PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND 60.

**1. Zur Theorie stehender electrischer Drahtwellen;
von P. Drude.**

(Im Auszuge aus den Abhandl. der k. sächs. Ges. der Wiss. Bd. XXIII
der math.-phys. Klasse mitgetheilt vom Verf.)

Die Theorie electrischer Drahtwellen ist dadurch einfach zu behandeln, dass der galvanische Widerstand der zur Führung der Wellen dienenden Metalldrähte bei den in der Praxis vorkommenden Anordnungen vernachlässigt oder mindestens als sehr klein angenommen werden kann. — Eine weitere Vereinfachung hat man sich bisher bei der theoretischen Behandlung der Reflexion der Wellen an einer über die Drähte gelegten metallischen Brücke gestattet, eine Vereinfachung, welche zu Totalreflexion der Wellen an einer Metallbrücke führt, und demgemäss zur Bildung von *stehenden* Wellen mit leicht übersichtlichen Gesetzen. Diese letzteren, z. B. das Gesetz, dass die Knoten der electrischen Kraft um Multipla der halben Wellenlänge von der metallischen Brücke entfernt liegen, entsprechen aber nicht streng der Erfahrung, und es lässt sich auch leicht einsehen, dass die Reflexion der Wellen an einer Brücke keine wirklich totale sein kann.

Es soll meine Aufgabe im Folgenden sein, zunächst den besprochenen Punkt der Theorie zu ergänzen. Es wird sich herausstellen, dass die Ergänzung den experimentellen That-sachen entspricht. Ferner soll die allgemeine Frage behandelt werden:

Wie vertheilt sich die electrische und die magnetische Kraft längs eines Systemes zweier paralleler Drähte, an deren Enden eine schnell wechselnde, zeitlich gedämpfte electromotorische Kraft besteht, welche ferner in ihrem Verlauf verschiedene Körper von verschiedenem Brechungs- und Absorptionsvermögen durchsetzen, und welche schliesslich an mehreren Stellen metallische Ueberbrückungen besitzen?

Wenn auch die vollständige Berechnung der in dieser allgemeinsten Gestalt gestellten Frage nicht gegeben werden soll, da sie zu complicirt ausfallen würde, um übersichtlich zu sein, so sollen doch die experimentell wichtigen und interessanten Specialfälle behandelt werden. Es werden sich dadurch einfache experimentelle Methoden zur numerischen Bestimmung sowohl der zeitlichen als der räumlichen Dämpfung der Wellen ergeben, die auf praktische Fälle angewandt werden. Letztere sind in zwei Arbeiten von mir enthalten, nämlich in: 1. „Ueber anomale electricische Dispersion von Flüssigkeiten“ (Abhandl. der math.-phys. Klasse d. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 23, p. 1, 1896, im Auszuge in Wied. Ann. Bd. 58, p. 1, 1896) und 2. „Der electricische Brechungsexponent von Wasser und wässerigen Lösungen“ (Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. 1896, p. 315, Wied. Ann. Bd. 59, p. 17, 1896). Im Folgenden sollen diese Arbeiten kurz citirt werden als „Arbeit I“ und „Arbeit II“.

I. Wellen in Drähten, die überall von Luft umgeben sind.

A. Der Leitungswiderstand der Drähte soll gleich Null angenommen werden.

1. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Bei Kleinheit des Leitungswiderstandes der Drähte führt sowohl die Kirchhoff'sche Behandlung des Problems, welche an die Vorgänge in den Drähten anknüpft, wie die Integration der Maxwell'schen Differentialgleichungen des electromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte zu der gleichen einfachen Lösung.¹⁾ Gehen wir z. B. den Kirchhoff'schen Weg: i sei die electromagnetisch gemessene Stromstärke in einem der Drähte in einem Punkte $\mathfrak{P}$, der von einem willkürlichen, im Draht liegenden Anfangspunkte an die Entfernung z besitze, e sei die (scheinbare) electrostatische Ladung der Längeneinheit des Drahtes in $\mathfrak{P}$, d. h. die Anzahl electricischer Stromlinien, welche in der unmittelbaren Umgebung von $\mathfrak{P}$ aus der Oberfläche der Längeneinheit des Drahtes austreten und in den umgebenden Luftraum sich als electricische Kraftlinien fortsetzen (und zugleich als Stromlinien der Verschiebungsströme nach Maxwell'scher Auffassung).

1) Letzteren Weg ist zuerst Hertz gegangen.

Vernachlässigt man zunächst den Widerstand der Drähte noch nicht, sondern bezeichnet man den Widerstand der Längeneinheit eines der Drähte mit w , so ist nach dem Ohm'schen Gesetze, welches sich bisher für Metalle bis zu den schnellsten, eigentlichen electrischen, d. h. mit electrischen Hilfsmitteln herstellbaren (nicht optischen) Wellen bewährt hat:

$$(1) \quad iw = E_1 + E_2,$$

wobei rechts die gesammte, pro Längeneinheit wirkende electromotorische Kraft (nach electromagnetischem Maasse gemessen) steht. Diese zerfällt in zwei Theile: in die durch zeitliche Stromänderungen hervorgerufene Inductionskraft¹⁾:

$$(2) \quad E_1 = -2 \log \frac{d}{R} \cdot \frac{\partial i}{\partial t},$$

wobei d den gegenseitigen Abstand der Drähte, R ihren Radius bedeutet (es soll R klein gegen d sein), und in die von der scheinbaren electrostatischen Ladung e herrührenden electrischen Kraft E_2 . Die Ladung e erzeugt ein Potential

$$(3) \quad V = 2 \log \frac{d}{R} \cdot e,$$

die von e herrührende electrische Kraft in Richtung der Drahtaxe z ist: $-\partial V/\partial z$. Da aber E_2 electromagnetisch gemessen werden soll, während e und V electrostatisch definirt sind, so ist

$$(4) \quad E_2 = -c \frac{\partial V}{\partial z} = -2c \log \frac{d}{R} \cdot \frac{\partial e}{\partial z},$$

wobei c das Verhältniss der electrostatisch gemessenen zu der electromagnetisch gemessenen Electricitätsmenge bedeutet.²⁾

Zur Gültigkeit der Formeln (2) und (3) ist vorausgesetzt, dass in gegenüberliegenden Theilen des Drahtsystems stets gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Ströme fliessen, was man durch völlige Symmetrie der ganzen Anordnung experimentell leicht realisiren kann.

Da nun der Stromverlust im Draht pro Längeneinheit, d. h. die Grösse $-\partial i/\partial z$, ganz ersetzt werden soll durch

1) Betreffs der näheren Herleitung der Formeln (2), (3) und (5) vgl. Kirchhoff, Ges. Abh. p. 131, 154, 182 oder auch die „Physik des Aethers“ vom Verf. p. 374 u. ff.

2) c ist gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vacuum.

Anhäufung scheinbarer Ladung e , so gelangt man, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass i electromagnetisch, e electrostatisch gemessen ist, zu der Beziehung:

$$(5) \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t}.$$

Durch Differentiation von (1) nach der Zeit t und Einsetzen der Werthe (2), (4), (5) ergibt sich nun

$$(6) \quad w \frac{\partial i}{\partial t} = 2 \log \frac{d}{R} \left\{ -\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \right\};$$

derselben Differentialgleichung genügt wegen (5) auch e .

Wird nun der galvanische Widerstand w des Drahtes vernachlässigt, so folgt aus (6), wenn man e statt i schreibt:

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 e}{\partial x^2},$$

d. h.:

$$(7) \quad e = f_1(z - ct) + f_2(z + ct),$$

worin f_1 und f_2 zwei willkürliche Functionen bedeuten. — Durch (7) ist die wellenartige Ausbreitung der Ladungen e (oder des Stromes i) gekennzeichnet, c ist die Geschwindigkeit, mit der sich irgend welche electriche Gleichgewichtsstörungen im Drahte fortpflanzen.

Liegt an einer Stelle $z = b$ eine metallische Brücke B über den Drähten, so tritt dort eine Stromverzweigung ein, indem der zufließende Strom i zum Theil sich als Brückenstrom i' , zum Theil als Strom i'' in den Paralleldrähten fortsetzt. Bezeichnet man die Länge der Brücke B durch l , ferner den Widerstand der ganzen Brücke (nicht auf die Längeneinheit bezogen) durch w' , so muss nach dem Ohm'schen Gesetze sein

$$(8) \quad i' w' = E_1' + E_2',$$

wobei E_1' die (längs l summirte) Inductionskraft, welche durch Aenderungen des Stromes i' entsteht, bedeutet, während E_2' die electriche Kraft bedeutet, die durch die scheinbaren Ladungen e der Paralleldrähte an den Stellen $z = b$ in der Brücke hervorgerufen wird. — Es wird dabei abgesehen von scheinbaren Ladungen e' auf der Brücke B , d. h. i' wird in der ganzen Brücke als von einerlei Grösse angenommen, was gestattet ist, wenn l nicht sehr gross ist.

Bezeichnet man den Coefficienten der Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke mit L , so ist

$$(9) \quad E_1' = -L \cdot \frac{\partial i'}{\partial t} \cdot l.$$

Der Coefficient der Selbstinduction L der Brücke ist streng nicht angebbar. Wenn in der kleinen Entfernung d' von B eine zweite Brücke B' liegt, in welcher ein Rückstrom i' bestände, so wäre gemäss (2) näherungsweise zu setzen:

$$(10) \quad L = 2 \log \frac{d'}{R'},$$

falls R' den Radius der Brückendrähte bezeichnet. Wenn in der Nähe keine zweite Brücke B' liegt, so findet ein Rückstrom von i' doch statt als Verschiebungsstrom in dem Luft- raume zwischen den Drähten, d. h. um so näher an B , je kürzer die Wellenlänge λ ist. Da dieser Verschiebungsstrom am stärksten in der Entfernung $\frac{1}{4}\lambda$ von der Brücke B ist, so wird daher näherungsweise zu setzen sein

$$(11) \quad L = 2 \log \frac{\frac{1}{4}\lambda}{R'}.$$

Im allgemeinen wird man erwarten, dass L grösser als die Selbstinduction auf den Paralleldrähten, d. h. $L > 2 \log d/R$, ist, jedoch wegen der geringen Aenderung des $\log$ mit seinem Argument wird jedenfalls L und $2 \log d/R$ von etwa gleicher Grössenordnung sein. Eine strenge Berechnung erscheint wohl kaum möglich. Von Bedeutung ist es aber, dass L als constant angesehen werden muss, falls keine zweite Brücke B' näher als $\frac{1}{4}\lambda$ an die Brücke B heranrückt.

Die electriche Kraft E_2' , welche durch die Ladungen e der Paralleldrähte längs der ganzen Länge l der Brücke hervorgerufen wird, ist gleich dem Unterschiede des Potentials V an den Enden der Brücke, d. h. nach (3) in electromagnetischem Maasse:

$$(12) \quad E_2' = c \cdot 4 e \log \frac{d}{R}.$$

Es ist daher nach (8), wenn der Widerstand der Brücke w' vernachlässigt wird:

$$(13) \quad L \cdot l \cdot \frac{\partial i'}{\partial t} = 4 c e \cdot \log \frac{d}{R}, \quad (z = b).$$

Diese Gleichung in Verbindung mit

$$(14) \quad i = i' + i'', \quad (z = b),$$

sowie

$$(15) \quad e = e'' \quad (z = b),$$

stellen die Bedingungen dar, welche bei einer Brücke zu erfüllen sind; e'' bedeutet die electricische Ladung der Längeneinheit der Drähte hinter der Brücke. Man erkennt aus (13), dass bei kurzen Brückenlängen l (die Länge l kann man beliebig vergrössern, wenn man gebogene Brücken verwendet, nur ist die untere Grenze $l \geq d$ vorgeschrieben) die Bedingung an einer Brücke näherungsweise lautet:

$$(16) \quad e = 0 \quad \text{für } z = b.$$

In dieser Form ist die Brückenbedingung bisher behandelt worden.

2. Reflexion und Uebergang von Wellen an einer Brücke.

Es soll der Fall betrachtet werden, dass periodische Störungen, die eine zeitliche Dämpfung besitzen, in dem Drahtsystem vor der Brücke vorhanden sind. Wir setzen demgemäss

$$(17) \quad e = A \cdot e^{-\gamma\left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right)} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right).$$

Dabei bedeutet T die Periode der Schwingung, λ die Wellenlänge, γ die (zeitliche) Dämpfungsconstante. Nach (7) muss sein

$$(18) \quad \lambda = c T.$$

Die Gleichung (17) sagt aus, dass eine, an einer Stelle des Drahtsystems auftretende Störung

$$(19) \quad e = A \cdot e^{-\gamma \frac{t}{T}} \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

ungeschwächt, d. h. ohne räumliche Dämpfung (Absorption) nach den positiven z längs der Drähte fortgepflanzt wird. — Man kann e nach (17) durch den reellen Theil einer Exponentialfunction complexen Argumentes darstellen. Wir wollen e dieser Exponentialfunction selbst gleichsetzen und am Schlusse der Rechnung die physikalische Bedeutung des reellen Theiles allein hervortreten lassen. Dieser Weg ist gestattet, da alle

Gleichungen linear und homogen sind, d. h. da für alle Gleichungen das Superpositionsprincip gilt; er bietet gewisse Vortheile rechnerischer Einfachheit. Wir setzen demgemäss:

$$(20) \quad e = A \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)},$$

wobei nach (17) ist

$$(21) \quad \alpha = -\gamma + 2\pi \sqrt{-1}.$$

Aus (5) folgt

$$(22) \quad i = A \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}.$$

Diese Gleichungen stellen Wellen dar, welche sich nur nach der positiven z -Axe fortpflanzen; wir wollen sie *einfallende* Wellen nennen.

Wenn die Wellen auf eine Brücke treffen (bei $z = b$), so werden sie dort theilweise *reflectirt*, als

$$(23) \quad \begin{cases} e_r = A_r \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} + \Delta \right)}, \\ i_r = -A_r \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} + \Delta \right)}, \end{cases}$$

theilweise pflanzen sie sich über die Brücke hinaus fort, als

$$(24) \quad \begin{cases} e'' = A'' \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \Delta'' \right)}, \\ i'' = A'' \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \Delta'' \right)}, \end{cases}$$

theilweise gehen sie in die Brücke B selbst hinein. Ohne solche reflectirten Antheile würde man nämlich nicht die Brückenbedingungen (13), (14), (15) erfüllen können. Das negative Vorzeichen in (23) für i_r muss deshalb gesetzt werden, weil nach (5) sein muss

$$-\frac{\partial i_r}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial e_r}{\partial t}.$$

Von der Zeit an, in welcher die Wellen die Brücke erreicht haben, ist also zu setzen:

$$(25) \quad \begin{cases} e = A \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)} + A_r \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} + \Delta \right)}, \\ i = A \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)} - A_r \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} + \Delta \right)}. \end{cases}$$

Infolge der dritten Brückenbedingung (15) muss sein:

$$(26) \quad A \cdot e^{-\alpha \frac{b}{\lambda}} + A_r \cdot e^{\alpha \left(\frac{b}{\lambda} + \Delta \right)} = A'' \cdot e^{\alpha \left(-\frac{b}{\lambda} + \Delta'' \right)}.$$

Ferner ist nach (14)

$$i' = i - i'' = A \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} \right)} - A_r \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{b}{\lambda} + \Delta \right)} - A'' \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} + \Delta'' \right)},$$

d. h. wenn man A'' mit Hülfe der vorigen Gleichung eliminirt:

$$(27) \quad i' = -2 A_r \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{b}{\lambda} + \Delta \right)}.$$

Daher wird die Brückenbedingung (13):

$$-A_r \cdot L l \frac{\alpha}{\lambda} e^{\alpha \left(\frac{b}{\lambda} + \Delta \right)} = 2 \log \frac{d}{R} \left\{ A e^{-\alpha \frac{b}{\lambda}} + A_r e^{\alpha \left(\frac{b}{\lambda} + \Delta \right)} \right\},$$

oder

$$(28) \quad A_r \cdot e^{\alpha \Delta} = - \frac{A \cdot e^{-2\alpha \frac{b}{\lambda}}}{1 + \frac{\alpha l L}{2 \lambda \log \frac{d}{R}}}.$$

Aus (26) folgt dann gemäss (28):

$$(29) \quad A'' \cdot e^{\alpha \Delta''} = A \cdot \frac{\alpha l L : 2 \lambda \log \frac{d}{R}}{1 + \frac{\alpha l L}{2 \lambda \log \frac{d}{R}}}.$$

Durch (28) und (29) ist die reflectirte, sowie die über die Brücke hinaus gelangende Welle vollkommen aus der einfallenden bestimmt.

Wenn $\alpha l L$ vernachlässigt wird gegen $2 \lambda \log d/R$, so würde aus (28) folgen

$$A_r = -A, \quad \Delta = -\frac{2b}{\lambda},$$

d. h. die Wellen werden bei sehr kurzer Brückenlänge an der Brücke mit Umkehr ihrer Amplitude reflectirt, und die reflectirte Welle hat dieselbe Amplitude, wie die einfallende. Aus (29) folgt

dann $A'' = 0$, d. h. es pflanzt sich gar keine Welle über die Brücke hinaus fort.

Wenn nicht jene Vernachlässigung eintritt, so soll zunächst zur Abkürzung das Verhältniss der Selbstinduction der Längeneinheit auf der Brücke und auf einem der Parallel-drähte mit ζ bezeichnet werden, d. h.

$$(30) \quad \zeta = L : 2 \log \frac{d}{R}.$$

Ferner sollen vier (reelle) Hilfsgrössen ϱ , φ , ϱ'' , φ'' eingeführt werden durch die Gleichungen:

$$(31) \quad \frac{1}{1 + \alpha \zeta \frac{l}{\lambda}} = \varrho \cdot e^{-\alpha \varphi},$$

$$(32) \quad -\alpha = \varrho'' \cdot e^{-\alpha \varphi''},$$

d. h. nach Bedeutung des α gemäss (21):

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 2 \pi \varphi = \frac{2 \pi \zeta \frac{l}{\lambda}}{1 - \gamma \zeta \frac{l}{\lambda}}, \\ \varrho^2 \cdot e^{2 \gamma \varphi} = \frac{1}{\left(1 - \gamma \zeta \frac{l}{\lambda}\right)^2 + \left(2 \pi \zeta \frac{l}{\lambda}\right)^2}, \\ \operatorname{tg} 2 \pi \varphi'' = \frac{2 \pi}{\gamma}, \\ \varrho''^2 \cdot e^{2 \gamma \varphi''} = \gamma^2 + 4 \pi^2. \end{array} \right.$$

Dann wird (28) zu:

$$(34) \quad A_r \cdot e^{\alpha A} = -A \varrho \cdot e^{-\alpha \left(\varphi + 2 \frac{b}{\lambda}\right)},$$

woraus folgt

$$(34') \quad A_r = -A \varrho, \quad A = -2 \frac{b}{\lambda} - \varphi;$$

während (29) wird zu:

$$(35) \quad A'' \cdot e^{\alpha A''} = -A \varrho \varrho'' \zeta \frac{l}{\lambda} e^{-\alpha (\varphi + \varphi'')},$$

woraus folgt

$$(35') \quad A'' = -A \varrho \varrho'' \zeta \frac{l}{\lambda}, \quad A'' = -\varphi - \varphi''.$$

Aus (33) folgt, dass $\varrho \cdot e^{\gamma \varphi} < 1$ ist, falls $\gamma < 2 \pi^2 \zeta (l/\lambda)$ ist. Da γ wohl stets kleiner als 0,5 ist (bei meinen Experimenten war es 0,15, vgl. unten), so ist diese Relation bei nicht zu

kleinen Brückenlängen l erfüllt. Aus (34) ergibt sich, dass durch $\rho \cdot e^{i\varphi}$ das Verhältniss der Amplituden der einfallenden und reflectirten Welle gemessen wird. *Die Amplitude der reflectirten Welle ist daher kleiner als die der einfallenden Welle, und zwar um so mehr, je länger die Brücke ist.*

Aus (35') folgt, dass die Amplitude A'' der über die Brücke weiter gehenden Welle mit der Länge l der Brücke beständig wächst, und dass sie für kurze Brückenlängen l dieser Länge l proportional ist. — Auf diese Thatsache bin ich zunächst durch das Experiment aufmerksam geworden und habe sie an früherer¹⁾ Stelle hervorgehoben.

Bei kurzen Brücken ist φ sehr klein. φ'' ist nach (33) nahezu $\frac{1}{4}$, da γ meist klein gegen 2π ist. Daher folgt aus (35'), dass die Phase der weiter gehenden Welle um fast $\pi/2$ von der der einfallenden Welle verschieden ist.

Was die Phase der reflectirten Welle anbelangt, so kann man sich eine anschauliche Vorstellung von ihr machen, wenn man die Wirkung der thatsächlich vorhandenen Brücke B von der endlichen Länge l auf die Phase der reflectirten Wellen ersetzt denkt durch die Wirkung einer idealen Brücke der Länge $l = 0$, welche nicht an der Stelle $z = b$, sondern an einer anderen Stelle $z = b'$ liegen müsste. Diese Brücke würde die Wellen einfach mit Umkehr ihrer Amplitude reflectiren, und (nach p. 8) die Phase

$$\Delta = -2b' : \lambda$$

hervorbringen. Identificirt man dieses Δ mit dem nach (34') durch die wirkliche Brücke hervorgebrachten Δ , so müsste also sein:

$$-\frac{2b'}{\lambda} = -\frac{2b}{\lambda} - \varphi,$$

oder

$$(36) \quad b' - b = \varphi \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Diese Differenz $b' - b$ habe ich in den eingangs citirten experimentellen Arbeiten die *Bügelverkürzung* oder *Brückenverkürzung* genannt. Nach (36) ist sie stets positiv, d. h. die ideale Brücke würde stets hinter der wirklichen liegen.

1) P. Drude, Wied. Ann. 54. p. 360. 1895; Ber. der sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse, Mai 1895. p. 333; Wied. Ann. 55. p. 637. 1895; Arbeit I, p. 14.

Für kurze Brücken, bei denen es gestattet ist, $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$ zu setzen, ist nach (33) und (36)

$$(37) \quad b' - b = \frac{1}{2} l \cdot \zeta,$$

d. h. die Brückenverkürzung ist der Brückenlänge proportional und wächst langsam mit der Wellenlänge der Schwingung (da nach (11) ζ den Summand $\log \lambda$ enthält). — Diese Sätze werden durch die Erfahrung bestätigt. Für verhältnissmässig kurze Wellen ($\lambda = 75$ cm) habe ich gefunden¹⁾, dass die Brückenverkürzung bei $l = 1,8$ cm etwa 8 mm betrug, d. h. ζ ist ein wenig kleiner als 1. — Für sehr viel längere Wellen ($\lambda = 4$ m bis 12 m) fanden Cohn und Zeemann²⁾ bei $l = 7$ cm $b' - b = 4,5$ cm, d. h. ζ ist dann grösser als 1. — *Roh geschätzt wird die Bügelverkürzung (bei Drahtwellen in Luft) die halbe Brückenlänge betragen.*

Wenn, wie es meist der Fall ist, γ klein gegen 2π ist, so folgt aus (33), dass das Amplitudenverhältniss $\varrho \cdot e^{\gamma\varphi}$ der einfallenden und reflectirten Welle nur um zweite Ordnung von 1 verschieden ist, wenn die Bügelverkürzung von erster Ordnung klein ist. Wenn also $(2\pi\zeta(l/\lambda))^2$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, wie es meist nahezu der Fall ist, so kann die Brückenverkürzung merklich sein, die Schwächung bei der Reflexion aber unmerklich.

Nach (33) kann die Amplitudenschwächung durch Reflexion $\varrho \cdot e^{\gamma\varphi}$ ausgedrückt werden durch die Brückenverkürzung $b' - b = \delta b$. Benutzt man die Formel (37), d. h. setzt man l sehr klein voraus und vernachlässigt man γ gegen $2\pi^2\zeta(l/\lambda)$, so wird nach (33)

$$\varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} = \frac{1}{1 + \left(4\pi \frac{\delta b}{\lambda}\right)^2}.$$

Da ich bei einer Brückenlänge von 1,8 cm 8 mm Bügelverkürzung beobachtete bei $\lambda = 75$ cm, so würde folgen:

$$\varrho^2 \cdot e^{2\gamma\varphi} = \frac{1}{1,018}, \text{ d. h. } \varrho \cdot e^{\gamma\varphi} = 1 - 0,009.$$

Für 6 cm Bügellänge würde folgen $\varrho \cdot e^{\gamma\varphi} = 0,91$.

1) „Arbeit I“ p. 31. Der Drahtabstand d betrug 1,8 cm, $R = \frac{1}{2}$ mm.

2) E. Cohn u. P. Zeemann, Königl. Akad. der Wissensch. zu Amsterdam, Sept. 1895. Der Drahtabstand d betrug 7 cm.

Ebenso drückt sich nach (35) die Amplitude der weitergehenden Welle durch δb aus. Sie ist

$$\frac{4\pi \frac{\delta b}{\lambda}}{1 + \left(4\pi \frac{\delta b}{\lambda}\right)^2}.$$

Für $l = 1,8$ cm ergibt sie sich zu 0,132; für $l = 6$ cm zu 0,372, wobei die Amplitude der einfallenden Welle = 1 gesetzt ist.

3. Vorhandensein zweier Brücken.

Es soll jetzt der Fall näher betrachtet werden, wie er experimentell vorliegt, wenn man die Wellenlänge der electrischen Schwingungen bestimmen will, welche in dem Drahtsystem durch irgend einen Erreger einer schnell oscillirenden electrischen Kraft (einerlei, ob es Lecher'scher oder Blondlot'scher Erreger ist) hervorgerufen werden. Der Erreger befindet sich vor einer festliegenden Brücke B_1 , die bei $z = 0$ auf den Drähten liegt; dahinter wird eine Brücke B_2 verschoben, deren Entfernung von B_1 mit $z = b = \beta \lambda$ bezeichnet werden soll; jenseits B_2 sollen die Paralleldrähte ins Unendliche verlaufen. Es handelt sich um die Bestimmung der Stromstärke i und scheinbaren Ladung e in einem beliebigen Punkte β , welcher zwischen beiden Brücken liegen soll. Seine Entfernung von $z = 0$ sei $z = p \cdot \lambda$.

Knüpfen wir die Rechnung nur an die scheinbare Ladung e der Drähte an. Die Stromstärke i ergibt sich gemäss der Gleichung (5).

Von e hängt die Wirkung der Wellen auf die Lichterscheinung in einer über die Drähte gelegten Vacuumröhre ab; ebenso, wenn die Röhre zwei, durch einen (als Resonator wirkenden) Draht verbundene Electroden hat, falls die Ebene dieses Drahtes senkrecht zu den Paralleldrähten steht.¹⁾ Wie eine ausführlichere Analyse²⁾ ergibt, hängt nämlich dann die Leuchtwirkung von der electrischen Kraft P im Luftraume zwischen den Drähten ab, und P ist zu e proportional (da es

1) Vgl. Fig. 3 in Ber. der sächs. Ges. math.-phys. Kl. 1895, p. 339; Wied. Ann. 55. p. 643. 1895.

2) P. Drude, Wied. Ann. 53. p. 721. 1894.

durch Differentiation des Potentials V (Formel 3) entsteht).
— Wir wollen jetzt einfach P für e schreiben.

Es möge nun von der Zeit $t = 0$ an durch den Erreger über die erste Brücke B_1 die Welle

$$(38) \quad P_0 = e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}$$

herübergesandt werden.¹⁾ Diese erreicht den Punkt $\mathfrak{P}$ ($z = p\lambda$) zur Zeit $t = pT$. Zur Zeit $t = \beta T$ wird die Welle an der Brücke B_2 reflectirt und nimmt den Werth an:

$$P_1 = r \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)},$$

wobei r kurz als *Reflexionsfactor* der Brücke B_2 bezeichnet sein möge und nach (25) und (34) eine Abkürzung ist für:

$$(39) \quad r = A_r \cdot e^{\alpha A} = -\rho \cdot e^{-\alpha(\varphi + 2\beta)}$$

(da hier $A = 1$ gesetzt ist).

Zur Zeit $t = 2\beta T$ wird diese Welle an der Brücke B_1 reflectirt und erhält den Werth

$$P_2 = r r' \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)},$$

wobei der Reflexionsfactor r' der Brücke B_1 gemäss (34) ist:

$$(40) \quad r' = -\rho \cdot e^{-\alpha\varphi}.$$

Der Werth der gesammten electricischen Kraft P im Punkte $\mathfrak{P}$ zur beliebigen Zeit t setzt sich nun zusammen aus der einfallenden electricischen Kraft P_0 und den successive reflectirten P_1, P_2 etc., wobei alle diejenigen reflectirten Wellen zu berücksichtigen sind, welche zur Zeit t den Punkt $\mathfrak{P}$ schon erreicht haben. — Eine einfache Summation, deren Detail in den „Abhandlungen“ enthalten ist, liefert nun, falls h eine beliebige positive ganze Zahl (oder Null) bedeutet, für die electricische Kraft im Punkte $\mathfrak{P}$:

1) Die Amplitude wird also gleich 1 gesetzt. — In Wirklichkeit wird der zeitliche Verlauf von P complicirter sein. Jedoch wird P um so eher obiges Gesetz befolgen, je näher B_1 nach dem Erreger zu liegt. Bei den Experimenten war B_1 etwa nur $\frac{1}{8}$ Wellenlänge vom Erreger entfernt.

Für $2h\beta + p < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta - p$:

$$(41) \quad P_I = \frac{e^{\alpha \frac{t}{T}}}{r r' - 1} \{ e^{-\alpha p} [(r r')^{h+1} - 1] + r \cdot e^{+\alpha p} [(r r')^h - 1] \},$$

für $2(h+1)\beta - p < \frac{t}{T} < 2(h+1)\beta + p$:

$$(42) \quad P_{II} = \frac{e^{\alpha \frac{t}{T}}}{r r' - 1} [e^{-\alpha p} + r \cdot e^{+\alpha p}] [(r r')^{h+1} - 1].$$

Es sind an P die Indices I und II angehängt, um die für beide Zeitintervalle formal verschieden gestalteten P kurz im Folgenden unterscheiden zu können.

Nach (39) und (40) ist nun

$$(43) \quad r r' = \varrho^2 \cdot e^{-2\alpha(\varphi + \beta)} = \varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi + \beta)} \cdot e^{4\pi(\varphi + \beta)} V^{-1}.$$

Der gemeinsame Nenner von P_I und P_{II} , d. h. der Modul der complexen Grösse $r r' - 1$, wird möglichst klein, wenn

$$e^{-4\pi(\varphi + \beta)} V^{-1} = +1$$

ist, d. h. wenn ist

$$(44) \quad \varphi + \beta = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \text{ etc.}$$

Für diese Werthe von β , d. h. für diese Lagen der Brücke B_2 , werden P_I und P_{II} möglichst gross, *es sind die Knotenlagen des Bügels B_2* . Man erkennt leicht, dass in diesen Knotenlagen durch die beiden Brücken B_1 und B_2 eine geschlossene Drahtleitung abgegrenzt wird, deren Eigenschwingungsdauern den Werth T entweder als Grundton oder als Oberton besitzen. In den Knotenlagen der Brücke B_2 findet also *Resonanz* des abgegrenzten Theiles der Paralleldrähte mit dem Erreger statt.

Führt man die Entfernung $b = \beta \lambda$ des Bügels B_2 vom Bügel B_1 ein, so ist für den ersten Knoten $b_1 = (\lambda/2) - \lambda \varphi$; die anderen Knoten folgen im Intervall $\frac{1}{2} \lambda$ vom ersten Knoten.

Da nach (36) $\lambda \varphi$ gleich der doppelten Brückenverkürzung ist, *so liegt die erste Knotenlage der Brücke B_2 um die doppelte Brückenverkürzung näher als $\frac{1}{2} \lambda$ an die Brücke B_1 heran.*

P_I und P_{II} werden Minima für

$$e^{-4\pi(\varphi + \beta)} V^{-1} = -1,$$

d. h. für

$$(45) \quad \varphi + \beta = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \text{ etc.}$$

Hierdurch sind die *Bauchlagen* des Bügels B_2 bestimmt. Sie liegen mitten zwischen den *Knotenlagen*.

Es sollen nun näher die maximalen Werthe, welche die electrische Kraft im Laufe der Zeit sowohl in einer *Knotenlage* wie in einer *Bauchlage* der Brücke B_2 annimmt, verfolgt werden. Sie mögen kurz die *Knotenstärke* bez. *Bauchstärke* genannt werden. Wir wollen sie für einen Punkt $\mathfrak{P}$ berechnen, dessen Entfernung von der ersten Brücke B_1 gegeben ist durch

$$p \lambda = \frac{1}{4} \lambda - \frac{\lambda \varphi}{2},$$

der also gerade in der Mitte zwischen B_1 und der ersten *Knotenlage* von B_2 liegt. Für ihn ist P ein Maximum (hinsichtlich p), dort war auch der Ort der Vacuumröhre bei den Experimenten.

In den *Knoten-* und *Bauchlagen* von B_2 ist $r r'$ eine reelle Grösse, nämlich:

$$r r' = \pm \varrho^2 \cdot e^{2\gamma(\varphi + \beta)}.$$

Dadurch, und durch die specielle Wahl des p können in den Formeln (41) und (42) leicht die reellen und imaginären Bestandtheile getrennt werden. Man erhält das Maximum der electrischen Kraft P für eine Zeit, die dem aus der Gleichung $(\partial P / \partial h) = 0$ folgenden Werthe von h entspricht. Dieses h und die ihm entsprechende Zeit t ist um so grösser, je vollständiger die Brückenreflexion ist, d. h. je mehr sich $\varrho \cdot e^{\gamma \varphi}$ dem Werthe 1 nähert. Da nach p. 11 diese Näherung bei den speciellen Bedingungen des Versuches, d. h. überhaupt bei kurzen Brückenlängen, in hohem Maasse vorhanden ist, so erhält man schon gute Näherungswerthe für die P_I und P_{II} , wenn man in (41) und (42) $\varrho \cdot e^{\gamma \varphi} = 1$ und dementsprechend für die Maxima von P_I und P_{II} $h = \infty$ setzt. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass die P_I grössere Maxima annehmen, als die P_{II} , sowohl in der *Knoten-* wie *Bauchlage* der Brücke B_2 , und dass schliesslich wird:

Die *Knotenstärke*:

$$(46) \quad K = \left(1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}\right) \frac{e^{2\gamma\beta}}{e^{2\gamma\beta} - 1},$$

die *Bauchstärke*:

$$(47) \quad B = 1 + e^{-\frac{\gamma}{2}} - e^{-2\gamma\beta}.$$

In (46) ist für β einer der Werthe (44) einzusetzen, in (47) einer der Werthe (45). Da bei kurzen Brückenlängen φ sehr klein ist, so ist bei diesen näherungsweise gestattet, nach (44) für den k ten Knoten zu setzen:

$2\beta = k$, d. h. nach (46):

$$(48) \quad K_k = \frac{1 + e^{-\frac{\gamma}{2}}}{1 - e^{-k\gamma}},$$

nach (45) für den k ten Bauch:

$2\beta = k + \frac{1}{2}$, d. h. nach (47):

$$(49) \quad B_k = 1 + e^{-\frac{\gamma}{2}} (1 - e^{-k\gamma}).$$

Ob die in § aufgestellte Vacuumröhre nicht leuchtet, wird davon abhängen, dass die Bauchstärke B einen gewissen Betrag, der gerade zum Einsetzen des Leuchtens der Röhre genügt, nicht überschreitet.

Aus den Formeln (48) und (49) ergibt sich, dass mit wachsendem k sowohl K_k als B_k sich dem gemeinsamen Grenzwert $1 + e^{-\gamma/2}$ nähert, und zwar um so schneller, je grösser die zeitliche Dämpfung γ ist. Je grösser γ ist, um so weniger Knoten und Bäuche kann man daher durch verschieden starkes Leuchten der Vacuumröhre bei Verschieben der Brücke B_2 nachweisen. Man kann die zeitliche Dämpfung γ aus der Anzahl $\bar{k}$ der beobachteten Knoten und Bäuche berechnen, wenn die Empfindlichkeit des Wellenindicators (der Vacuumröhre) bekannt ist.

Wir wollen annehmen, dass der $\bar{k}$ te Knoten gerade noch vom $\bar{k}$ ten Bauch experimentell zu unterscheiden ist, wenn:

$$K_{\bar{k}} : B_{\bar{k}} = 1 + \nu.$$

ν ist ein Maass für die Empfindlichkeit des Wellenindicators. Aus (48) und (49) ergibt sich nun bei Vernachlässigung von ν^2 gegen 1 und von $\gamma/4$ gegen 3:

$$(50) \quad \gamma = \frac{-\log \text{nat } \frac{4}{3} \nu}{\bar{k}}.$$

Da sich hiernach γ nur wenig mit ν ändert, so braucht man ν nur zu taxiren, um γ ungefähr zu berechnen.

Bei der Versuchsanordnung, wie ich sie in den Arbeiten I und II gewählt habe, war $\bar{k} = 31$, wenn eine auf Resonanz abgestimmte Zehnder'sche Röhre als Wellenindicator benutzt wurde. Dann folgt aus (50):

ν	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10
γ	0,16	0,14	0,13	0,12	0,12	0,09

Die Empfindlichkeit ν der Zehnder'schen Röhre liegt sicher zwischen 1 Proc. und 10 Proc.¹⁾ γ lag daher zwischen 0,16 und 0,09.

Es mag hervorgehoben werden, dass diese Betrachtungen zur Berechnung von γ aus $\bar{k}$ nicht ganz streng sind, weil Totalreflexion der Brücken angenommen ist und der galvanische Widerstand der die Wellen führenden Paralleldrähte gleich Null angenommen ist. Letzterer ist aber zu berücksichtigen, wenn die von den Wellen durchlaufenen Distanzen gross werden, d. h. bei grossem β oder grossem k . Der galvanische Widerstand der Drähte bewirkt eine örtliche Dämpfung (Absorption) der Wellen, der zufolge die Anzahl $\bar{k}$ der beobachtbaren Knoten und Bäuche eine endliche sein würde, selbst wenn die zeitliche Dämpfung γ gleich Null wäre. Diese Punkte sollen weiter unten berücksichtigt werden. Zunächst mögen noch zwei andere Dinge besprochen werden.

4. Einfluss des Wellenindicators.

In den bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, dass der Wellenindicator (die Vacuumröhre) die Wellen gar nicht störe. Streng genommen kann das nie der Fall sein, denn ein geringer Theil der Energie der Wellen geht nothwendig auf den Indicator über, wenigstens wenn man nicht gerade, wie in den Bauchlagen der Brücke B_2 , das Fehlen der Wellenanzeige benutzen will. Bei den Wellenindicatoren, welche, wie die hier angewandte Zehnder'sche Röhre (ebenso ein angelegtes Electrometer oder Bolometer mit Rubens'schen Flaschen) auf die electriche Kraft ansprechen, äussert sich ihr Einfluss dadurch, dass an der Stelle ihres Anlegens eine gewisse Capacität an die Paralleldrähte geschaltet ist. Man

1) Weiter unten (II, 5) ist eine experimentelle Methode zur Bestimmung von ν angegeben. Aus ihr folgt $\nu = 0,08$.

kann den Einfluss einer solchen berechnen. Die Capacität bewirkt, dass die erste Knotenlage der Brücke B_2 noch näher an die feste Brücke B_1 heranrückt. Durch eine solche Beobachtung hat man daher ein Mittel, die Grösse der Beeinflussung der Wellen durch den Wellenindicator festzustellen. Bei der als Resonator gebrauchten Zehnder'schen Röhre, welche mit allen Theilen um mindestens mehrere Millimeter von den Paralleldrähten entfernt war, war dieser Einfluss sehr gering, die Entfernung der ersten Knotenlage der Brücke B_2 von der Brücke B_1 war nahezu gleich $\frac{1}{2}\lambda$, vermindert um die doppelte Brückenverkürzung. Im Folgenden ist daher eine etwaige Beeinflussung der Wellen durch den Indicator nicht weiter berücksichtigt. — Es ist eben beim Gebrauch einer Vacuumröhre sehr günstig, dass die Leuchterscheinung wenig Energie verbraucht; bei Anwendung eines, selbst möglichst klein construirten Electrometers ist eine viel grössere Capacität an die Drähte angelegt und die Beeinflussung der Wellen nicht zu vernachlässigen.

5. Oberschwingungen des Erregers.

Es ist eine oft discutirte Streitfrage, ob ein Hertz'scher Erreger Wellen von einheitlicher Periode aussendet oder nicht. Letzteres glaubten Sarasin und de la Rive¹⁾ annehmen zu müssen, um die Erscheinung der multiplen Resonanz zu erklären, d. h. des Umstandes, dass verschiedene Resonatoren, die von demselben Erreger erregt werden, Schwingungsdauern aufweisen, welche sich fast nur nach den Abmessungen des jeweiligen Resonators richten, während Poincaré²⁾ und Bjerkness³⁾ darauf hingewiesen haben, dass die Erscheinung der multiplen Resonanz erklärt werden kann durch die Annahme, dass der Erreger eine Schwingung von einheitlicher Periode entsendet, die aber viel stärker gedämpft ist, als die Resonatorschwingung. In der That kann man ja auch mit Hülfe der Darstellung durch eine Fourier'sche Reihe eine Schwingung der Form $e^{-\gamma(t/T)} \cos 2\pi t/T$ als eine Super-

1) Sarasin et de la Rive, Arch. de Genève (3) **23**. p. 113. 1890.

2) H. Poincaré, Arch. de Genève (3) **25**. p. 609. 1891; Electricität und Optik, deutsch von Jäger u. Gumlich. 2. Note V. p. 201. Berlin 1891.

3) V. Bjerkness, Wied. Ann. **44**. p. 92. 1891; **54**. p. 58. 1895.

position von ungedämpften Schwingungen continuirlich verschiedener Perioden und Amplituden auffassen. — Durch die von mir ausgeführten Versuche¹⁾ lässt sich nun, wie ich glaube, die Poincaré-Bjerkness'sche Ansicht dahin ergänzen²⁾, dass der Erreger zwar nicht continuirlich verschiedene Perioden entsendet, *aber wohl eine Reihe harmonischer Obertöne besitzt*, sodass seine Schwingung mathematisch darstellbar ist als:

$$P = A_1 \cdot e^{-\gamma \frac{t}{T}} \cos 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \cdot e^{-2\gamma' \frac{t}{T}} \cos 2\pi \left(\frac{2t}{T} + \delta \right) \\ + A_3 \cdot e^{-3\gamma'' \frac{t}{T}} \cos 2\pi \left(\frac{3t}{T} + \delta'' \right) + \dots$$

Denn wenn der Wellenindicator³⁾ um $\frac{1}{8}\lambda$ hinter der festen Brücke B_1 angebracht wurde, so zeigte die Brücke B_2 Knotenlagen nahezu bei $2\beta = \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots$; falls der Wellenindicator bei $\frac{1}{12}\lambda$ hinter B_1 angebracht wurde, so waren die Knotenlagen von B_2 : $2\beta = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$. Dies wäre nicht möglich, wenn der Erreger nur gedämpfte Schwingungen der Periode T entsendet. Er *muss auch Schwingungen der Periode $\frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T$ entsenden*. Diese Schwingungen nehmen bei der von mir gewählten Form des Erregers sehr schnell an Intensität ab, sie lassen sich nur durch Zuhülfenahme längerer⁴⁾ Brücken B_1 beobachten und über die zweite Oberschwingung hinaus habe ich bisher nicht beobachten können. Deshalb brauchen sie bei unseren Betrachtungen nicht weiter berücksichtigt zu werden, zumal noch der günstige Umstand hinzukommt, dass bei der gewählten Lage des Wellenindicators ($\frac{1}{4}\lambda$ hinter B_1) der erste Oberton gar nicht auf den Indicator wirken kann, da für ihn der Indicator in einem Knoten electricischer Kraft liegt.

1) P. Drude, Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Kl. p. 332. 1895; Wied. Ann. 55. p. 636. 1895; „Arbeit I“. p. 13.

2) Diese Ergänzung ist von Bjerkness selbst in Wied. Ann. 54. p. 61. 1895 als möglich hingestellt.

3) Er wurde als Vacuumröhre ohne Resonanz verwendet.

4) Aus dem oben p. 10 erörterten Grunde wird die Intensität grösser, je länger die Brücke B_1 ist.

B. Berücksichtigung des Leitungswiderstandes der Drähte.

Den Ausgangspunkt bildet die Gleichung (6) auf p. 4, in welcher für w der Widerstand der Längeneinheit der Drähte einzusetzen ist. Dabei ist zu berücksichtigen, dass derselbe für schnelle Schwingungen höher ist, als für constante Ströme, da sich erstere vorzugsweise nach der Oberfläche des Drahtes zusammendrängen. Nach den Entwicklungen von Rayleigh¹⁾ und Stefan²⁾ ist

$$(51) \quad w = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{1}{\sigma T}}$$

für einen sehr schnellen Wechselstrom der Periode T . Dabei bedeutet R den Radius des Drahtes, d. h. seine halbe Dicke, σ seine spezifische Leitfähigkeit, gemessen nach absolutem electromagnetischen Maasse. ($\sigma = 1,063 \cdot 10^{-5}$ für Quecksilber).

Setzt man daher

$$\frac{1}{2R \log \frac{d}{R} \sqrt{\sigma T}} = \psi,$$

so wird die Differentialgleichung (6):

$$(52) \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial i}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}.$$

Das Integral derselben lautet für periodische gedämpfte Schwingungen, d. h. wenn

$$(53) \quad i = e^{\alpha \frac{t}{T}} f(z):$$

$$i = A_1 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}} + A_2 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}},$$

wobei $\lambda = c T$, $\alpha'^2 = \alpha^2 + \psi \alpha T$ ist.

α' ist also bestimmt durch

$$(54) \quad \alpha' = \alpha \sqrt{1 + \frac{\psi T}{\alpha}}.$$

Nun ist zu berücksichtigen, dass der Modul der complexen Grösse $\psi T : \alpha$ klein gegen 1 ist. So ist z. B. bei den von mir angestellten Versuchen, die mit Kupferdrähten ($\sigma = 60 \cdot 10^{-5}$)

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 21. p. 369. 1886.

2) J. Stefan, Wied. Ann. 41. p. 421. 1890. Vgl. auch das Buch „Physik des Aethers“ vom Verf. p. 244. 388.

von $R = \frac{1}{2}$ mm und der Distanz $d = 1,8$ cm bei $\lambda = 75$ cm, d. h. $T = 25 \cdot 10^{-10}$ angestellt sind:

$$\psi T = 0,0057.$$

Das Quadrat dieser Grösse ist sehr klein gegen den Modul von α , d. h. $\gamma^2 + 4\pi^2$. Man kann daher (54) schreiben als

$$(55) \quad \alpha' = \alpha + \frac{\psi T}{2} = \alpha + \tau.$$

Daher ist das Integral von (52):

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} i = A_1 \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)} \cdot e^{-\tau \frac{z}{\lambda}} + A_2 \cdot e^{\alpha \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right)} \cdot e^{+\tau \frac{z}{\lambda}}, \\ \text{wobei ist:} \end{array} \right. \quad \tau = \frac{\sqrt{T}}{4 R \log \frac{d}{R} \sqrt{\sigma}}.$$

Für meine Versuche ist $\tau = 0,00285$. Der erste Term in (56) entspricht Wellen, die sich nach der positiven z-Axe fortpflanzen, der zweite Wellen, die sich nach der negativen z-Axe fortpflanzen. Man erkennt aus (56), dass die Wellen einer örtlichen Dämpfung (Absorption) unterliegen, die zu τ proportional ist. Dies ist der einzige Einfluss des galvanischen Widerstandes der Drähte, die Wellenlänge λ bleibt von ihm unbeeinflusst, solange der Widerstand so gering ist, d. h. die Drähte eine so hohe spezifische Leitfähigkeit besitzen, dass τ klein ist gegen α . Bei allen Versuchen, bei denen schnelle Schwingungen in Kupferdrähten fortgeleitet werden, ist diese Bedingung erfüllt. — Man erkennt zugleich aus (54), dass für wesentliche grössere Drahtwiderstände, bei denen

$$\sqrt{1 + \frac{\psi T}{\alpha}}$$

nicht gleich

$$1 + \frac{\psi T}{2\alpha}$$

zu setzen ist, α' sich auch im imaginären Bestandtheil von α unterscheiden würde. Dies würde aber eine Aenderung der Wellenlänge der Schwingungen bedeuten, und zwar würde, wie eine nähere einfache Untersuchung ergibt, die Wellenlänge durch Vorhandensein eines starken galvanischen Drahtwiderstandes verkleinert.

Wir müssen jetzt unsere bisherigen Rechnungen einer Revision unterwerfen, inwieweit sie durch die Existenz des Widerstandes, d. h. der Grösse τ , modificirt werden. Es sollen aber hier nur die Resultate mitgetheilt werden, betreffs ihrer Ableitung verweise ich auf den ausführlichen Aufsatz in den Abhandlungen der Sächsischen Gesellschaft.

Zunächst ändert sich die frühere Formel (34) p. 9, welche den Reflexionsfactor r einer Brücke ergiebt, nur dadurch, dass die dort auftretende Grösse b anstatt mit α mit α' multiplicirt auftritt. Dadurch erleiden die oben p. 10 ausgesprochenen Sätze über die Amplituden und Phasen der reflectirten und übergehenden Welle keinerlei Aenderung.

Ebensowenig ändern sich natürlich (da λ unbeeinflusst bleibt) die früheren Sätze über die Lage der Knoten und Bäuche der Brücke B_2 .

Die strengen Formeln für die Stärke der Knoten und Bäuche sind wesentlich complicirter, als die früheren Formeln (46) und (47). Sie werden am bequemsten durch gewisse Recursionsformeln berechnet. Der Unterschied des Resultates der Näherungsformeln (48), (49) gegenüber dem Resultat der strengen Formeln liegt darin, dass bei gleichem γ und k das Verhältniss $K_k : B_k$ nach ersteren etwas grösser ausfällt, als nach letzteren. Die frühere Formel (50) ist dementsprechend so zu corrigiren, dass γ etwas kleiner ist, als es dem aus ν und $\bar{k}$ nach (50) zu berechnendem Werthe entspricht. Diese Correction ist aber immer sehr gering, z. B. bei meiner Versuchsanordnung für $\nu = 5$ Proc. = 0,05 und $\bar{k} = 31$ ist $\gamma = 0,10$ anstatt 0,12, welcher letzterer Werth in der Tabelle oben p. 17 angegeben ist. Zur Schätzung von γ ist also obige Näherungsformel (50) gut brauchbar.

Der galvanische Widerstand der Drahtleitungen spielt also in den praktischen Fällen nur eine sehr nebensächliche Rolle. *Falls möglichst viel Knoten und Bäuche beobachtbar sein sollen, kommt es also wesentlich nun auf kleine zeitliche Dämpfung der Wellen und kurze Brückenlängen* (wegen ihrer vollständigeren Reflexion) an.

II. Wellen in Drähten, die theilweise von leitenden Körpern umgeben sind.

A. Der umgebende Körper verhält sich normal.

1. Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen.

Es soll der Fall betrachtet werden, dass die die Wellen führenden Paralleldrähte in einer Umgebung eingebettet sind, welche von Luft verschieden ist, d. h. welche eine von 1 verschiedene Dielectricitätsconstante ϵ und ein von Null verschiedenes Leitungsvermögen σ besitzt. Unter letzterem möge das electromagnetisch gemessene Leitungsvermögen für constante Ströme verstanden sein, und es soll vorausgesetzt werden, dass der die Drähte umgebende Körper (z. B. Wasser, wässrige Salzlösung) sich auch für die betrachteten electrischen Störungen kurzer Periode normal verhält, d. h. dass sein Verhalten gegenüber diesen Störungen vollkommen durch die Constanten ϵ und σ definirt ist, wie sie für stationäre oder sehr langsam wechselnde Ströme maassgebend sind. Es sollen also die Fälle zunächst ausgeschlossen sein, dass die Umgebung *Dispersionerscheinungen* aufweist, denn diese hängen von besonderen Eigenschaften der Körper ab, d. h. von mehr Constanten, als nur von ϵ und σ .

Die Aufstellung der Differentialgleichungen kann wieder auf zwei Wegen geschehen, die zu gleichem Resultat führen, nämlich durch Anknüpfung an die Vorgänge entweder in den Drähten oder in dem die Drähte umgebenden Körper. Für ersteren Weg ist die oben gegangene, zuerst von Kirchhoff betretene Methode, im wesentlichen nur darin zu ergänzen, dass der Stromverlust in den Drähten nicht nur durch scheinbare Ladungsänderungen der Drähte (Verschiebungsströme in ihrer Umgebung), sondern auch durch Leitungsströme ihrer Umgebung compensirt wird. Für letzteren Weg sind die Maxwell'schen Differentialgleichungen des electromagnetischen Feldes in einem Körper, welcher der Sitz sowohl von Verschiebungs-, wie Leitungsströmen sein kann, mit Rücksicht auf die eingelagerten Metalldrähte zu integriren. Dieses macht, nach der Hertz'schen Vorzeichnung des Weges für vollkommene Isolatoren, nicht die geringste Schwierigkeit.

Um im Anschlusse an unsere obigen Entwicklungen zu bleiben, möge der erste Weg hier gegangen werden. Die frühere Gleichung (1):

$$(1) \quad iw = E_1 + E_2,$$

bleibt bestehen mit derselben Bedeutung der Buchstaben. Ebenso die frühere Gleichung (2):

$$(2) \quad E_1 = -2 \log \frac{d}{R} \cdot \frac{\partial i}{\partial t},$$

denn die Selbstinduction in den Drähten bleibt dieselbe, solange die Magnetisirungsconstante ihrer Umgebung denselben Werth besitzt. Letzteres soll vorausgesetzt werden; es ist ja auch kein Körper mit mässig grossem Leitvermögen σ bekannt, welcher eine merklich von 1 verschiedene Magnetisirungsconstante besitzt.

Dagegen ändert sich die frühere Gleichung (3) durch das Vorhandensein der von 1 verschiedenen Dielectricitätsconstante ϵ in

$$(3') \quad V = \frac{1}{\epsilon} \cdot 2 \log \frac{d}{R} \cdot e.$$

Die Gleichung (4) wird so:

$$(4') \quad E_2 = -c \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{c}{\epsilon} 2 \log \frac{d}{R} \cdot \frac{\partial e}{\partial x}.$$

Eine wesentliche Aenderung ist an der Gleichung (5) anzubringen. $-\partial i / \partial z$ bedeutet den Stromverlust in dem einen Paralleldrahte pro Längeneinheit. Derselbe wird theilweise compensirt durch den Verschiebungsstrom pro Längeneinheit: $(1/c)(\partial e / \partial t)$, theilweise durch den aus der Längeneinheit des Drahtes in seine Umgebung abfliessenden Leitungsstrom i_u , sodass an Stelle von (5) entsteht:

$$(5) \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + i_u.$$

Der Leitungsstrom i_u fiesst in Richtung der aus dem Drahte austretenden electricischen Kraftlinien. Diese stehen bei der grossen metallischen Leitfähigkeit des Drahtes senkrecht¹⁾ zu seiner Oberfläche und verlaufen in der Nähe eines Drahtes in Richtung der zur Drahtaxe (z -Axe) senkrechten Radienvectoren

1) Vgl. des Verf. „Physik des Aethers“, p. 449. Stuttgart 1894.

ρ ¹⁾, falls der andere Paralleldraht dem betrachteten Drahte nicht zu nahe kommt (d. h. falls die Distanz d der Drähte gross gegen ihren Radius R ist). Bezeichnet man die Stromdichte des Leitungsstromes i_u mit j , so ist nach dem Ohm'schen Gesetze

$$j = -\sigma \cdot c \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho},$$

denn $-c \partial V / \partial \rho$ ist die electromagnetisch gemessene, in Richtung von ρ wirkende, electromotorische Kraft der Längeneinheit, σ die specifische Leitfähigkeit des umgebenden Körpers. Da nun im beliebigen Abstand ρ vom Drahte

$$V = \frac{1}{\epsilon} 2 \log \frac{d}{\rho} \cdot e$$

ist (vgl. Formel (3')), wo V für $\rho = R$ gebildet ist), so folgt

$$j = 2 \frac{\sigma c}{\epsilon} \frac{e}{\rho},$$

und die Stromstärke

$$i_u = 2 \pi \rho \cdot j = 4 \pi \frac{\sigma c}{\epsilon} e.$$

Gleichung (5') wird also:

$$(5'') \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial e}{\partial t} + 4 \pi c \frac{\sigma}{\epsilon} e.$$

Differenzirt man nun die Gleichung (1) nach z und setzt für E_1 und E_2 ihre Werthe nach (2) und (4'), ferner für $\partial i / \partial z$ seinen Werth nach (5''), so entsteht:

$$(6') \quad \frac{c^2}{\epsilon} \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + 4 \pi c^2 \frac{\sigma}{\epsilon} e \right) + \frac{w}{2 \log \frac{d}{R}} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + 4 \pi c^2 \frac{\sigma}{\epsilon} e \right).$$

Eine ebenso gebaute Differentialgleichung gilt für die Stromstärke i .

Zu derselben Differentialgleichung wäre man gelangt, wenn man an die Vorgänge in der Umgebung der Drähte anknüpfte. Wenn nämlich in einem Körper, welcher die Dielectricitätsconstante ϵ besitzt, auch eine merkbare Leitfähigkeit σ vorhanden ist, so ist der Effect des Hinzukommens von

1) Eine Verwechselung mit der oben p. 9 eingeführten Grösse ρ ist wohl nicht zu befürchten. Das hier gebrauchte ρ kommt später nicht wieder vor.

σ derselbe, als ob in den Differentialgleichungen des electromagnetischen Feldes des Körpers an Stelle der Operation: $\epsilon \partial / \partial t$ auftritt: $\epsilon \partial / \partial t + 4 \pi c^2 \sigma$.¹⁾ Der Widerstand w des Drahtes kann dann noch auf demselben Wege in der Differentialgleichung berücksichtigt werden, wie ich es früher²⁾ für einen vollkommenen Isolator durchgeführt habe.

An einer bestimmten, aber beliebig gelegenen Stelle der Drahtleitung sollen Störungen der Form auftreten:

$$e = A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T}},$$

wobei

$$\alpha = -\gamma + 2\pi\sqrt{-1}$$

ist. Im Folgenden empfiehlt es sich, an Stelle der Dämpfungsconstanten γ einzuführen:

$$\gamma' = \gamma : 2\pi.$$

Es ist dann

$$(57) \quad \alpha = 2\pi(-\gamma' + \sqrt{-1}).$$

Diesen Störungen entspricht ein Integral der Differentialgleichung (6'), welches in der Form geschrieben werden kann:

$$(58) \quad e = A_1 e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{x}{\lambda'} - 2\pi x \frac{z}{\lambda'}} + A_2 \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{x}{\lambda'} + 2\pi x \frac{z}{\lambda'}}.$$

Unter α' ist die oben p. 21 durch die Gleichung (55) definirte Grösse:

$$\alpha' = \alpha + \tau, \quad \tau = \frac{T \cdot w}{4 \log \frac{d}{R}} = \frac{\sqrt{T}}{4 R \log \frac{d}{R} \sqrt{\sigma'}}$$

verstanden. σ' bezeichnet die Leitfähigkeit des Drahtes (zum Unterschiede von σ , der Leitfähigkeit der Umgebung).

Die im Integrale (58) noch auftretenden Constanten λ' und κ bestimmen sich nach (6') durch die Gleichung:

$$\frac{c^2}{\epsilon} \left(\frac{\alpha + 2\pi\kappa + \tau}{\lambda'} \right)^2 = \left(\frac{\alpha^2}{T^2} + \frac{2\tau\alpha}{T^2} \right) \left(1 + 4\pi \frac{c^2 \sigma}{\epsilon \alpha} T' \right).$$

Bei der Kleinheit von τ (nach p. 21 ist für meine Versuche $\tau = 0,00285$) ist es gestattet, zu setzen

$$\alpha^2 + 2\tau\alpha = (\alpha + \tau)^2.$$

1) Vgl. Maxwell, Hertz, oder auch das Buch des Verf. „Physik des Aethers“, p. 548.

2) „Physik des Aethers“, p. 450.

Obige Gleichung wird dann:

$$(59) \quad \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\alpha + 2\pi x + \tau}{\lambda'} = \frac{\alpha + \tau}{T} \sqrt{1 + 4\pi \frac{c^2 \sigma}{\epsilon \alpha} T}.$$

Für $\sigma = 0$ würde hieraus folgen:

$$(60) \quad x = 0, \quad \lambda' = c T: \sqrt{\epsilon}.$$

Es sollen nun nur solche Fälle betrachtet werden, in welchen die Leitfähigkeit σ' der Drähte sehr viel grösser ist, als die Leitfähigkeit σ der Umgebung, denn nur dann kann man Wellen in ihr beobachten. Dies ist z. B. immer der Fall, selbst wenn die Umgebung aus gut leitenden Electrolyten besteht. Es ist dann bei der Kleinheit von τ gestattet, in den mit τ multiplicirten Gliedern der Gleichung (59) $\sigma = 0$ anzunehmen und die nach (60) für $\sigma = 0$ geltende Beziehung $\lambda' = c T: \sqrt{\epsilon}$ zu benutzen. Dann kann man in (59) die mit τ multiplicirten Glieder auf beiden Seiten fortheben und es bleibt die Gleichung zu erfüllen übrig:

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\alpha + 2\pi x}{\lambda'} = \frac{\alpha}{T} \sqrt{1 + \frac{4\pi c^2 \sigma}{\epsilon \alpha} T},$$

oder unter Benutzung von (57):

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \frac{x - \gamma' + \sqrt{-1}}{\lambda'} = \frac{-\gamma' + \sqrt{-1}}{T} \sqrt{1 + \frac{2c^2 \sigma T}{\epsilon (-\gamma' + \sqrt{-1})}}.$$

Führt man die Abkürzung ein:

$$(61) \quad \frac{c^2 \sigma T}{\epsilon} = s,$$

so schreibt sich die vorige Gleichung:

$$(62) \quad \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \frac{x - \gamma' + \sqrt{-1}}{\lambda'} = \frac{-\gamma' + \sqrt{-1}}{T} \sqrt{1 + \frac{2s}{-\gamma' + \sqrt{-1}}}.$$

Ist nun die Leitfähigkeit σ , und damit auch die Grösse s so klein, dass man s^2 gegen 1 vernachlässigen kann, so folgt

$$\sqrt{1 + \frac{2s}{-\gamma' + \sqrt{-1}}} = 1 + \frac{s}{-\gamma' + \sqrt{-1}},$$

und aus (62):

$$(63) \quad \lambda' = c T: \sqrt{\epsilon}, \quad x = s = \frac{c^2 \sigma T}{\epsilon}.$$

Die Wellenlänge ist also dann durch Auftreten der Leitfähig-

keit σ gar nicht beeinflusst, die Grösse κ , welche die örtliche Dämpfung der Wellen bestimmt (sie soll *Absorptionsindex*¹⁾ der Umgebung genannt werden) ist proportional²⁾ zu σ und T , umgekehrt proportional zu ϵ .

Es kommen aber auch praktisch interessante Fälle vor, in denen s^2 nicht gegen 1 vernachlässigt werden kann. Dann liefert die Gleichung (62) durch Quadriren und Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{1 - (\kappa - \gamma')^2}{\lambda'^2} = \frac{\epsilon}{c^2 T^2} \cdot (1 - \gamma'^2 + 2 s \gamma'), \\ \frac{\kappa - \gamma'}{\lambda'^2} = \frac{s}{c^2 T^2} \cdot (s - \gamma'). \end{cases}$$

Nun ist zu beachten, dass γ' in den praktisch vorkommenden Fällen so klein ist, dass es in diesen Gleichungen kaum berücksichtigt zu werden braucht. Z. B. ist in meinen Versuchen γ etwa = 0,15, daher $\gamma' = \gamma : 2\pi = 0,024$. Aber selbst wenn man γ' in obigen Gleichungen (64) beibehält, so ist es wenigstens gestattet, in den mit γ' , bez. γ'^2 multiplicirten Gliedern die Näherungswerthe (63) für λ' und κ einzusetzen. Dann heben sich aber alle mit γ' bez. γ'^2 multiplicirten Glieder aus den Gleichungen (64) fort, und es bleibt übrig:

$$\begin{aligned} \text{d. h.} \quad & \frac{1 - \kappa^2}{\lambda'^2} = \frac{\epsilon}{c^2 T^2}, \quad \frac{\kappa}{\lambda'^2} = \frac{\epsilon s}{c^2 T^2}, \\ (65) \quad & \kappa = \frac{2s}{1 + \sqrt{1 + 4s^2}}, \quad \lambda'^2 = \frac{c^2 T^2}{\epsilon} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4s^2}}. \end{aligned}$$

cT ist die Wellenlänge λ der Schwingung, wenn die Parallel-drähte von Luft umgeben wären. Das Verhältniss

$$\lambda : \lambda' = n$$

wird der *electrische Brechungsexponent* der Umgebung genannt. Nach (65) ergibt sich für ihn die Beziehung:

$$(66) \quad n = \sqrt{\epsilon} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4s^2}}{2}}.$$

1) κ ist identisch mit der in meinen optischen Arbeiten gewählten Bezeichnung, z. B. Wied. Ann. 39. p. 481. 1890.

2) Wenn man die Grösse τ , oder besser noch $\tau : 2\pi$, den *Absorptionsindex der Drähte* nennt, so ist bemerkenswerth, dass dieser proportional zu $\sqrt{T}$ und umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Leitfähigkeit der Drähte ist.

Bei Umgebungen, die dieselbe Dielectricitätsconstante ϵ besitzen, aber verschiedene Leitfähigkeiten σ , wächst also der electriche Brechungsexponent mit zunehmender Leitfähigkeit, der Absorptionsindex ebenfalls, aber etwas langsamer, als die Leitfähigkeit selbst. Ferner ist von Bedeutung, dass der Absorptionsindex fast proportional der Schwingungsdauer der Wellen zunimmt, und bei zwei Flüssigkeiten gleicher Leitfähigkeit, aber verschiedener Dielectricitätsconstante, letzterer nahezu umgekehrt proportional ist.

Es hat sich herausgestellt¹⁾, dass wässerige Salzlösungen bis zu $\lambda = 75$ cm solche normal sich verhaltende Körper sind, wie wir sie in diesem Abschnitt betrachtet haben, und dass sie alle dieselbe Dielectricitätsconstante wie reines Wasser ($\epsilon = 81$ bei 17° C.) besitzen; selbst bei hoher Leitfähigkeit σ ist dies wenigstens wahrscheinlich gemacht. In der folgenden Tabelle stelle ich die für $\lambda = 75$ cm, d. h. $T = \lambda : c = 25 \cdot 10^{-10}$ geltenden Werthe von n und κ nach den Gleichungen (65) und (66) zusammen, für $\epsilon = 81$ und verschiedenes σ . K bedeutet das auf Quecksilber als Einheit bezogene Leitvermögen. Es ist

$$\sigma = 1,063 \cdot 10^{-5} \cdot K.$$

Abhängigkeit des Brechungsexponenten und des Absorptionsindex von der Leitfähigkeit bei $\lambda = 75$ cm, $\epsilon = 81$.

$K \cdot 10^8$	5	25	50	75	100	125
$\sigma \cdot 10^{12}$	0,53	2,66	5,31	7,96	10,63	13,30
s	0,015	0,074	0,148	0,222	0,297	0,370
κ	0,015	0,074	0,145	0,212	0,274	0,329
n	9,00	9,02	9,10	9,22	9,39	9,55

$K \cdot 10^8$	150	175	200	250	380
$\sigma \cdot 10^{12}$	15,95	18,60	21,3	26,6	40,5
s	0,445	0,518	0,593	0,742	1,13
κ	0,380	0,427	0,466	0,531	0,647
n	9,73	9,91	10,20	10,63	11,90

Die Beobachtungen („Arbeit II“) entsprechen nahezu dieser theoretisch berechneten Abhängigkeit des n von σ .

1) Vgl. „Arbeit II“ und in diesem Aufsatz die Bemerkungen weiter unten.

2. Reflexion und Uebergang von Wellen an einer Brücke.

Es liege bei $z = \beta' \lambda'$ eine metallische Brücke B' auf. Bezeichnet man, wie früher, mit i die Stromstärke in den Drähten vor der Brücke, mit i' den Strom in der Brücke, mit i'' den über die Brücke hinüber gehenden Strom, und ist ferner e die scheinbare Ladung in der vor der Brücke bestehenden Welle, e'' in der hinter ihr bestehenden Welle, so bleiben die früheren Brückenbedingungen (vgl. oben p. 8) (14) und (15), nämlich:

$$(14) \quad i' = i - i'' \quad \text{für } z = \beta' \lambda',$$

$$(15) \quad e = e'' \quad \text{,, } z = \beta' \lambda'$$

bestehen. Vom galvanischen Widerstande in der Brücke selbst können wir absehen, da er einen nicht bemerkbaren Einfluss ausübt, wie eine genauere Berechnung (vgl. „Abhandlung“) zeigt. Daher können wir die frühere Brückenbedingung (13) auch hier anwenden, nur mit der Modification, dass an Stelle der Selbstinduction L der Längeneinheit der Brücke in Luft hier einzuführen ist die Selbstinduction L' der Längeneinheit der Brücke, während sie im Körper mit den Constanten ϵ , σ liegt. Dieses L' ist kleiner als L , falls die Wellenlänge λ' der Schwingungen im Körper kleiner als die Wellenlänge λ der Schwingungen in Luft ist, denn der Rückstrom für i' liegt, roh taxirt, in der Entfernung $\frac{1}{4} \lambda'$ von der Brücke (vgl. oben p. 5), und es ist ungefähr (vgl. die frühere Formel (11)):

$$(11') \quad L' = 2 \log \frac{\frac{1}{4} \lambda'}{R'}.$$

Ausserdem müssen wir in der früheren Brückenbedingung (13) auf der rechten Seite den Factor $1/\epsilon$ hinzufügen, weil die von der Ladung e herrührende electricische Kraft E'_2 (vgl. die frühere Formel (12)) im Verhältniss $1:\epsilon$ verkleinert wird, wenn die Ladung e nicht in Luft, sondern in einem Körper der Dielectricitätsconstanten ϵ lagert. — Die frühere Brückenbedingung (13) wird also hier zu

$$(13') \quad L' l \frac{\partial i'}{\partial t} = 4 c \frac{e}{\epsilon} \log \frac{d}{R'} \quad \text{für } z = \beta' \lambda'.$$

Führt man das Verhältniss ζ' der Selbstinduction der Längeneinheit der Brücke zu der der Drähte ein durch:

$$(30'') \quad \zeta' = L' : 2 \log \frac{d}{R},$$

so wird (13') zu

$$(13'') \quad l \zeta' \frac{\partial \lambda'}{\partial t} = 2 c \frac{e}{\varepsilon} \text{ für } z = \beta' \lambda'.$$

Es möge nun nach der Brücke zu die Ladungswelle einfallen:

$$(67) \quad e_e = A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

Hierbei ist gemäss der Gleichung (58) α'' eine Abkürzung für:

$$(68) \quad \alpha'' = \alpha' + 2 \pi \kappa = \alpha + \tau + 2 \pi \kappa.$$

Die an der Brücke reflectirte Welle soll dargestellt werden durch

$$(69) \quad e_r = r \cdot A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha'' \frac{z}{\lambda'}},$$

wobei r (*Reflexionsfactor*) eine complexe Grösse bezeichnet, die über die Brücke hinübergehende durch

$$e'' = \delta \cdot A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}}.$$

Analog ist für die Stromstärken zu setzen:

$$(70) \quad \begin{cases} i_e = B \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}}, \\ i_r = -r \cdot B \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha'' \frac{z}{\lambda'}}, \\ i'' = \delta \cdot B \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}}. \end{cases}$$

Der Factor B ergibt sich gemäss der Gleichung (5'') (p. 25) zu:

$$(71) \quad B \frac{\alpha''}{\lambda'} = A \frac{\alpha}{c T} \left(1 + 4 \pi \frac{c^2 \sigma}{\varepsilon \alpha} T \right).$$

Die Bedingung (15) ergibt nun:

$$e^{-\alpha'' \beta'} + r \cdot e^{+\alpha'' \beta'} = \delta \cdot e^{-\alpha'' \beta'},$$

die Bedingung (14):

$$i' = B \cdot e^{\alpha \frac{t}{T}} (e^{-\alpha'' \beta'} - r \cdot e^{+\alpha'' \beta'} - \delta \cdot e^{-\alpha'' \beta'}),$$

d. h. vermöge der vorigen Gleichung:

$$i' = -B \cdot e^{\alpha \frac{t}{T}} \cdot 2 r \cdot e^{\alpha'' \beta'}.$$

Setzt man diesen Werth in die Brückenbedingung (13'') ein, so folgt:

$$Br \cdot l \zeta' \cdot \frac{\alpha}{T} \cdot e^{\alpha'' \beta'} = A \frac{c}{s} (e^{-\alpha'' \beta'} + r \cdot e^{+\alpha'' \beta'}),$$

oder

$$(72) \quad r \cdot e^{2\alpha'' \beta'} \left(1 + \frac{B}{A} \zeta' \alpha \varepsilon \frac{l}{c T} \right) = -1.$$

In dieser Gleichung ist für B/A sein aus (71) folgender Werth zu entnehmen. Dieser Werth ist infolge der Gleichung (59) einfach zu schreiben, da man nun von der Grösse τ (dem galvanischen Widerstande der Drähte) absehen kann, weil B/A nur in dem kleinen Correctionsgliede vorkommt, welches mit der Brückenlänge l proportional ist. Bei Vernachlässigung von τ ergibt sich nämlich aus (59), indem man $\alpha'' = \alpha + 2\pi\kappa$ setzt:

$$\frac{c^2}{\varepsilon} \left(\frac{\alpha''}{\lambda'} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{T^2} \left(1 + 4\pi \frac{c^2 \sigma}{\varepsilon \alpha} T \right).$$

Dividirt man diese Gleichung mit (71), so folgt

$$B \frac{\lambda'}{\alpha''} \frac{\varepsilon}{c^2} = A \frac{T}{c \alpha},$$

es ist also

$$(73) \quad \frac{B}{A} \cdot \frac{\alpha \varepsilon}{c T} = \frac{\alpha''}{\lambda'}.$$

Setzt man dieses in die Formel (72) ein, so folgt der Reflexionsfactor zu:

$$(74) \quad r = - \frac{e^{-2\alpha'' \beta'}}{1 + \alpha'' \zeta' \frac{l}{\lambda'}};$$

bringt man, wie früher (vgl. p. 9 Formel (31)) $1 + \alpha'' \zeta' l / \lambda'$ auf die Form $1 / \varrho' \cdot e^{+\alpha'' \varphi'}$, d. h. setzt

$$(75) \quad \frac{1}{1 + \alpha'' \zeta' \frac{l}{\lambda'}} = \varrho' \cdot e^{-\alpha'' \varphi'},$$

so wird

$$(76) \quad r = - \varrho' \cdot e^{-\alpha'' (2\beta' + \varphi')}.$$

Die Brückenverkürzung ist (vgl. die frühere analoge Formel (36)):

$$(77) \quad \delta b' = \varphi' \cdot \frac{\lambda'}{2}.$$

In der früheren Formel (37) (p. 11) war die Brückenverkürzung bei Luftumgebung der Drähte in eine besonders

bequeme Form gebracht worden, die sich daraus ergab, dass $l:\lambda$ und damit φ ein so kleiner Werth war, dass $\operatorname{tg} 2\pi\varphi = 2\pi\varphi$ gesetzt werden konnte. Da die Wellenlänge λ' unter Umständen bedeutend kleiner ist als λ , z. B. im Wasser 9 mal kleiner, so ist eine solche Vereinfachung bei derselben Bügellänge l hier meist nicht erlaubt, da $l:\lambda'$ einen grösseren Betrag hat. Bei meinen Versuchen war $l = 1,8$ cm, $\lambda = 75$ cm, λ' (Wasser) = 8,3 cm, daher ist $l:\lambda = 0,024$, $l:\lambda' = 0,216$.

In (75) ist es nun gestattet, da α'' nur mit den jedenfalls nicht bedeutenden Beträgen φ' , bez. l/λ' multiplicirt auftritt, für α'' einen Näherungswerth einzuführen, der sich aus (68) ergibt, wenn man den kleinen Werth τ neben γ und $2\pi\kappa$ vernachlässigt, d. h. nach (68) und (57) schreibt:

$$(78) \quad \alpha'' = 2\pi(\kappa - \gamma' + \sqrt{-1}).$$

Dann wird (75) zu:

$$\varphi' \cdot e^{-2\pi\varphi'(\kappa - \gamma' + \sqrt{-1})} = \frac{1}{1 + 2\pi\zeta' \frac{l}{\lambda'}(\kappa - \gamma' + \sqrt{-1})},$$

d. h.

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi' \cdot e^{-2\pi\varphi'(\kappa - \gamma')} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + 2\pi\zeta' \frac{l}{\lambda'}(\kappa - \gamma')\right]^2 + \left(2\pi\zeta' \frac{l}{\lambda'}\right)^2}}, \\ \operatorname{tg} 2\pi\varphi' = \frac{2\pi\zeta' \frac{l}{\lambda'}}{1 + 2\pi\zeta' \frac{l}{\lambda'}(\kappa - \gamma')} \end{array} \right.$$

Nehmen wir zunächst $\kappa = 0$, und legen obiges Beispiel für Wasser zu Grunde, in welchem $l:\lambda = 0,216$, nehmen wir ferner für γ den Werth 0,15 (vgl. oben p. 17), d. h. für γ' den Werth 0,024, schliesslich für ζ' den aus (11') (es war $R' = 0,1$ cm) und (30') folgenden Werth $\zeta' = 0,845$, so folgt aus (76) für $l = 1,8$ cm:

$$(79') \quad \varphi' \cdot e^{+r\varphi'} = 0,661; \operatorname{tg} 2\pi\varphi' = 1,18, \varphi' = 0,14.$$

Hieraus ergibt sich nach (77) die Brückenverkürzung zu

$$\delta b' = 5,8 \text{ mm.}$$

Dieser Werth stimmt sehr gut mit den Beobachtungen¹⁾ überein, denen zufolge $\delta b'$ zwischen 5,5 und 6 mm liegt.

1) „Arbeit II“, p. 343.

Die Brückenverkürzung ist also in Wasser etwas kleiner, als in Luft, wo sie 8 mm betrug (vgl. oben p. 11).

Für $\kappa = 0,531$, was nach der Tabelle der p. 29 einer sehr gut leitenden wässerigen Salzlösung der Leitfähigkeit $K = 250 \cdot 10^{-8}$ bezogen auf Quecksilber entspricht, folgt nach obiger Tabellen $\lambda' = 7,05$, daher $\zeta' = 0,800$. Es ergibt sich dann aus (79) für $l = 1,8$ cm:

$$(79'') \quad \rho' e^{-2\pi\varphi'(\kappa-\gamma')} = 0,476; \quad \operatorname{tg} 2\pi\varphi' = 0,777, \quad \varphi' = 0,105.$$

Die Brückenverkürzung wird:

$$\delta b' = 3,7 \text{ mm.}$$

Die Brückenverkürzung ist also für eine gutleitende wässerige Lösung geringer, als für reines Wasser. Dieses Resultat ergibt sich auch schon aus der Discussion der allgemeinen Formel (79) für $\operatorname{tg} 2\pi\varphi'$ in Verbindung mit (77) für $\delta b'$.

Wesentliches Interesse bietet auch der Factor $\rho' \cdot e^{+\gamma\varphi'}$ bez. $\rho' \cdot e^{-2\pi\varphi'(\kappa-\gamma')}$. Denn nach (76) bedeutet er das Amplitudenverhältniss der reflectirten Welle und der einfallenden. Wie das numerische Beispiel (79') zeigt, beträgt für reines Wasser, selbst bei der kleinen Brückenlänge von 1,8 cm, die reflectirte Amplitude nur $\frac{2}{3}$ der einfallenden. Für gut leitende Lösung sinkt dies Verhältniss nach (79'') sogar unter ein Halb. Ein Vergleich mit der oben auf p. 11 für Luft angestellten Rechnung, nach der sich das Amplitudenverhältniss zu 0,99 ergab, zeigt, dass der Nachweis stehender Wellen, die durch Reflexion an einer Brücke zu Stande kommen, um so schwieriger wird, je kleiner die Wellenlänge der Schwingung für die betreffende Umgebung der Drähte ist, denn um so weniger intensiv ist die reflectirte Welle. Man wird deshalb zur möglichst guten Beobachtung stehender Wellen die Brückenlänge, d. h. den Abstand der Paralleldrähte klein wählen, denn dadurch wird die Amplitude der reflectirten Welle verstärkt.

Bei den Versuchen, die ich mit wässerigen Salzlösungen angestellt habe, habe ich zum Theil den Abstand d der Paralleldrähte = 1 cm gewählt (ebenso $l = 1$). Dann wird für $l = 1$ cm:

$$(79''') \quad \begin{cases} \text{bei } \kappa = 0: & \rho' e^{\gamma\varphi'} = 0,810; & \varphi' = 0,10, & \delta b' = 4,1 \text{ mm.} \\ \text{bei } \kappa = 0,53: & \rho' e^{-2\pi\varphi'(\kappa-\gamma')} = 0,646; & \varphi' = 0,077, & \delta b' = 3,2 \text{ mm.} \end{cases}$$

Ein Vergleich mit (79') und (79'') zeigt, dass in der That durch die kürzere Brückenlänge die Amplitude der reflectirten Welle bedeutend gestiegen ist; die Brücken Kürzung ist kleiner geworden; es ist auch zu beachten, dass der Unterschied zwischen den Brückenverkürzungen bei $\kappa = 0$ und $\kappa = 0,53$ erheblich vermindert ist gegenüber dem obigen Beispiele mit längerer Brücke.

3. Reflexion und Uebergang der Wellen an der Grenze zwischen Luft und Flüssigkeit.

Bei $z = \beta \lambda$ mögen die Paralleldrähte von Luft in eine andere Substanz (z. B. Flüssigkeit) übertreten. Die Grenze zwischen Luft und Flüssigkeit sei eine Ebene, die senkrecht zu den Paralleldrähten steht. In der Flüssigkeit bestehe die Wellenlänge λ' und der Absorptionsindex κ . Die Grenzbedingungen sind offenbar, dass sich die Stromwelle continuirlich über die Flüssigkeitsgrenze hinüber fortsetzt, und ebenso die Potentialwelle, welche von der scheinbaren Ladung e der Drähte herrührt. Denn das Potential V auf den Drähten muss zu beiden Seiten der Flüssigkeitsgrenze wegen der metallischen Eigenschaft der Drähte dasselbe sein.

Bezeichnet man die Wellen in Luft ohne Index, in Flüssigkeit mit dem oberen Index', so sind also die Grenzbedingungen:

$$(80) \quad e = \frac{e'}{s}, \quad i = i' \text{ für } z = \beta \lambda.$$

Fallen die Wellen in Luft ein (e_e), so tritt noch eine reflectirte Welle (e_r) in Luft auf, und es ist

$$e = e_e + e_r.$$

Nach (53) ist zu setzen:

$$(81) \quad \begin{cases} e_e = A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}}, \\ e_r = r A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}}, \\ \text{nach (67) ist zu setzen:} \\ e' = \delta A \cdot e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda'}}. \end{cases}$$

Dabei sind die r und δ complexe Factoren (*Reflexions-* und *Uebergangsfactor*) ferner ist

$$\alpha = -\gamma + 2\pi\sqrt{-1} = 2\pi(-\gamma' + \sqrt{-1}),$$

$$\alpha' = \alpha + \tau, \alpha'' = \alpha + \tau + 2\pi\kappa.$$

Die Stromwellen sind aus (81) zu finden, wenn man für Luft die Gleichung (5) p. 4, für die Flüssigkeit die Gleichung (5'') p. 25 in Anwendung bringt.

Erstere beiden Gleichungen liefern:

$$i_e = A \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot e^{a \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda}}, \quad i_r = -r A \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot e^{a \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda}},$$

letztere Gleichung giebt, wenn man schreibt:

$$i' = \delta B \cdot e^{a \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda}},$$

eine bestimmte Relation für B , die schon oben p. 31 in der Gleichung (71) ausgedrückt ist. Man kann nun in den Amplituden für die Stromstärken i unbedenklich vom Drahtwiderstande absehen, d. h. $\tau = 0$ setzen. Diese Grösse τ ist überhaupt nur beizubehalten, wenn sie mit z multiplicirt auftritt, da z unter Umständen grosse Werthe annehmen kann.

Bei dieser Vereinfachung ist $\alpha' = \alpha$ zu setzen, und B nimmt gemäss (73) (p. 32) den Werth an:

$$B = A \cdot \frac{\alpha''}{\lambda'} \cdot \frac{cT}{\alpha s} = A \frac{\alpha''}{\alpha s} \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Die Stromstärken werden daher:

$$(82) \quad \begin{cases} i_e = A \cdot e^{a \frac{t}{T} - \alpha \frac{z}{\lambda}}, \\ i_r = -r A \cdot e^{a \frac{t}{T} + \alpha \frac{z}{\lambda}}, \\ i' = \delta A \frac{\alpha''}{\alpha s} \frac{\lambda}{\lambda'} e^{a \frac{t}{T} - \alpha'' \frac{z}{\lambda}}. \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen (80) ergeben nun:

$$(83) \quad \begin{cases} e^{-\alpha'\beta} + r \cdot e^{+\alpha'\beta} = \frac{\delta}{s} e^{-\alpha''\beta \frac{\lambda}{\lambda'}}, \\ e^{-\alpha'\beta} - r \cdot e^{+\alpha'\beta} = \frac{\delta}{s} \frac{\alpha''}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda'} e^{-\alpha''\beta \frac{\lambda}{\lambda'}}. \end{cases}$$

Hieraus ist der Reflexionsfactor r und der Uebergangsfactor δ leicht zu berechnen. Wir wollen dies näher ausführen für den praktisch allein wichtigen Fall, dass die zeitliche Dämpfungsconstante γ neben 2π sehr klein ist. Man kann dann in dem

Factor α''/α der zweiten Gleichung (83) γ einfach gleich Null annehmen, d. h. setzen:

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = 1 - \kappa \sqrt{-1}.$$

Ist z. B. $\gamma = 0,15$, wie es oben für die von mir angestellten Versuche wahrscheinlich gemacht wurde, so wird r und δ nur unmerklich durch diese Vernachlässigung von γ modificirt. Führt man für $\lambda:\lambda'$ die Bezeichnung n (electricischer Brechungsexponent) ein (vgl. oben p. 28) und setzt $\sqrt{-1} = i$, so wird (83) zu:

$$e^{-\alpha'\beta} + r \cdot e^{+\alpha'\beta} = \frac{\delta}{s} e^{-\alpha''\beta n},$$

$$e^{-\alpha'\beta} - r \cdot e^{+\alpha'\beta} = \frac{\delta}{s} n(1 - i\kappa) e^{-\alpha''\beta n}.$$

Daraus entsteht:

$$(84) \quad \frac{\delta}{s} = \frac{2 e^{(n\alpha'' - \alpha')\beta}}{n(1 - i\kappa) + 1}, \quad r = -\frac{n(1 - i\kappa) - 1}{n(1 - i\kappa) + 1} e^{-2\alpha'\beta}.$$

Es mag bemerkt werden, dass, während δ den Uebergangsfactor für die Ladungswelle darstellt, $\delta:s$ den Uebergangsfactor für die Welle der electricischen Kraft (gemessen in der Umgebung der Drähte) bedeutet. Denn diese electricische Kraft ist in der Luft proportional zu e , in der Flüssigkeit proportional zu $e'' : s$.

Die Werthe, welche r und δ/s für $\beta = 0$ annehmen, mögen auf die Form gebracht werden:

$$(85) \quad \begin{cases} \frac{n(1 - i\kappa) - 1}{n(1 - i\kappa) + 1} = r \cdot e^{-i2\pi A}, \\ \frac{2}{n(1 - i\kappa) + 1} = \delta \cdot e^{+i2\pi E}. \end{cases}$$

r und δ geben die Amplitudenschwächung durch Reflexion und Uebergang an, $2\pi A$ und $2\pi E$ die dabei eintretenden Phasenänderungen der einfallenden Wellen.

Man erhält aus (85):

$$(86) \quad \begin{cases} r^2 = \frac{(n-1)^2 + n^2 \kappa^2}{(n+1)^2 + n^2 \kappa^2}, \quad \operatorname{tg} 2\pi A = + \frac{2n\kappa}{n^2 + n^2 \kappa^2 - 1}, \\ \text{wobei } 2\pi A \text{ zwischen } 0 \text{ und } + \frac{\pi}{2} \text{ liegt,} \\ \delta^2 = \frac{4}{(n+1)^2 + n^2 \kappa^2}, \quad \operatorname{tg} 2\pi E = + \frac{n\kappa}{n+1}, \end{cases}$$

$2\pi E$ liegt zwischen 0 und $+\pi/2$.

Diese Formeln sind völlig dieselben, wie sie Gültigkeit haben, falls electriche oder optische Wellen, die sich frei (ohne Drahtleitung) als ebene Wellen fortpflanzen, senkrecht auf die Oberfläche eines absorbirenden Körpers (z. B. eines Metalls), der den Brechungsindex n , den Absorptionsindex κ besitzt, auftreffen¹⁾. Es ist auch leicht einzusehen, weshalb man in beiden Fällen, d. h. bei freien ebenen Wellen, und bei Drahtwellen, zu denselben Resultaten gelangt, besonders wenn man zur Lösung der hier gestellten Fragen den Hertz'schen Weg geht, d. h. die Maxwell'schen Gleichungen des electromagnetischen Feldes der Umgebung der Drähte integrirt. Es tritt dann die völlige Analogie beider Probleme sofort zu Tage.

Von diesem Hertz'schen Wege soll weiter unten noch mehr die Rede sein.

Wenn die Wellen nicht in Luft einfallen, sondern in Flüssigkeit, und zwar so, dass sich die einfallenden Wellen nach $-z$ fortpflanzen und bei $z = \beta \lambda$ auf die Grenze Flüssigkeit—Luft stossen, so sind die Reflexions- und Uebergangsfactoren andere; sie mögen mit r' und $\delta' \epsilon$ bezeichnet werden. Auf demselben Wege, wie er vorhin eingeschlagen ist, folgt, falls sehr grosse zeitliche Dämpfung γ ausgeschlossen wird:

$$(87) \quad r' = + \frac{n(1 - i\kappa) - 1}{n(1 - i\kappa) + 1} e^{+2\alpha''\beta n}, \quad \delta' \epsilon = \frac{2n(1 - i\kappa) \cdot e^{(n\alpha'' - \alpha')\beta}}{n(1 - i\kappa) + 1}.$$

$\delta' \epsilon$ bedeutet den Uebergangsfactor für die Welle der electricen Kraft (während δ' den Uebergangsfactor für die Ladungswelle bedeutet), aus dem vorhin p. 37 angeführten Grunde. Für $\beta = 0$ lassen sich aus den r' und $\delta' \epsilon$ wiederum, wie vorhin, die Phasen- und Amplitudenänderungen bei Reflexion und Uebergang leicht ableiten. Es verdient vielleicht hervorgehoben zu werden, dass es für die bei Reflexion eintretende Amplitudenschwächung gleichgültig ist, von welcher Seite (ob in Luft, oder in Flüssigkeit) die Welle einfällt, dass aber die Uebergangsschwächung der Welle der electricen Kraft viel bedeutender ist, wenn die Welle von Luft in Flüssigkeit übergeht, als wenn sie umgekehrt verläuft. So ist nach (86) für

1) Vgl. z. B. des Verf. Physik des Aethers. p. 558; Handbuch der Physik von Winkelmann. 2. p. 824.

Wasser, bei dem $n = 9$, $\kappa = 0$, die Uebergangsschwächung im ersten Falle nach (86):

$$\delta = \frac{2}{n+1} = \frac{1}{5};$$

im zweiten Falle dagegen nach (87):

$$\delta' = \frac{2n}{n+1} = \frac{9}{5}.$$

Während also die übergehende electriche Kraft beim Uebergang von Luft zu Wasser nur den fünften Theil der einfallenden Kraft beträgt, ist sie beim umgekehrten Gang fast doppelt so gross, wie die einfallende Kraft. Ein Widerspruch mit dem Energieprincip folgt aus letzterem Umstande deshalb nicht, weil die electriche Kraft allein noch nicht für die Energie des electromagnetischen Feldes, welches sich in der Umgebung der Drähte befindet, maassgebend ist.

4. Vorhandensein einer Brücke in Luft und einer Grenze Luft—Flüssigkeit.

Wenn bei $z = 0$ eine Brücke B_1 über den Paralleldrähten liegt, welche zunächst in Luft verlaufen, dagegen an der Stelle $z = \beta \lambda$ in eine Flüssigkeit eintreten, deren Constanten n und κ seien, so wird eine über die Brücke B_1 vom Erreger gesandte Welle unendlich oft zwischen B_1 und der Flüssigkeitsgrenze hin- und herreflectirt. Der Effect dieser vielfachen Reflexionen ist genau so zu berechnen, wie es oben p. 14 für die vielfachen Reflexionen zwischen zwei Brücken durchgeführt ist. Die früheren Formeln (41) und (42) können direct auf diesen Fall übertragen werden, wenn man, wie dort, unter r' den Reflexionsfactor der Brücke B_1 nach Formel (40) versteht, unter r dagegen den Reflexionsfactor an der Flüssigkeitsgrenze nach Formel (84). Für reelles und positives $r r'$ folgen Maxima der electriche Kraft zwischen Brücke B_1 und Flüssigkeitsgrenze, dadurch sind die *Knotenentfernungen* der letzteren bestimmt; für reelles und negatives $r r'$ folgen Minima der electriche Kraft, d. h. *Bauchentfernungen* der Grenze. Die Knoten- und Bauchentfernungen fallen sowohl wegen der Brückenverkürzung (vgl. oben p. 32), als auch wegen der bei der Reflexion an absorbirenden Flüssigkeiten auftretenden

Phasenänderung $2\pi \Delta$ (vgl. oben p. 37) nicht mit den oben (p. 14) berechneten Knoten- und Bauchlagen einer zweiten Brücke B_2 zusammen. Durch ihre Beobachtung kann man daher nach Ermittlung der Brückenverkürzung die Phasenänderung $2\pi \Delta$ der Reflexion experimentell nachweisen. Diesbezügliche Versuche habe ich in dem Aufsatz der „Abhandlungen“ beschrieben. Bei grosser Dielectricitätsconstante ϵ der Flüssigkeit ist übrigens Δ stets sehr klein. Es erreicht für eine mittlere Leitfähigkeit, die bei grossem ϵ dem Absorptionsindex $\kappa = 1/\sqrt{3}$ entspricht, ein Maximum.

Die Knoten- und Bauchstärken in diesem Falle berechnen sich wiederum am bequemsten mit Hülfe gewisser Recursionsformeln. Wenn man experimentell prüft, für welchen Knoten bei der Reflexion an einer zweiten metallischen Brücke B_2 der Wellenindicator gerade so stark entspricht, wie für irgend einen bestimmten Knoten bei der hier betrachteten Flüssigkeitsreflexion, so hat man dadurch die Möglichkeit, die zeitliche Dämpfung γ der Wellen zu berechnen. Der Vortheil dieser Methode gegenüber der oben p. 16 auseinandergesetzten liegt darin, dass man für die Empfindlichkeit des Wellenindicators keine Schätzung vorzunehmen braucht. Indess ist die Methode doch in der Ausführung umständlicher, und lieferte auch bisher kein gutes Resultat.¹⁾

5. Vorhandensein einer Brücke in Luft, einer Grenze Luft—Flüssigkeit und einer Brücke in Flüssigkeit.

Dieser Fall ist deshalb von Wichtigkeit, weil er die Theorie für die Versuche ergiebt, bei denen durch Verschiebung einer Brücke B_2 in der Flüssigkeit Aufschluss über den Brechungsindex und den Absorptionsindex derselben gewonnen werden soll mit Hülfe eines Wellenindicators, der nicht in der Flüssigkeit liegt.²⁾

Eine feste Brücke B_1 liege in Luft bei $z = 0$ über den Drähten. Bei $z = \beta\lambda$ sei die Grenze Luft—Flüssigkeit,

1) Ein diesbezüglicher Versuch und seine Berechnung ist in dem Aufsatz der „Abhandlungen“ p. 129, 130 enthalten.

2) Die Versuchsanordnung ist in „Arbeit I und II“ näher beschrieben.

bei $z = \beta \lambda + \beta' \lambda'$ liege eine zweite Brücke B_2 über den Drähten in der Flüssigkeit.

Da im Vorigen die Reflexions- und Uebergangsfactoren an der Grenze Luft—Flüssigkeit, sowie die Reflexionsfactoren an den Brücken (die voneinander verschieden sind, da die eine Brücke sich in Luft, die andere in der Flüssigkeit befindet) angegeben sind, so kann man auf ähnlichem Wege, wie er oben p. 13 zum Ziele geführt hat, den zeitlichen Verlauf der electricen Kraft an einer beliebigen Stelle des Drahtsystems berechnen. Nur ist die Ausführung dieses Weges hier deshalb viel complicirter, wie oben, weil hier an drei Stellen des Drahtsystems Reflexionen eintreten. In dem Aufsatz der „Abhandlungen“ habe ich deshalb wirklich nur den Fall durchgeführt, dass die Flüssigkeit eine derartige Absorption besitzt, dass Wellen, welche den Weg in der Flüssigkeit, d. h. die Strecke $\beta' \lambda'$, viermal durchheilen, keine merkliche Amplitude mehr besitzen. Für die experimentelle Bestimmung des Absorptionsindex einer Flüssigkeit reicht diese Voraussetzung aus, wie weiter unten näher ausgeführt werden soll. Aber selbst bei dieser vereinfachenden Annahme werden die Formeln für den zeitlichen Verlauf der electricen Kraft so complicirt, dass ich auf eine Wiedergabe hier verzichten, aber ihren Inhalt angeben möchte.

Die Resultate werden theoretisch am einfachsten, wenn der Abstand der Flüssigkeitsgrenze von der festen Brücke B_1 , d. h. die Grösse $\beta \lambda$, eine der im vorigen Abschnitt (4) definirten Knotenentfernungen ist. Dieser Fall ist auch experimentell zu wählen, weil man in ihm die stärksten Unterschiede der electricen Kraft vor der Flüssigkeit wahrnehmen kann, wenn die Brücke B_2 in letzterer verschoben wird. Für letztere kann man leicht die dementsprechenden Lagen angeben, d. h. die Knotenlagen und Bauchlagen von B_2 . Durch Messung derselben erhält man direct Aufschluss über die Wellenlänge λ' in der Flüssigkeit. (Dieses Resultat bleibt unverändert, auch wenn man obige, auf der Absorption beruhende Vereinfachung fallen lässt, d. h. auch in einer absorptionsfreien Flüssigkeit).

Die Entfernung der ersten Bauch- oder Knotenlage von der Flüssigkeitsgrenze hängt ausser von λ' von den Phasenänderungen der Wellen beim Uebergang über die Flüssigkeits-

grenze und bei der Reflexion an der Brücke B_2 ab. Da nun beide Grössen nach p. 28 und p. 37 von dem Absorptionsindex κ der Flüssigkeit abhängen, so ist also auch dieser maassgebend für die absolute Lage der Bäuche und Knoten von B_2 . Für verschieden concentrirte wässerige Salzlösungen habe ich unter der Annahme, dass ihre Dielectricitätsconstante ϵ beständig die des reinen Wassers ist, die Lage des ersten Bauches für B_2 berechnet. Die Versuche stehen mit dieser Berechnung nicht im Widerspruch, aber sie bilden durchaus keine scharfe Prüfung der Frage, ob wirklich die Dielectricitätsconstante der wässerigen Lösungen gleich der des Lösungsmittels ist. Um diese Frage sicher zu entscheiden, bedarf man wenigstens der Beobachtung des ersten Bauches und des ersten Knotens in der Flüssigkeit. Diesbezügliche Versuche habe ich in der eingangs citirten Arbeit II mitgetheilt. Stellt man den Versuch so an, dass die Flüssigkeitsgrenze eine feste Lage zur Brücke B_1 behält, und allmählich mehr und mehr Salz dem Wasser zugesetzt wird, so lässt sich aus der Lage allein des ersten Bauches in ihm kein exacter Schluss auf κ' ziehen. Denn mit höherem Salzgehalt, d. h. wachsendem κ ändert sich die Phasenänderung Δ der Reflexion, folglich auch (p. 39) die Knotenentfernung der Flüssigkeitsgrenze von B_1 . Wenn daher auch bei dem reinen Wasser die Grenze in einer Knotenentfernung von B_1 liegt, so ist dies doch bei Zusatz von mehr Salz nicht mehr richtig. Die Formeln werden dann aber zu complicirt, um eine exacte Antwort über die Lage des ersten Bauches aus ihnen ableiten zu können.

Ich habe ferner für die *Knoten- und Bauchstärken*, die bei Verschiebung der Brücke B_2 erhalten werden, allgemeine Formeln entwickelt und dieselben auf verschieden concentrirte wässerige Salzlösungen angewandt. In ihnen habe ich experimentell die Anzahl beobachtbarer Knoten und Bäuche bestimmt, und nun berechnet, wie gross das gegenseitige Verhältniss der Stärken des letzten beobachtbaren Knotens und Bauches ist.¹⁾

1) Gerade für diese letzten beobachtbaren Knoten und Bäuche kann man unbedenklich annehmen, dass die Wellen nicht mehr zu berücksichtigen sind, welche die Strecke $\beta' \lambda'$ viermal durchlaufen haben, vgl. oben p. 41.

Durch dasselbe wird die Empfindlichkeit des Wellenindicators bestimmt. Es ergab sich dafür bei sehr verschieden concentrirten Lösungen ungefähr derselbe Werth, was als Bestätigung dafür angesehen werden kann, dass der Absorptionsindex wässriger Salzlösungen thatsächlich aus ihrer Leitfähigkeit folgt, d. h. dass wässrige Lösungen sich den benutzten kurzen electrischen Wellen gegenüber noch als völlig normal in dem oben p. 23 genannten Sinne verhalten.

B. Der die Drähte umgebende Körper zeigt Dispersion und anomale Absorption.

In diesem Falle ist die in dem Körper fortgepflanzte Welle der electrischen Kraft in derselben Weise zu schreiben, wie sie oben p. 26 in der Formel (58) für sich normal verhaltende Körper aufgestellt worden ist, nämlich:

$$c = A_1 e^{\alpha \frac{t}{T} - \alpha' \frac{z}{\lambda'} - 2\pi \kappa \frac{z}{\lambda'}} + A_2 e^{\alpha \frac{t}{T} + \alpha' \frac{z}{\lambda'} + 2\pi \kappa \frac{z}{\lambda'}},$$

wobei $\alpha = -\gamma + i2\pi$, $\alpha' = \alpha + \tau$ und λ' die Bedeutung der Wellenlänge im Körper, κ die seines Absorptionsindex besitzt. Es besteht jetzt nur der Unterschied gegen früher, dass λ' und κ nicht aus dem Verhalten des Körpers bei sehr langsamen Wechselzahlen, d. h. aus seiner Dielectricitäts-constante und seiner gewöhnlich gemessenen Leitfähigkeit theoretisch berechnet werden können, sondern dass λ' und κ zwei für eine bestimmte Schwingungsdauer T dem Körper individuelle Constanten sind, die nur dem Experiment entnommen werden können. Es handelt sich nun vor allen Dingen um die Frage, wie letzteres zu geschehen habe, d. h. *wie man den electrischen Brechungsexponenten $\lambda:\lambda'$ und den Absorptionsindex κ einer anomal sich verhaltenden Flüssigkeit experimentell bestimmen kann.*

Die Bestimmung des Brechungsexponenten geschieht einfach durch Beobachtung der Knoten- und Bauchlagen einer Brücke B_2 in der Flüssigkeit; zur Bestimmung des Absorptionscoefficienten liegt es nahe, die zu untersuchende Flüssigkeit mit einer anderen von bekanntem Absorptionsindex zu vergleichen. So habe ich ¹⁾ mit der, auch vorhin der Rechnung

1) Vgl. „Arbeit I“.

zu Grunde gelegten Anordnung, dass die Flüssigkeitsgrenze in der ersten Knotenentfernung von einer festen Brücke B_1 lag, während in der Flüssigkeit einer Brücke B_2 verschoben wurde, für eine Reihe von Flüssigkeiten mit anomaler Absorption festgestellt, mit welcher wässerigen Lösung eines Electrolyten sie sich insofern gleich verhielten, dass für beide dieselbe Anzahl Knoten, bez. Bäuche mit der Brücke B_2 beobachtbar ist. Es mögen zwei sich in dieser Weise gleich verhaltende Flüssigkeiten „scheinbar isoabsorbirend“ genannt werden. *Man ist nur dann berechtigt, für beide Körper, wässerige Lösung und anomale Flüssigkeit, gleichen Absorptionsindex anzunehmen, wenn ihre Brechungsexponenten nahezu einander gleich sind.* Sind sie stark voneinander verschieden, so sind auch die Reflexions- und Uebergangsfactoren der electricischen Wellen für beide Flüssigkeiten sehr verschieden. Bei grossen Brechungsexponenten ist wegen der starken Reflexion an der Flüssigkeitsgrenze und der verhältnissmässig schwachen an der Brücke B_2 (vgl. oben p. 34) eine Knotenlage der Brücke B_2 selbst ohne Absorption der Flüssigkeit weniger deutlich bemerkbar, als bei kleinen Brechungsexponenten.

Eine exacte Vergleichung der Absorptionsindices beider Flüssigkeiten lässt sich ausführen, wenn man denjenigen Absorptionsindex κ aufsucht, der für die zu untersuchende Flüssigkeit dasselbe gegenseitige Verhältniss der Stärken des letzten beobachtbaren Knotens und Bauches liefert, wie es die Formeln für die wässerige Lösung ergeben, deren κ aus ihrer Leitfähigkeit zu berechnen ist. Zu dem Zweck muss man daher auch die Formeln für die Knotenstärken und Bauchstärken in einer anomal sich verhaltenden Flüssigkeit herleiten. Es ergibt sich nun durch eine Untersuchung, die in dem Aufsatz der „Abhandlung“ näher ausgeführt ist, dass alle Formeln für die „normalen“ Körper unverändert auch für die „anormalen“ gelten, wenn sie nicht mehr die Dielectricitätsconstante und Leitfähigkeit enthalten, sondern wenn diese Grössen durch Brechungsexponent und Absorptionsindex ersetzt werden. Auf diesem Wege sind die Werthe der Absorptionsindices einiger unten angeführten Flüssigkeiten mit anomaler Dispersion berechnet, wobei die in „Arbeit I“ beschriebenen Versuche benutzt wurden. Bei nicht zu schwacher Absorption kann durch

diese Methode der Absorptionsindex auf etwa nur 2 Proc. Fehler bestimmt werden. — *Bei Glycerin nimmt α mit wachsender Schwingungsdauer stark ab, während bei normal sich verhaltenden Flüssigkeiten der Gang von α umgekehrt ist.*

Zusammenfassung der Hauptresultate.

1. Bei der Reflexion electrischer Drahtwellen an einer Brücke tritt eine Schwächung ihrer Amplitude und eine Phasenverschiebung ein, welche im wesentlichen abhängt von dem Verhältniss der Länge der Brücke zu der Wellenlänge. Wird letztere sehr klein, wie z. B. in dem Falle, dass die Drähte von Wasser umgeben sind, so kann auch die Schwächung der Amplitude bei der Reflexion selbst für sehr kurze Brückenlängen ziemlich bedeutend werden. — Die Brückenverkürzung hängt direct mit der Phasenverschiebung der Wellen bei der Reflexion zusammen.

2. Der Leitungswiderstand der Drähte gewinnt bei den gewöhnlichen experimentellen Anordnungen merkbaren Einfluss auf die Erscheinungen nur dann, wenn die zwei Brücken, zwischen denen sich stehende electrische Wellen ausbilden, um sehr zahlreiche Wellenlängen voneinander entfernt sind.

3. Die zeitliche Dämpfungsconstante γ der electrischen Schwingungen kann aus einer einfachen Beobachtung, nämlich der Anzahl beobachtbarer Knoten und Bäuche gefunden werden, wenn die Empfindlichkeit des Wellenindicators bekannt ist. Letztere braucht aber nur taxirt zu werden, da geringe Aenderungen sich kaum auf γ äussern. Für die von mir gewählte Versuchsanordnung ist etwa $\gamma = 0,15$.

4. Für den Erreger der Wellen sind mehrere harmonische Oberschwingungen nachweisbar.

5. Die Empfindlichkeit des Wellenindicators kann an der Hand aufgestellter Formeln genau ermittelt werden, wenn man die in einer wässerigen Lösung eines Electrolyten beobachtbaren Knoten und Bäuche zählt.

6. Wässrige Lösungen von Kupfersulfat und Kochsalz besitzen normale Absorption der electrischen Wellen, d. h. eine derartige, wie sie theoretisch aus ihrer Leitfähigkeit und ihrer Dielectricitätsconstanten folgt.

7. Der Absorptionsindex α einer beliebigen, auch anomal

sich verhaltenden Flüssigkeit lässt sich durch einfache experimentelle Vergleichung mit einer scheinbar isoabsorbirenden wässerigen Lösung eines Electrolyten ermitteln. Es ergeben sich für κ folgende Zahlen:

Glycerin: $\kappa = 0,50$ bei $T = 25 \cdot 10^{-10}$ sec.;

$\kappa = 0,27$ bei $T = 70 \cdot 10^{-10}$ sec.

Amylalkohol: $\kappa = 0,51$ bei $T = 25 \cdot 10^{-10}$

Aethylalkohol: $\kappa = 0,21$ bei $T = 25 \cdot 10^{-10}$

Essigsäure: $\kappa = 0,23$ bei $T = 25 \cdot 10^{-10}$

Leipzig, Februar 1896.