignes de courbure a été résolue pour un angle quelconque des droites. Quand l'angle est droit la solution est une conséquence de la triple orthogonalité du système ci-dessus. Cette orthogonalité peut se vérifier ici, si on le désire, et l'on trouve tout de suite

$$S \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dx} = 0, \quad S \frac{d\alpha}{dx} \frac{d\gamma}{dx} = 0, \quad S \frac{d\beta}{dx} \frac{d\gamma}{dx} = 0.$$

*

Si l'on désigne indifféremment par $a\sqrt{2}$ le paramètre 2α ou 2β les deux premières des équations (a) donnent, par l'évanouissement des radicaux, l'équation unique

$$a^4 + \frac{1}{4}(x^2 - y^2)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 2a^2z^2,$$

qui rapportée aux bissectrices des angles des axes Ox , Oy peut s'écrire

$$(a^2 - x'^2)(a^2 - y'^2) = 2a^2z^2$$

et montre que la surface coupe le plan horizontal xy suivant un carré, au côté $2a$, qu'elle recouvre symétriquement par dessus et par dessous de façon à former une espèce de coussin carré deux fois plus large dans le sens des diagonales qu'épais dans le sens des z . A chaque sommet du coussin est adapté une sorte de *paraboloïde elliptique* dont l'axe fait suite à la diagonale correspondante du carré et l'ouverture est tournée en dehors. Ces pseudo-paraboloïdes remplissent respectivement de leur projection chacun des angles formés par les prolongements des côtés du carré; tandis qu'ils ne se projettent jamais dans les bandes infinies formées par les côtés opposés. Un coussin représente une surface individuelle (α). Quand α varie de zéro à ∞ le coussin, d'abord réduit à un point (l'origine), se dilate progressivement en restant semblable à lui même, de façon à donner lieu à une suite de couches semblables d'épaisseur infiniment petite, mais jamais nulle. Les quatre nappes qui s'ouvrent aux coins d'un carré représentent une surface individuelle (β), ou plus exactement les deux nappes qui partent de deux sommets opposés, suivant la diagonale, correspondent à la valeur $+\beta$ et les deux autres à la valeur $-\beta$. Quand β varie de 0 à $+\infty$ la surface d'abord confondue avec les plans indéfinis des zx' , zy' se rétrécit progressivement dans le sens vertical et finit par se confondre avec les angles droits mobiles qui lui servent de base sur le plan horizontal et qui sont eux-mêmes alors transportés à l'infini dans deux sens opposés. Une surface individuelle (α) est rencontrée par toutes les surfaces β pour lesquelles $\pm\beta < \alpha$. Si $\pm\beta = \alpha$ la rencontre est réduite aux quatre sommets du carré (α); et si $\pm\beta > \alpha$ il n'y a plus de rencontre. Quant au paraboloïde, qui traverse le plan horizontal suivant les droites Ox , Oy quelque soit γ , il coupe toujours les deux autres séries de surfaces. Lorsque γ varie de zéro à l'infini le paraboloïde, d'abord confondu avec les plans indéfinis zOx , zOy , se rapproche successivement du plan xy et finit par se confondre avec les deux angles xOy opposés par le sommet. Pour des valeurs négatives de γ on a un paraboloïde *renversé* et *retourné* d'un angle droit. Les deux paraboloïdes $(+\gamma)$ et $(-\gamma)$ coupent la surface (α) suivant une espèce de carré curviligne dont deux côtés opposés sont au dessus du plan horizontal xy et les deux autres au dessous. En résumé les limites des paramètres sont:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & +\infty, -\infty & +\infty, -\infty \end{array} \quad +\infty$$

avec la condition $\pm \beta \leq \alpha$, pour que (α) et (β) se coupent effectivement.

La figure ci-jointe est destinée à donner une idée de l'intersection et de la forme des trois surfaces. ZOAA'A'' représente le huitième d'une surface (α) (où $OA = 2\alpha$) comprise entre les deux plans bissecteurs ZOX', ZOY'. ZHA'', ZA' sont deux sections elliptiques faites par ces plans. BB''B'O' représente un huitième de surface quadruple (β) ($OO' = 2\beta$) limitée à la surface (α) . HMAO est un quart de parabolôïde simple limité à la même surface. Ces trois surfaces particulières se coupent au point M suivant les lignes de courbure BMB'', HMA de (α) ; BMB'', MO' de (β) ; HMA, MO' de (γ) . Sur la figure $bb''b'o'$ est une autre surface (β) , $hmao$ un autre parabolôïde. Les courbes BMB''B' se reproduisent symétriquement au dessous du plan horizontal et sont fermées: elles ont pour équations

$$x^2 + z^2 = (\alpha + \beta)^2,$$

$$y^2 + z^2 = (\alpha - \beta)^2,$$

et résultent de l'intersection de deux cylindres de révolution autour de OX et OY, la somme des rayons des deux cylindres étant 2α . Les courbes HMA complètes sont des espèces de carrés curvilignes, ainsi qu'on l'a dit. Comme elles sont des lignes de

courbure du paraboloïde, ainsi que MO', il est inutile d'entrer dans d'autres détails à leur sujet.

Le système coordonné α, β, γ étant suffisamment décrit, si l'on veut exprimer x, y, z en fonction de ces variables on aura

$$4 \gamma^2 z^2 = x^2 y^2 = \{(\alpha + \beta)^2 - z^2\} \{(\alpha - \beta)^2 - z^2\}$$

d'où

$$(b) \quad \begin{cases} z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2 \gamma^2 - 2 \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)(\gamma^2 + \beta^2)}, \\ y^2 = -2 \alpha \beta - 2 \gamma^2 + 2 \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)(\gamma^2 + \beta^2)}, \\ x^2 = 2 \alpha \beta - 2 \gamma^2 + 2 \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)(\gamma^2 + \beta^2)}. \end{cases}$$

Si l'on pose $\gamma = \varepsilon \sqrt{-1}$, ces équations donnent

$$\begin{aligned} \pm z &= \sqrt{(\alpha + \varepsilon)(\alpha - \varepsilon)} - \sqrt{(\beta + \varepsilon)(\beta - \varepsilon)}, \\ \pm y &= \sqrt{(-1)(\alpha - \varepsilon)(\beta + \varepsilon)} + \sqrt{(-1)(\alpha + \varepsilon)(\beta - \varepsilon)}, \\ \pm x &= \sqrt{(\alpha + \varepsilon)(\beta + \varepsilon)} + \sqrt{(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)}. \end{aligned}$$

On déduit aisément de ces dernières expressions

$$\begin{aligned} (dS_\alpha)^2 &= \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2 = 1 + \sqrt{\frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma^2 + \alpha^2}}, \\ (dS_\beta)^2 &= \left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\beta}\right)^2 = 1 + \sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}}, \\ (dS_\gamma)^2 &= \left(\frac{dx}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\gamma}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}} - \sqrt{\frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma^2 + \alpha^2}}\right)^2, \end{aligned}$$

ce qu'on pourra conclure plus rapidement des expressions des paramètres différentiels du premier ordre $\sqrt{S \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2}$, etc. et qui sont ici

$$(c) \quad \begin{cases} h_\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma^2 + \alpha^2}}}}, \\ h_\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}}}}, \\ h_\gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2} - \frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma^2 + \alpha^2}}}. \end{cases}$$

La rectification des arcs S_α , S_β qui répondent aux courbes O'M, AM dépend des fonctions elliptiques. Celle de S_γ , qui répond à la courbe BM dépend des fonctions ultra elliptiques.

Le parallélépipède infinitésimal compris entre six surfaces coordonnées infiniment voisines a pour expression

$$dV = dS_\alpha dS_\beta dS_\gamma = \left(\sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}} - \sqrt{\frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma^2 + \alpha^2}} \right) d\alpha d\beta d\gamma.$$

Si l'on intègre d'abord de $\gamma = 0$ à $\gamma = +\infty$, on aura le quart d'anneau qu'on peut se représenter comme ayant pour base $BMB''b''mb$ et pour épaisseur variable dS_α normal à cette base, la largeur étant dS_β . Si l'on intègre ensuite de $\beta = 0$ à $\beta = \alpha$ on aura la couche dont la base intérieure serait $ZA''AB''Z$ et l'épaisseur dS_α . Enfin en intégrant de $\alpha = 0$ à $\alpha = \alpha$ on aura la seizième partie d'un coussin complet (α). Si l'on pose

$$\gamma = \beta \operatorname{tang} \varphi$$

on aura donc, en appelant V ce volume,

$$\frac{1}{16} V = \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha^2 - \beta^2) d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Le même volume peut se calculer autrement; car, d'après l'équation

$$2a^2 z^2 = (a^2 - x'^2)(a^2 - y'^2),$$

on a

$$\frac{1}{8} \gamma = \int_0^a \int_0^a \frac{1}{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - x'^2} \sqrt{a^2 - y'^2} dx' dy' = \frac{a^3}{\sqrt{2}} \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{8} \pi^2 \alpha^3;$$

par conséquent

$$\int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha^2 - \beta^2) d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi^2 \alpha^3}{16},$$

ou, en posant $b = \alpha \sqrt{1 - k^2}$, et effectuant l'intégration par rapport à α ,

$$\int_0^1 \frac{k^3 dk}{\sqrt{1 - k^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{3\pi^2}{16}.$$

D'après le développement ordinaire de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i} \right)^2 k^{2i},$$

où le coefficient de k^{2i} pour $i = 0$ est égal à 1, la relation précédente, en effectuant l'intégration par rapport à k , deviendra

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2i} \cdot \frac{(2i+2)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{3\pi}{8}.$$

On peut obtenir par les mêmes considérations une formule de transformation intégrale assez générale. En continuant de désigner par x' et y' les coordonnées rectilignes rapportées aux bissectrices des axes primitifs Ox , Oy , on a

$$x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}};$$

mais en ajoutant $2xy = 4\gamma z$ à la somme des deux dernières équations (b) et ayant égard à la relation $z = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} - \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}$, on formera une expression de $(x+y)^2$, on aura de même $(x-y)^2$; d'où, en omettant les doubles signe on tirera

$$(b') \quad \begin{cases} x' = \sqrt{2} \sqrt{(\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} + \gamma)(\sqrt{\gamma^2 + \beta^2} - \gamma)}, \\ y' = \sqrt{2} \sqrt{(\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} - \gamma)(\sqrt{\gamma^2 + \beta^2} + \gamma)}, \\ z = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} - \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}, \end{cases}$$

ce qu'on peut transformer de diverses manières, soit en observant que

$$\sqrt{\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} + \gamma} = \sqrt{\frac{\gamma + \alpha i}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma - \alpha i}{2}}$$

où $i = \sqrt{-1}$, soit en posant $\alpha = \gamma \tan \psi$, $\beta = \gamma \tan \chi$, etc. Cela posé, si l'on regarde la fonction quelconque $f(x', y', z)$ comme le poids spécifique de l'élément de volume de la surface (α), on aura, en intégrant entre les mêmes limites que précédemment, la formule de transformation suivante

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\beta \int_0^\infty f(x', y', z) \frac{(\alpha^2 - \beta^2) d\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}} \\ = \frac{a^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 d\xi d\eta \int_0^\zeta f(a\xi, a\eta, \zeta) d\zeta: \end{aligned}$$

dans le second membre

$$\zeta = \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \eta^2}, \quad a = \alpha \sqrt{2},$$

dans le premier x' , y' , z doivent être remplacés par leurs valeurs (b'). On remarquera spécialement le cas où f est le produit de trois fonctions qui ne dépendent que de z , y' , x' respectivement, par exemple celui où il s'agirait de la détermina-

tion du centre de gravité; celui aussi où f serait égal à

$$\frac{1}{(1 - \xi^2) \sqrt{1 - b^2 \xi^2} \cdot (1 - \eta^2) \sqrt{1 - c^2 \eta^2}}$$

parce qu'alors le second nombre de la formule précédente se réduit, à un facteur numérique près, au produit de deux fonctions elliptiques complètes de première espèce; etc.

Je terminerai cette étude particulière en donnant l'expression des rayons principaux de courbure des surfaces coordonnées (α) , (β) , (γ) . En désignant par $R_\alpha^{(\beta)}$ le rayon principal de courbure de la surface (α) le long de l'arc S_β , etc. et se rappelant la formule générale

$$\frac{1}{R_\alpha^{(\beta)}} = h_\alpha \frac{d \cdot \log h_\beta}{d \alpha},$$

(voir les *Leçons sur les coordonnées curvilignes* de M. Lamé, pag. 41) on aura ici, d'après les valeurs particulières (c) des paramètres h_α , h_β , h_γ le tableau suivant, qui contient aussi les rayons de courbure paramétriques

$$R_\alpha^{(\alpha)}, \quad R_\beta^{(\beta)}, \quad R_\gamma^{(\gamma)} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_\alpha^{(\alpha)} = \frac{2 [\gamma^2 + \alpha^2 + \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)(\gamma^2 + \beta^2)}]^{\frac{3}{2}}}{\alpha \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}}, \\ R_\beta^{(\beta)} = - \frac{2 [\gamma^2 + \alpha^2 + \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)(\gamma^2 + \beta^2)}]^{\frac{3}{2}}}{\alpha \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}}, \\ R_\alpha^{(\gamma)} = - \frac{2 (\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma^2 + \alpha^2}} \right)^{\frac{3}{2}}}; \\ \\ R_\beta^{(\alpha)} = - \frac{2 [\gamma^2 + \beta^2 + \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)(\gamma^2 + \beta^2)}]^{\frac{3}{2}}}{\beta \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}}, \\ R_\beta^{(\beta)} = \frac{2 [\gamma^2 + \beta^2 + \sqrt{(\gamma^2 + \alpha^2)(\gamma^2 + \beta^2)}]^{\frac{3}{2}}}{\beta \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}}, \\ R_\beta^{(\gamma)} = \frac{2 (\alpha^2 - \beta^2)}{\beta \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}} \right)^{\frac{3}{2}}}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\gamma}^{(\alpha)} = -\frac{2(\gamma^2 + \alpha^2)}{\gamma} \sqrt[4]{\frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma^2 + \alpha^2}}, \\ R_{\gamma}^{(\beta)} = \frac{2(\gamma^2 + \beta^2)}{\gamma} \sqrt[4]{\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}}, \\ R_{\gamma}^{(\gamma)} = \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{\gamma \left(\sqrt[4]{\frac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma^2 + \beta^2}} + \sqrt[4]{\frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma^2 + \alpha^2}} \right)^3}, \end{array} \right.$$

d'où l'on conclura les rayons de courbure des arcs S_{α} , S_{β} , S_{γ} au moyen de la formule (*Coord. curv.* p. 64)

$$\frac{1}{\left(r_{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\left(R_{\beta}^{(\alpha)}\right)^2} + \frac{1}{\left(R_{\gamma}^{(\alpha)}\right)^2}$$

et des analogues.

§. III.

L'analyse du § I, à partir de l'introduction de la variable θ , laisse échapper le cas où l'on aurait

$$m + n + p = 0.$$

En introduisant cette hypothèse dans les équations trouvées jusque là, on arrive sans la moindre peine au système suivant

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ \beta &= \frac{x^2 + \frac{m}{m+n} z^2}{y^2 + \frac{n}{m+n} z^2}, \\ \gamma &= \left(\frac{x}{z}\right)^m \left(\frac{y}{z}\right)^n \end{aligned}$$

qui, pour $m = 0$ reproduit les coordonnées sphériques habituelles, et, pour $m = n$, le système formé par la sphère et deux cônes orthogonaux du second degré, lequel n'est pas compris dans le système des cônes homofocaux. Si le rapport $\frac{m}{n}$ est quelconque les équations précédentes ne sont pas résolubles algébriquement par rapport à x , y , z ; car la détermination de ces quantités en fonction de α , β , γ dépend de

l'équation $X = k + X^r$, où r est un nombre connu quelconque et k une quantité aussi connue.

La recherche des surfaces orthogonales entr'elles et aux sphères

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \gamma,$$

revient, comme on sait, à déterminer les cônes concentriques aux proposées et orthogonaux entr'eux ou, ce qui est la même chose, à déterminer les trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de courbes tracées sur la sphère. Si l'on fait

$$u = \frac{x}{z}, \quad v = \frac{y}{z},$$

on a à satisfaire à l'unique équation

$$\frac{d\alpha}{du} \left[(1 + u^2) \frac{d\beta}{du} + u v \frac{d\beta}{dv} \right] + \frac{d\alpha}{dv} \left[(1 + v^2) \frac{d\beta}{dv} + u v \frac{d\beta}{du} \right] = 0.$$

ou à intégrer l'équation différentielle ordinaire

$$du \left[(1 + v^2) \frac{d\beta}{dv} + u v \frac{d\beta}{du} \right] = dv \left[(1 + u^2) \frac{d\beta}{du} + u v \frac{d\beta}{dv} \right],$$

ce qui n'est pas possible généralement quand on prend pour β (ce qui détermine la famille de courbes tracées sur la sphère) une fonction quelconque de u et de v . Dans le cas particulier où β est une fonction homogène de u et de v , on peut supposer

$$\beta = u^m f(t) = \left(\frac{x}{z}\right)^m f\left(\frac{y}{x}\right)$$

où $t = \frac{v}{u} = \frac{y}{x}$. L'équation différentielle, en faisant $u^2 = \frac{1}{w}$, se transforme dans la suivante

$$[(1 + t^2) f' - m t f] dw + 2 [(m f - t f') w + m f] dt = 0$$

qui est linéaire par rapport à w . En l'intégrant par le procédé connu, et la résolvant par rapport à la constante α on aura l'expression de cette dernière fonction.

S. Etienne novembre 1862.