1860. ANNALEN №. 3.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND CIX.

I. *Ueber die Bestimmung der Zähigkeit einer Flüssigkeit durch den Ausflufs aus Röhren;*
von Ed. Hagenbach.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dafs die Fortschritte der neuen Physik hauptsächlich bedingt sind durch die genauere Kenntnifs aller der Thatsachen, die einen Schlufs zu ziehen gestatten auf die moleculare Constitution der Materie; hierher gehören vor allem die *Cohärenzerscheinungen.* Wir können dieselben in zwei Gruppen bringen. Die erste Gruppe enthält die *statischen Cohärenzerscheinungen,* das heifst die, welche sich beim ruhenden Zustande der einzelnen Theilchen zeigen; die zweite hingegen die *dynamischen,* das heifst die, welche beim Verschieben der einzelnen Theilchen über einander auftreten. Was die flüssigen Körper betrifft, so gehören Festigkeit, Elasticität und Capillarität zu der ersten Gruppe; der zweiten aber gehört die *Zähigkeit* oder *Klebrigkeit* an, d. h. die Kraft, die nöthig ist, um eine Flüssigkeitsschicht mit einer gewissen Geschwindigkeit an einer anliegenden vorbeizuschieben. Die Untersuchung dieser Gröfse ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Man mufs sich wundern, dafs bei der grofsen Anstrengung, die sowohl von Mathematikern als Physikern auf die Erklärung der Capillaritätserscheinungen verwendet wurde, die Untersuchung der Zähigkeit nur ziemlich selten den Gegenstand einer physikalischen Arbeit bildete und hauptsächlich nur von Practikern bei der Behandlung des Ausflusses durch Röhren der Erforschung werth geachtet wurde. Und doch ist es keine Frage, dafs dieselbe wesentlich zur genauern Kenntnifs des flüssigen Zustandes gehört, und dafs auch diese Gröfse mit einer Menge anderer Erscheinungen im innigsten Zusammenhange steht; hat ja doch Hr. Wiedemann durch seine Arbeit: *Ueber die Bewegung der Flüssigkeiten im Kreise der geschlossenen galvanischen Säule und ihre Beziehungen zur Elektrolyse* [1]) gezeigt, wie selbst in einem Capitel, wo man es am wenigsten erwartet hätte, die Zähigkeit eine so bedeutende Rolle spielt. Ich brauche wohl nicht zu erwähnen, dafs auch die Praxis mannichfach dieser Gröfse bedarf, sey es zur Berechnung des Ausflusses durch Röhren, oder auch zur Charakteristik verschiedener Flüssigkeiten, wie diefs durch Hrn. Schübler geschah bei der Beschreibung der fetten Oele Deutschlands [2]) und von Hrn. Charles Dollfus bei der Untersuchung des zum Zeugdruck verwendbaren Gummiwassers [3]); das Instrument, das zur Bestimmung der Zähigkeit diente, wurde Viscosimeter genannt.

In der Hydrostatik und Hydrodynamik begnügte man sich lange mit der Newton'schen Definition: *fluidum est corpus omne, cuius partes cedunt vi cuique illatae et cedendo facile moventur inter se.*

Und es erklärt sich daher, dafs die klassischen mathematischen Untersuchungen eines Dan. Bernoulli [4]), D'Alembert [5]) und Euler [6]) in der Hydrodynamik Resultate liefern mufsten, die oft wenig mit der Erfahrung übereinstimmten. Bernoulli begnügt sich einfach an einer Stelle zu sagen:

1) Diese Annalen Bd. XCIX, S. 177.

2) Erdmann, Journal für praktische Chemie, Bd. II, 1828, S. 349.

3) *Bulletin de la société industrielle de Mulhouse No.* 21, *p.* 14 — 23.

4) *Danielis Bernoulli Hydrodynamica.*

5) *D'Alembert, Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, nouvelle édit. Paris* 1770.

6) Euler, *De motu fluidorum lineari potissimum aquae. Nov. comm. acad. scient. imper. Petrop. Tom. XV*, 1770. *p.* 219.

Die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung flüssiger Körper, dargestellt von Leonhard Euler. Uebersetzt mit Zusätzen von H. W. Brandes. Leipzig 1806.

Enormes has differentias maxima ex parte adhaesioni aquae ad latera tubi tribuo, quae certe adhaesio in hujusmodi casibus incredibilem excercere potest effectum[1]).

Was Euler betrifft, so können wir nur Prony beistimmen, wenn er sagt:

On a lieu de regretter et il est même étonnant, que le célèbre Euler, qui dans le cours de ses immenses travaux a souvent dirigé son attention sur des problèmes physico-mathématiques et sur des objects d'application, n'ait pas cherché à traiter la théorie des fluides en ayant égard à la cohésion des molécules et à quelque espèce de frottement; n'eût il fait entrer ces résistances dans l'analyse que sous une forme purement hypothétique, il serait curieux de savoir, comment il envisageait leur effet; mais je ne connais aucun de ses mémoires, où il en soit question.

Es war den practischen Versuchen von Mariotte[2]), Couplet[3]), Bossut[4]), Dubuat[5]), Girard[6]) und den Berechnungen von Prony[7]) und Eytelwein[8]) vorbehalten, in der Hydraulik eine neue Bahn zu brechen durch die Einführung des Widerstandes, der beim Fließen des Wassers eintritt.

Es fragt sich nun, welches die beste Methode sey, die

1) *Hydrodynamica sect. III*, §. 27.

2) *Mariotte, Traité du mouvement des eaux. Nouvelle édition. Paris* 1718.

3) *Couplet, Recherches sur le mouvement des eaux. Histoire de l'ac. royale des sciences. année* 1732.

4) *Bossut, Traité élémentaire d'hydrodynamique. Paris* 1775.

5) *Dubuat, Principes d'hydraulique, verifiés par un grand nombre d'expériences. nouv. édit. Paris* 1786.

6) *Girard, Mémoire sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires et l'influence de la température sur ce mouvement. Mémoire de la Classe des scienc. math. et phys. de l'Institut.* 1813. 14. 15.

7) *Prony, Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes. Paris* 1804.

8) Eytelwein, Untersuchungen über die Bewegung des Wassers. Abhandl. der königl. Akad. d. Wissensch. in Berlin. 1814—15. S. 137.

Zähigkeit einer Flüssigkeit zu bestimmen. Es sind hauptsächlich drei dazu angewendet worden:

1) Schwingungen von Platten in der Flüssigkeit,
2) Schwingungen der Flüssigkeit in U-förmigen Röhren,
3) Ausflufs durch Röhren.

Die schönen Versuche von Hrn. Magnus [1]) gestatten wohl manchen Schlufs auf die Cohäsion der Flüssigkeiten; einer numerischen Berechnung der Zähigkeit können sie aber wohl kaum als Grundlage dienen, da die Rechnungen zu complicirt würden.

Die erste Methode wurde von Coulomb [2]) angewendet; er beobachtete die Abnahme der Schwingungen eines in die Flüssigkeit eingetauchten und an einem dünnen Drahte aufgehängten Körpers und berechnete daraus die Abhängigkeit des Widerstandes von der Geschwindigkeit. Für eine in sich schwingende Scheibe fand er den Widerstand der Geschwindigkeit proportional, besonders wenn die Geschwindigkeit nicht sehr bedeutend war; bei den Schwingungen eines Cylinders hingegen, dessen Axe senkrecht auf der Drehungsaxe stand, so dafs der Cylinder einen Theil des Wassers vor sich wegtreiben mufste, wurde der Widerstand durch zwei Glieder ausgedrückt, von welchen das eine die erste, das andere die zweite Potenz der Geschwindigkeit enthielt.

Später sind von Hrn. Moritz [3]) nach derselben Methode noch einige Versuche angestellt worden, hauptsächlich um den Einflufs der Temperatur zu bestimmen.

Es ist keine Frage, dafs bei diesen Untersuchungen ein ziemlicher Grad von Genauigkeit zu erreichen ist, und dafs auch der Gesammtwiderstand als Function der Geschwindigkeit hiernach bestimmt werden kann. Wenn man sich

1) Magnus, Ueber die Bewegung der Flüssigkeiten. Diese Annalen Bd. 80, S. 3. Hydraulische Untersuchungen. Diese Annalen, Bd. 95, S. 1.

2) *Coulomb. Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides. Mémoire de l'Institut national. Tome III, p.* 261.

3) Moritz, einige Bemerkungen über Coulomb's Verfahren, die Cohäsion der Flüssigkeiten zu bestimmen. Diese Annalen Bd. 70.

aber damit nicht begnügt, sondern die Gesammtwirkung zurückführen will auf die Reibung der einzelnen Schichten der Flüssigkeit an einander, so wird in diesem Falle die Rechnung sehr complicirt, hauptsächlich weil sich die Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung ändert, und weil, wenn man nicht ein unendlich grofses Gefäfs einführen will, die Gestalt des Gefäfses mit in Rechnung gezogen werden mufs.

Aehnliche Einwürfe lassen sich gegen die Methode erheben, die Zähigkeit zu bestimmen aus der Abnahme der Schwingungen in einer U-förmigen Röhre. So viel mir bekannt, hat zuerst Lambert [1]) diese Methode zur Bestimmung der Zähigkeit vorgeschlagen.

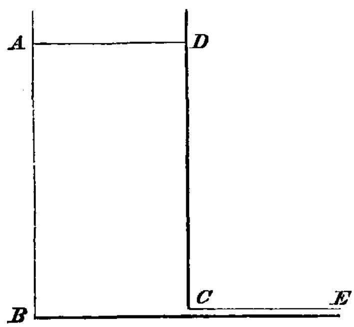
Ganz anders verhält es sich mit der dritten Methode, die Zähigkeit einer Flüssigkeit durch den Ausflufs aus Röhren zu bestimmen. Diese Methode gewährt so grofse Vortheile vor den beiden andern, dafs ich mich auf sie allein beschränken werde. Beim Fliefsen einer Flüssigkeit unter constantem Druck durch eine cylindrische Röhre, fallen offenbar die obigen Einwendungen weg, indem wir eine geradlinige und gleichförmige Bewegung und zu gleicher Zeit eine leicht in Rechnung zu bringende Gestalt des Gefäfses haben. Unsere Hauptaufgabe wird also seyn, die Theorie des Ausflusses einer Flüssigkeit unter constantem Druck durch eine gerade cylindrische Röhre zu ermitteln.

Es fehlt durchaus nicht an theoretischen und noch weniger an experimentellen Untersuchungen über diesen Gegenstand, und doch bleibt noch vieles zu leisten übrig, besonders was die Uebereinstimmung der Theorie mit den empirisch gefundenen Formeln betrifft. Vor Allem aber möchte man sich wundern, dafs, einige Untersuchungen von Hrn. Baurath Hagen abgerechnet, nirgends der Versuch gemacht worden ist, die Zähigkeit einer Flüssigkeit auf den numerischen Werth der Kraft zurückzuführen, die zur Verschiebung zweier Flüssigkeitsschichten nöthig ist; erst

1) *Lambert, sur les fluides considérés relativement à l'hydrodynamique. Mémoires de l'Acad. de Berl.* 1784.

wenn diefs geschehen, kann es möglich seyn, den Zusammenhang zwischen der Zähigkeit und der Temperatur, der Menge eines aufgelösten Salzes u. s. w. einer genauen Prüfung zu unterwerfen. Die gegenwärtige Arbeit beschränkt sich darauf, die Theorie des Ausflusses einer Flüssigkeit durch eine Röhre so zu entwickeln, dafs daraus *der numerische Werth der Kraft* bestimmt werden kann, *welche nöthig ist, um zwei Flüssigkeitsschichten mit einer bestimmten constanten Geschwindigkeit über einander zu verschieben.*

Es sey $ABCD$ ein Gefäfs, in welchem die Flüssigkeit auf dem unveränderlichen Niveau AD gehalten werde; eine cylindrische Röhre CE, die an das Gefäfs angesetzt ist, dient zum Ausflusse der Flüssigkeit. Die Höhe des Niveaus im Gefäfse $ABCD$ über der Oeffnung E, deren Durchmesser im Vergleich zur Höhe DC verschwindet, nennen wir die Druckhöhe und bezeichnen sie mit h. Diese Druckhöhe hat nun offenbar zweierlei zu leisten, sie mufs erstens der ausfliefsenden Flüssigkeit ihre Geschwindigkeit ertheilen, und zweitens den Widerstand überwinden, der durch die Reibung der Flüssigkeit in der Röhre verursacht wird. Wir theilen daher unser h in zwei Theile, in die Geschwindigkeitshöhe h' und in die Widerstandshöhe h'', so dafs also:



$$\text{I.}\quad h = h' + h''.$$

Worin besteht nun der Widerstand, der beim Fliefsen der Flüssigkeit durch die Röhre auftritt?

Derselbe kann von drei Ursachen herrühren:

1) Von der Reibung der Flüssigkeit gegen die feste Wand, und
2) von der Reibung der einen Flüssigkeitsschicht gegen die anliegende.

Dafs bei den Flüssigkeiten, welche die Gefäfswand benetzen (und diese allein fallen in das Gebiet der gegenwärtigen Untersuchung) eine Verschiebung der Flüssigkeitsschichten an einander stattfindet, unterliegt nicht dem geringsten Zweifel, da die oberflächlichste Betrachtung des fliefsenden Wassers in Flüssen, Canälen und Röhren zeigt, dafs die verschiedenen Flüssigkeitsfäden nicht dieselbe Geschwindigkeit besitzen. Wir betrachten daher zuerst den Widerstand, den die gegenseitige Verschiebung der Flüssigkeitstheilchen verursacht, und werden nachher zeigen, dafs neben diesem Widerstande der von der Reibung an der Wand herrührende ganz verschwinden mufs.

Wir zerlegen uns den Flüssigkeitscylinder der Ausflufsröhre in eine Anzahl concentrischer Schichten, deren Wand nur aus je einer Molecülschicht bestehen soll. Die gröfste Geschwindigkeit besitzt offenbar der Flüssigkeitsfaden, welcher die Axe der Röhre bildet und die Geschwindigkeit einer Schicht wird um so geringer seyn, je weiter sie von der Axe entfernt ist, die geringste Geschwindigkeit hat natürlich die Schicht, welche unmittelbar die Wand berührt. Nennen wir v die Geschwindigkeit und ϱ die Entfernung der Schicht von der Axe, so haben wir:

$$v = f(\varrho)$$

und die Aufgabe wird seyn, die Form dieser Function zu bestimmen. Hr. Hagen [1]) hat angenommen, dafs die Geschwindigkeit der Schicht ihrer Entfernung von der Wand proportional sey, es wird jedoch durch diese Annahme etwas eingeführt, was erst zu bestimmen ist.

Jede Schicht reibt sich nun mit den beiden anliegenden, der inneren und der äufseren; durch die Reibung mit der inneren Schicht wird eine Kraft entwickelt, die nach aufsen geht, wir nehmen diese Richtung positiv; durch die Reibung mit der äufseren Schicht hingegen erhalten wir eine negative Kraft; die Summe dieser beiden giebt die in Folge der Reibung auf die Flüssigkeitsschicht einwirkende Kraft.

Wovon hängt nun diese Reibung ab?

1) Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren von G. Hagen. Diese Annal. Bd. 46, S. 423.

Mehrere Versuche beweisen, dafs diese Reibung von dem Drucke unabhängig ist [1]), sie ist ferner proportional der Oberfläche, denn die Unabhängigkeit von der Oberfläche bei der Reibung fester Körper ist nur scheinbar, da man den Druck nicht auf die Einheit der Oberfläche sondern im Ganzen berechnet und sich somit die Oberfläche schon als Factor im Drucke befindet. Was nun die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit betrifft, so nehmen wir an, die Reibungskraft sey der relativen Geschwindigkeit beider Schichten proportional. Diese Annahme läfst sich zwar dadurch rechtfertigen, dafs man sagt, bei doppelter Geschwindigkeit mufs ein Theilchen von doppelt so vielen andern losgerissen werden; bewiesen wird aber diese Annahme am besten dadurch, dafs man durch ihre Einführung Formeln findet, die mit der Erfahrung übereinstimmen.

Ermitteln wir nun die Gröfse dieses Reibungswiderstandes.

Die Länge der Röhre sey l, der Radius r, die Anzahl der Molecüle, die bei der betreffenden Flüssigkeit auf die Längeneinheit gehen, n und somit $\frac{1}{n}$ die Entfernung zweier Schichten; die Geschwindigkeit sey v und die Entfernung unserer Schicht von der Axe ϱ.

Die Geschwindigkeit der nächst inneren Schicht wird:

$$\begin{aligned} v' &= f\left(\varrho - \frac{1}{n}\right) \\ &= f(\varrho) - \frac{df(\varrho)}{d\varrho} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 f(\varrho)}{d\varrho^2} \cdot \frac{1}{n^2} - \ldots \\ &= v - \frac{dv}{d\varrho} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 v}{d\varrho^2} \cdot \frac{1}{n^2} - \ldots \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit der nächst äufseren Schicht:

$$v'' = v + \frac{dv}{d\varrho} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 v}{d\varrho^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots$$

1) *Coulomb. Mém. de l'Institut. Tome III, p.* 287.
Darcy, Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Paris 1857.
Se trouve aussi dans les mémoires des divers savants. Tome XV. pag. 141.

Die Geschwindigkeitsunterschiede (relativen Geschwindigkeiten) sind somit:

$$v' - v = -\frac{dv}{d\varrho} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2v}{d\varrho^2} \cdot \frac{1}{n^2} - \ldots$$

$$v'' - v = \frac{dv}{d\varrho} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2v}{d\varrho^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Die Kraft, welche nöthig ist, um eine Flüssigkeitsschicht von der Dicke eines Molecüls und der Einheit der Oberfläche mit der Einheit der Geschwindigkeit an einer anderen Schicht zu verschieben, nennen wir k; dieses k multiplicirt mit $v' - v$ und mit der inneren Oberfläche unserer Schicht: $2\pi\left(\varrho - \frac{1}{2n}\right) . l$ giebt die innere Reibung:

$$r' = k 2\pi \left(\varrho - \frac{1}{2n}\right) . l \left(-\frac{dv}{d\varrho} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2v}{d\varrho^2} \cdot \frac{1}{n^2} - \ldots\right)$$

während die äufsere Reibung:

$$r'' = k 2\pi \left(\varrho + \frac{1}{2n}\right) . l \left(\frac{dv}{d\varrho} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2v}{d\varrho^2} \cdot \frac{1}{n^2} - \ldots\right)$$

Somit wird die in Folge der Reibung auf die Flüssigkeitsschicht einwirkende Kraft:

$$r = r' + r'' = 2\pi l k \left(\varrho \frac{d^2v}{d\varrho^2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{dv}{d\varrho} \cdot \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 2\pi l k \frac{1}{n^2} \left(\varrho \frac{d^2v}{d\varrho^2} + \frac{dv}{d\varrho}\right)$$

wenn wir nämlich, wie diefs bei der Kleinheit von $\frac{1}{n}$ geschehen darf, die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen.

Da wir nun gleichförmige Bewegung in der Röhre haben, so mufs dieser Kraft durch den der Widerstandshöhe h'' entsprechenden Druck das Gleichgewicht gehalten werden dieser Druck ist gleich:

$$2\pi\varrho \frac{1}{n} h'' P s$$

wenn P das Gewicht der Volumeneinheit Wasser und s das specifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet. Somit haben wir folgende Gleichung:

$$\text{II.}\quad 2\pi\varrho\frac{1}{n}h''Ps+2\pi lk\frac{1}{n^2}\left(\varrho\frac{d^2v}{d\varrho^2}+\frac{dv}{d\varrho}\right)=0$$

oder:

$$\frac{d^2v}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dv}{d\varrho}+\frac{h''Psn}{lk}=0$$

Diese Gleichung dient nun zur Bestimmung des v als Function von ϱ.

Wir müssen nun noch die Gränzbedingungen aufsuchen.

Es ist leicht einzusehen, dafs die Geschwindigkeit am Rande der Röhre gleich 0 sey. Es folgt diefs schon mit ziemlicher Sicherheit aus dem Umstande, dafs in engen Röhren von verschiedener Substanz die Flüssigkeit auf gleiche Art fliefst, sobald nur die Röhren glatt sind und von der Flüssigkeit benetzt werden. Es geht diefs auch ferner hervor aus der Beobachtung von Canälen und Flüssen, wo man deutlich am Rande eine ruhende Schicht wahrnehmen kann. Es läfst sich aber dieser Satz auch beweisen, sobald man nur annimmt, dafs die Reibung zwischen einer Glas- oder Metallschicht und einer Wasserschicht eine Kraft von derselben Ordnung sey wie die Reibung zweier Wasserschichten, was allerdings nicht immer angenommen worden ist [1]). Nehmen wir nämlich an, die Randschicht habe eine endliche Geschwindigkeit, so würde eine zurückhaltende Reibungskraft auf sie wirken, die einer endlichen Geschwindigkeit proportional ist, und eine vorwärtsziehende Reibungskraft, die einem unendlich kleinen Geschwindigkeitsunterschiede proportional ist; da nun aber der Druckkraft bei allen andern Schichten das Gleichgewicht gehalten wird durch die Differenz zweier Kräfte, die unendlich kleinen Geschwindigkeitsdifferenzen proportional sind, so mufs offenbar auch bei der Randschicht die Geschwindigkeit nur unendlich klein also für die Rechnung gleich 0 seyn. Wir haben somit als erste Gränzbedingung:

$$a)\ \text{für}\ \varrho=r \qquad v=0$$

1) *Darcy*, Recherches pag. 169: *Ces deux forces de l'adhérence et de la cohésion sont, on le voit, d'un ordre différent et sans mesure commune.*

Die zweite Gränzbedingung betrifft den mittleren Faden; bei diesem mufs $\frac{dv}{d\varrho} = 0$ seyn, denn, fände das nicht statt, so hätten wir hier, wo nur eine äufsere Reibung vorhanden ist, eine der Gröfse $\frac{1}{n}$ proportionale zurückhaltende Kraft; bei allen andern Schichten hatte der Druck nur eine der Gröfse $\frac{1}{n^2}$ proportionale Widerstandskraft zu überwinden also wird diefs auch beim mittleren Faden der Fall seyn müssen; somit haben wir als zweite Gränzbedingung:

$$b)\ \text{für}\ \varrho = 0$$
$$\frac{dv}{d\varrho} = 0$$

Wir gehen nun über zur Integration der Gleichung II; und führen zu diesem Zweck in die Gleichung ein:

$$v = y - \frac{h' Psn}{4lk}\varrho^2$$

und erhalten:

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{dy}{d\varrho} = 0$$

oder: $\frac{dy}{d\varrho} = \frac{\text{const}}{\varrho}$

da nun für: $\varrho = 0$

$$\frac{dv}{d\varrho} = 0$$

und somit auch: $\frac{dy}{d\varrho} = 0$

so mufs $\text{const} = 0$

woraus $y = c$

wo c constant.

Das Integral unserer Gleichung ist somit:

$$v = -\frac{h'' Psn}{4lk}\varrho^2 + c$$

und da für $\varrho = r$

$$v = 0$$

$$\text{III.}\quad v = \frac{h'' Psn}{4lk}(r^2 - \varrho^2)$$

Wir könnten zu dieser Gleichung auch auf folgende etwas einfachere Art gelangen.

Nehmen wir den vollen Wassercylinder mit dem Radius ϱ, so wirkt auf ihn die Reibungskraft:

$$\frac{dv}{d\varrho}\cdot\frac{1}{n}2\pi\varrho lk$$

und die Druckkraft:

$$h''\pi\varrho^2 s P.$$

Wir haben somit die Gleichung:

$$\frac{dv}{d\varrho}=-\frac{\varrho h'' n s P}{2lk}$$

$$v=-\frac{h'' P s n}{4lk}\varrho^2+\text{const.}$$

$$v=\frac{h'' P s n}{4lk}(r^2-\varrho^2)$$

Späterer Betrachtungen halber haben wir obige Behandlung vorgezogen [1]).

Es folgt aus Gleichung III, dafs die in einer bestimmten Zeit ausgeflossene Wassermenge der Inhalt eines Umdrehungsparaboloïdes ist. Es sey nun V das Volumen des ausgeflossenen Wassers, so ist:

$$V=-\pi\int_{\varrho=0}^{\varrho=r}\varrho^2\,dv$$

1) An dieser Stelle mufs ich nun kurz eine »Note« von Hrn. Verdet erwähnen, die er zum französischen Auszuge aus der Arbeit von Hrn. Wiedemann hinzufügte. (*Annales de Chim. et de Phys. III. Série. Tome* 52, *pag.* 253.) Diese Note ist dadurch hervorgerufen worden, dafs die Veröffentlichung meiner in einer Anmerkung von Hrn. Wiedemann erwähnten Arbeit leider etwas verzögert wurde. Hr. Wiedemann hat sich in seinen Entwickelungen nur auf das beschränkt, was zu seinen Folgerungen unbedingt nöthig war; mit meinen Entwickelungen wird sich Hr. Verdet nun wohl einverstanden erklären. Was überdiefs die Behauptung betrifft, dafs $k.\frac{d^2v}{d\varrho^2}$ die Kraft (*force motrice*) und nicht die Beschleunigung (*force accélératrice*) sey, so hängt das von der Definition ab. Ich habe allerdings vorgezogen, als Maafs für die Zähigkeit die Kraft (*force motrice*) einzuführen, die zur Verschiebung nöthig ist; warum sollte es aber nicht auch erlaubt seyn, die Beschleunigung (*force accélératrice*) als Maafs einzuführen? Die letztere ist natürlich gleich der ersteren, dividirt durch die Masse der Schicht; weshalb denn auch in dem Resultate des Hrn. Wiedemann in dem Factor von $(r^2-\varrho^2)$ das specifische Gewicht der Flüssigkeit auftritt.

und da:

$$dv = -\frac{h'' P n s \varrho d\varrho}{2lk}$$

so folgt:

$$\text{IV.} \quad V = \frac{\pi h'' P s n r^4}{8lk}$$

das heifst:

Die ausgeflossene Flüssigkeitsmenge ist proportional der Widerstandshöhe, der vierten Potenz des Radius und umgekehrt proportional der Länge der Röhre.

Nimmt man enge und lange Röhren, so wird die Geschwindigkeitshöhe gegen die Widerstandshöhe verschwinden, und wir dürfen h an die Stelle von h'' setzen; dann folgt:

$$V = \frac{\pi P s n}{8k} \cdot \frac{h r^4}{l}$$

Diefs stimmt nun vollkommen mit der Formel, die von Hrn. Poiseuille [1]) durch eine grofse Anzahl von Versuchen mit Wasser bestimmt wurde, ohne dafs er dabei durch irgendwelche theoretische Betrachtungen geleitet war; wir werden daher die obige Formel die Poiseuille'sche Formel nennen [2]). Die Versuche von Hrn. Poiseuille stimmen innerhalb einer gewissen Gränze, auf die wir später zurückkommen werden, so genau mit der angegebenen Formel, dafs an der Richtigkeit derselben nicht im Geringsten gezweifelt werden kann; man mufs sich darum um so mehr wundern, dafs in späteren deutschen Arbeiten über denselben Gegenstand, wie z. B. in der des Hrn. Hagen [3]) keine

1) *Poiseuille, Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. Mémoires de divers savants. Tome IX, p.* 433.

2) Navier hat eine elegante mathematische Arbeit über das Fliefsen des Wassers in Röhren geschrieben; er findet für enge Röhren:

$$V = \text{const.} \frac{r^3 h}{l}$$

was nicht mit der Erfahrung stimmt. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. Mém. de l'Acad. royal. des sciences. Tom. VI* 1823.

3) Hagen, Ueber den Einflufs der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren. Abh. der königl. Akadem. d. Wiss. zu Berlin. 1854. Math. Abth. S. 17.

Rücksicht auf die Poiseuille'sche Arbeit genommen wurde. Man wird es daher natürlich finden, wenn ich es für überflüssig hielt, durch eigene Versuche die Bestätigung der obigen Formel zu liefern; besonders da mir die Hülfsmittel nicht zu Gebote standen, um auch nur annäherungsweise denselben Umfang und dieselbe Präcision meinen Versuchen zu geben, welche sie durch die Poiseuille'sche Arbeit erlangt haben. Um jedoch einerseits eine eigene Einsicht in die bei solchen Versuchen zu beobachtenden Umstände zu erlangen und andererseits die Gränzen deutlich zu erkennen, wo die Abweichung von der Poiseuille'schen Formel eintritt, habe ich dennoch einige Versuche mit gläsernen Capillarröhren und Wasser vorgenommen; ich machte sie im Laboratorium des Hrn. Wiedemann, dem ich für die mir gegebene Anleitung den aufrichtigsten Dank hier ausspreche.

Die Versuche wurden mit sehr einfachen Hülfsmitteln angestellt. Ein gläserner Cylinder von etwas über zwei Fufs Höhe diente als Druckgefäfs, unten befand sich eine durch einen Hahn verschliefsbare Oeffnung, in welche die Röhren eingesetzt werden konnten; die Höhe im Druckgefäfs wurde dadurch constant erhalten, dafs aus einem höher stehenden mit einem Hahn versehenen Mariotte'schen Gefäfse so viel Wasser zugelassen wurde als durch die Ausflufsröhre abflofs, was leicht regulirt werden konnte. Die Längen der Röhren wurden direct gemessen und ihre Durchmesser aus dem Gewichte des darin enthaltenen Quecksilbers berechnet. Dafs solche Röhren ausgelesen wurden, bei welchen der Durchmesser möglichst constant war, und dafs dieselben auf das sorgfältigste gereinigt wurden, versteht sich von selbst.

Bedeutet l die Länge der Röhre, r den Radius derselben, beides in Centimetern; M die Ausflufsmenge in Grammen, t die zum Ausflufs der Menge M nöthige Zeit, so dafs $\frac{M}{t}$ unserer Gröfse V proportional ist, und τ die Temperatur des Wassers in Centigraden, so haben wir folgende Tabelle:

r und h constant.

$r = 0^{cm},05502$ $h = 29^{cm},05$

	l	$\frac{M}{t}$	$\frac{M}{t}.l$	τ
	cm	gr		0
1)	39,75	0,2509	99,75	19,7
2)	38,35	0,2607	99,98	19,7
3)	35,44	0,2826	100,12	19,7
4)	33,11	0,3234	107,1	20,2
5)	28,59	0,3507	100,3	20,4
6)	25,82	0,3845	99,3	20,2
7)	23,09	0,4174	96,9	19,8
8)	20,72	0,4605	95,4	20,1
9)	17,93	0,5184	92,97	19,6
10)	15,08	0,5910	89,1	19,6
11)	12,10	0,6940	83,97	19,5
12)	9,55	0,7896	75,32	19,7
13)	7,12	0,9083	64,67	19,7
14)	5,45	1,0503	57,22	19,5
15)	4,21	1,148	48,33	19,6
16)	2,86	1,282	36,66	19,5
17)	1,40	1,557	21,8	19,1.

Der Werth von $\frac{M}{t}.l$ bleibt bei den vier ersten Versuchen so ziemlich constant, wenigstens so weit es bei den mit so unvollkommenen Mitteln angestellten Versuchen zu erwarten war. Die grofse Menge beim vierten Versuch rührt gröfstentheils von der höheren Temperatur her, die einen sehr wesentlichen Einflufs hat. Vom vierten Versuche an nehmen die Werthe ab, was also zeigt, dafs die Gränze des Poiseuille'schen Gesetzes nach dem vierten Versuche liegt.

r und l constant.

$r = 0,03094$ $l = 30^{cm},57.$

	h	$\frac{M}{t}$	$\frac{M}{th}$	τ
	cm	gr		0
1)	29,05	0,0286	0,000982	16,8
2)	25,9	0,0258	0,000997	17,3
3)	21,5	0,0210	0,000978	16,3
4)	16,3	0,0159	0,000997	16,2
5)	12,1	0,0118	0,000973	16,3
6)	5	0,0044	0,000978	17,4

Die Abweichungen, welche hier die Werthe $\frac{M}{th}$ zeigen, sind so unregelmäfsig, dafs wir sie nur der ungenauen Beobachtungsmethode zuschreiben können; wir sind also hier innerhalb der Gränze geblieben, die für das Poiseuille'sche Gesetz gilt.

h constant. $h = 29^{cm},05$.

	l	r	$\frac{M}{t}$	$\frac{Ml}{tr^4}$	τ
	cm	cm	gr		0
1)	39,75	0,05502	0,2509	1088000	19,7
2)	30,57	0,03094	0,0286	953900	16,8
3)	20,67	0,0525	0,3462	941900	16,5
4)	3,83	0,01397	0,00941	946100	16,7

Auch hier läfst sich die gröfste Abweichung aus der verschiedenen Temperatur erklären.

Die Poiseuille'sche Formel ist somit auch durch unsere Versuche bestätigt; da nun auch die Rechnung vollkommen mit den Resultaten der Erfahrung übereinstimmt und wir durch die theoretische Formel einen Aufschlufs über die Bedeutung der Constanten erhalten, so kann sie uns dazu dienen, die Zähigkeit auf einen bestimmten numerischen Werth zurückzuführen. Wir haben nämlich:

$$V = \frac{\pi P s n}{8k} \cdot \frac{hr^4}{l}$$

wir können dann beim Versuch eine so lange und enge Röhre nehmen, dafs die Poiseuille'sche Formel als vollkommen richtig betrachtet werden kann; die Gröfsen P, V, s, h, r und l können direct bestimmt werden und somit kann $\frac{k}{n}$ durch Rechnung gefunden werden. k ist die Kraft, die nöthig ist um zwei Flüssigkeitsschichten von der Einheit der Oberfläche mit der Einheit der Geschwindigkeit an einander vorbeizuführen, somit ist $\frac{k}{n}$ die Kraft, die nöthig ist, um dieselbe Flüssigkeitsschicht mit einer n Mal kleineren Geschwindigkeit zu verschieben, das heifst also die Kraft, die nöthig ist, um zwei Flüssigkeitsschichten von der Einheit der Oberfläche mit einer solchen Geschwindigkeit aneinander zu verschieben, dafs die eine in Beziehung auf die andere in der Sekunde um die Entfernung zweier Molecüle vorrückt, diese Gröfse nennen wir die *Zähigkeit* und bezeichnen sie mit z und haben somit:

$$\text{V.} \quad V = \frac{\pi P s}{8 z} \cdot \frac{h r^4}{l}$$

oder:

$$\text{VI.} \quad z = \frac{\pi P s h r^4}{8 V l}$$

Nehmen wir das Quadratmeter als Flächeneinheit, so finden wir für z aus den Poiseuille'schen Versuchen bei:

	gr
0° C.	0,18142
10	0,13351
15	0,11668
20	0,10296
25	0,09162
30	0,08212
35	0,07406
40	0,06718
45	0,06123

Die bedeutende Abhängigkeit von der Temperatur ist auch aus diesen Werthen zu erkennen.

Unsere Hauptaufgabe wäre nun gelöst; wir haben ein bestimmtes Maafs für die Zähigkeit gefunden, und da die Ausflufsversuche sehr leicht anzustellen sind, und die verschiedenen Gröfsen wie Druckhöhe, Länge der Ausflufsröhre, Radius der Ausflufsröhre und Ausflufsmenge mit Leichtigkeit gemessen werden können, so ist die Zähigkeit einer Flüssigkeit eine Gröfse, deren Bestimmung nicht viel schwieriger ist als die des specifischen Gewichtes.

Es handelt sich nun aber noch darum, zu erklären, warum die Poiseuille'sche Formel nur innerhalb gewisser Gränzen sich als richtig erweist. Es sind zwei Einflüsse, die sich hier geltend machen. Erstens ist es natürlich, dafs bei bedeutenderer Geschwindigkeit die Geschwindigkeithöhe nicht mehr gleich Null und somit h nicht mehr für h'' gesetzt werden darf. Zweitens aber tritt bei weiten Röhren und besonders bei weiten Röhren mit rauhen Wänden, neben dem von uns betrachteten Reibungswiderstande ein zweiter Widerstand auf, der unter Umständen sogar zum vorherrschenden werden kann. Es ist leicht einzusehen, dafs nur in engen Röhren mit glatten Wänden die einzelnen Schichten nach der oben betrachteten Weise sich ruhig an einander vorbeischieben werden; wird der Durchmesser gröfser oder die Wände rauh, so treten seitliche Bewegungen, Wirbel, Vibrationen u. s. w. in der Flüssigkeit auf, die natürlich eine gewisse Menge lebendige Kraft verzehren; diesen zweiten Widerstand werden wir den *Erschütterungswiderstand* nennen.

Wir betrachten nun vorerst den Fall, wo die Geschwindigkeitshöhe nicht mehr vernachlässigt werden darf.

Um die Geschwindigkeitshöhe zu erhalten, berechnen wir die lebendige Kraft der in einer Sekunde ausgeflossenen Flüssigkeit und suchen dann die Druckhöhe, welche in der Sekunde diese lebendige Kraft liefern kann.

Die Masse der in einer Sekunde ausgeflossenen Flüssigkeitsmenge der Schicht, die in der Entfernung ϱ von der Axe der Röhre liegt, beträgt:

$$v \, . \frac{p}{g} . \, s \, 2\pi\varrho \, d\varrho$$

(wo g die Beschleunigung der Schwerkraft bedeutet) und somit ihre lebendige Kraft:

$$v^3 \, . \frac{p}{g} . \, s \, 2\pi\varrho \, d\varrho$$

und die lebendige Kraft der in der ganzen Sekunde ausgeflossenen Flüssigkeit:

$$2\pi \frac{p}{g} s \int_0^r v^3 \varrho \, d\varrho$$

Die Geschwindigkeitshöhe sey h'; sie kann in der Zeiteinheit einer Flüssigkeitsmenge $\pi r^2 \frac{P}{g} s \sqrt{2gh'}$ die Geschwindigkeit $\sqrt{2gh'}$ ertheilen und somit ist die lebendige Kraft, welche die Höhe h' liefern kann:

$$\pi r^2 \frac{P}{g} s\,(2gh')^{\frac{3}{2}}$$

Wir haben somit zur Bestimmung von h' die Gleichung:

$$2\pi \frac{P}{g} s \int_0^{r} v^3 \varrho\, d\varrho = \pi r^2 \frac{P}{g} s\,(2gh')^{\frac{3}{2}}$$

oder:

$$2\int_0^{r} v^3 \varrho\, d\varrho = r^2\,(2gh')^{\frac{3}{2}}$$

Führen wir nun für v seinen Werth

$$\frac{h'' P s}{4lz}(r^2 - \varrho^2)$$

oder

$$\frac{(h-h')Ps}{4lz}(r^2 - \varrho^2)$$

ein, und lösen die Gleichung nach h' auf, so erhalten wir:

$$h' = \frac{s^2P^2r^4h + 2^{\frac{16}{3}} g l^2 z^2 \pm \sqrt{2^{\frac{19}{3}} s^2P^2r^4hgl^2z^2 + 2^{\frac{32}{3}} g^2l^4z^4}}{s^2P^2r^4}$$

führen wir diefs ein in den Werth von

$$V = \frac{\pi(h-h')Psr^4}{8lz}$$

so erhalten wir:

$$V = \frac{2^{\frac{7}{3}}\pi\left(-glz \mp \sqrt{2^{-\frac{13}{3}} s^2P^2r^4hg + g^2l^2z^2}\right)}{sP}$$

Da nun V immer positiv ist, so müssen wir bei der Wurzel das $+$Zeichen nehmen und haben also:

$$\text{VII.}\quad V = \frac{2^{\frac{7}{3}}\pi\left(-glz + \sqrt{2^{-\frac{13}{3}} s^2P^2r^4hg + g^2l^2z^2}\right)}{sP}$$

Diefs ist also die Gleichung, welche die Ausflufsmenge der Flüssigkeit bestimmt, wenn auf die Geschwindigkeitshöhe, nicht aber auf den Erschütterungswiderstand, Rücksicht genommen wird, es müssen also dieser Gleichung alle die Versuche genügen, bei welchen wir enge und glatte Röhren haben, und die Geschwindigkeit nicht gar zu grofs wird. Bevor wir zur Vergleichung mit den Versuchen übergehen, wollen wir zwei Gränzfälle betrachten und sehen

1) was aus der Formel wird, wenn l im Vergleich zum r sehr grofs wird; und
2) wenn das l sehr klein wird.

Im ersten Fall wird bei der Gröfse unter dem Wurzelzeichen das erste Glied sehr klein werden im Vergleich zum zweiten, und wir dürfen daher setzen:

$$\sqrt{2^{-\frac{13}{3}} s^2 P^2 r^4 h g + g^2 l^2 z^2} = g l z + \tfrac{1}{2} \frac{1}{g l z} 2^{-\frac{13}{3}} s^2 P^2 h^4 r h g$$

und somit:

$$V = \frac{\pi P s}{8 z} \cdot \frac{h r^4}{l}$$

was nichts anders ist als die Poiseuille'sche Formel, die wir durch Vernachlässigung der Geschwindigkeitshöhe erhalten haben. Es folgt also, dafs bei grofsem l und kleinem r die Geschwindigkeitshöhe vernachlässigt werden darf, was sich übrigens von selbst versteht.

Im zweiten Fall, das heifst wenn l sehr klein wird, erhalten wir:

$$\text{VIII.} \quad V = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\, \pi r^2 \sqrt{2 g h}$$

oder:

$$V = 0{,}7937\, \pi r^2 \sqrt{2 g h}$$

Diefs ist offenbar nichts anders als die bekannte Formel für die Ausflufsmenge bei kurzen Ansatzröhren, indem 0,79 ungefähr der mittlere Werth der Coëfficienten ist, die für diesen Fall gefunden worden sind.

Bevor wir zur Erklärung der verschiedenen Werthe dieses Coëfficienten übergehen, die man bei den Versuchen erhält, müssen wir noch ein Mal sehen, welches denn eigentlich die Voraussetzungen sind, die zur Formel VIII führen. Indem wir in der Hauptformel VII l gleich 0 setzten, machten wir die Reibung gleich Null; es folgt somit, dafs wir zur Gleichung VIII gelangen müssen, wenn wir annehmen, dafs beim Ausflufs keine lebendige Kraft verloren gehe und zu gleicher Zeit, dafs die Geschwindigkeit der Schichten von aufsen nach innen nach dem oben gefundenen Gesetze der Parabel zunehme; oder mit andern Worten, die Reibung ist in diesem Falle so unbedeutend, dafs sie nur dazu dient, die relativen Geschwindigkeiten der Schichten zu bestimmen, ohne einen merklichen Verlust der lebendigen Kraft zu bewirken.

Man pflegt gewöhnlich anzunehmen, dafs sobald die Ausflufsmenge unter $\pi r^2 \sqrt{2gh}$ zu stehen kommt, dann jedes Mal auch eine gewisse Menge lebendiger Kraft verloren gehe [1]); diefs ist jedoch nur richtig, wenn alle Wasserfäden die gleiche Geschwindigkeit haben; dafs aber bei ungleicher Gesehwindigkeit diefs nicht mehr stattfindet, ist leicht zu sehen; wie denn überhaupt in diesem Falle, wo die Geschwindigkeit der einzelnen Schichten verschieden ist, aus derselben Ausflufsmenge sich durchaus nicht auf dieselbe Kraft schliefsen läfst; indem beim Gleichbleiben der Summe von v, die Summe von v^2 nicht auch gleich bleibt.

Wir wollen nun die Formel VIII aus den beiden obengenannten. Bedingungen ableiten.

Die Bedingung der Parabel giebt die Gleichung:

$$A. \quad v = C(r^2 - \varrho^2)$$

und die Bedingung, dafs keine lebendige Kraft verloren geht:

$$B. \quad \int_0^r 2\pi \frac{P}{g} s v^3 \varrho \, d\varrho = (2gh)^{\frac{3}{2}} \pi r^2 \frac{P}{g} s$$

Wenn wir aus diesen beiden Gleichungen C bestimmen und dann in die Gleichung:

$$V = \frac{\pi C r^4}{2}$$

einführen, welche durch Integration der Gleichung A über den ganzen Querschnitt erhalten wurde, so ergiebt sich als Resultat:

1) Weisbach Experimentalhydraulik S. 75.

Donders, Berechnung des Widerstandes bei hydraulischen Versuchen. Archiv zur Natur- und Heilkunde von Donders und Berlin Bd. I, S. 60.

$$V = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\,\pi r^2 \sqrt{2gh}.$$

Hr. Hagen hat auch neuerdings [1]) auf eine ähnliche Art denselben Coëfficienten zu bestimmen gesucht, jedoch von der Annahme ausgehend, dafs die Geschwindigkeit von aufsen nach innen nicht nach dem Gesetze der Parabel sondern nach dem einer geraden Linie zunehme, eine Annahme, die auch einer frühern Arbeit desselben Verfassers [2]) zu Grunde liegt. Dafs diese Annahme nicht richtig seyn kann, ist leicht einzusehen, indem der Widerstand hauptsächlich von dem Unterschiede der Reibung mit der äufseren und der Reibung mit der inneren Schicht herrührt, welcher in diesem Fall gleich Null wird. Auch mufs, wie wir schon früher gezeigt haben, die Curve, welche das Gesetz der Zunahme ausdrückt, die Axe der Röhre senkrecht schneiden, das heifst $\frac{dv}{d\varrho}$ mufs bei der Axe gleich Null seyn, eine Bedingung, welche ebenfalls hier nicht stattfindet. Wollte man aber doch von der Hagen'schen Voraussetzung ausgehen, so hat man zur Bestimmung unseres Coëfficienten statt der Gleichung A die Gleichung:

$$A'.\quad v = C'(r - \varrho)$$

die mit B verbunden den Werth von V geben mufs; wir finden durch die Rechnung:

$$V = \sqrt[3]{\frac{10}{27}}\,.\,\pi r^2\,.\sqrt{2gh}$$

$$= 0{,}7182\pi r^2 \sqrt{2gh}.$$

Wenn Hr. Hagen den Werth:

$$0{,}7662\,.\,\pi r^2 \sqrt{2gh}$$

findet; so bemerken wir nur, dafs er nach unserer Meinung an die Stelle des Werthes:

$$4g\pi\gamma h' c\varrho^2$$

(wo c die mittlere Geschwindigkeit bedeutet) den Werth:

$$4g\pi\gamma h'\varrho^2 \sqrt{4gh'}$$

1) Ueber den Einflufs der Temperatur S. 75, Math. Abh. d. Berl. Akademie 1854.

2) Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren. Diese Ann. Bd. 46, S. 423.

hätte setzen sollen; indem die Menge der lebendigen Kraft, welche die Druckhöhe h' bei dem Querschnitt $\pi\varrho^2$ liefern kann, einen ganz bestimmten Werth hat, ohne von der mittleren Geschwindigkeit abzuhängen.

Andere wie Weisbach [1]) und Morin [2]) leiten den Coëfficienten bei kurzen Ansatzröhren aus dem Verluste der lebendigen Kraft ab, welcher durch den Stofs bewirkt wird, den der schneller fliefsende contrahirte Strahl im Anfang der Ansatzröhre gegen den langsamer fliefsenden am Ende derselben ausübt. Nach unserer Anschauungsweise dient dieser schneller fliefsende contrahirte Strahl nur dazu den mittleren Wasserfäden die gröfsere Geschwindigkeit zu geben, ohne dafs darum ein Stofs stattfindet.

Vergleichen wir nun diesen berechneten Coëfficienten

$$0{,}7938$$

mit den durch den Versuch bestimmten.

Hagen [3]) nimmt als mittlere Zahl

$$0{,}76.$$

Weisbach [4]) giebt an:

$$0{,}815$$

Zeuner [5]):

$$0{,}80885$$

Morin [6]):

$$0{,}82$$

und Bossut [7]):

$$0{,}807,$$

so dafs unser berechneter Coëfficient so ziemlich in der Mitte zwischen diesen steht.

Dafs in vielen Fällen die wirkliche Ausflufsmenge die theoretische übertrifft, erklärt sich durch die Annahme, dafs die kurze Ansatzröhre nicht immer genügt, die Geschwin-

1) Experimentalhydraulik S. 76.
2) *Hydraulique*, 2ième *édit p.* 43.
3) Ueber den Einflufs der Temperatur S. 66.
4) Experimentalhydraulik S. 79. Lehrbuch d. Ingenieur- und Maschinenmechanik, 3. Aufl. Bd. 1, S. 736.
5) Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen. Civilingenieur, Bd. 1, S. 84.
6) *Hydraulique pag.* 45.
7) *Traité d'hydrodynamique*, *Tome* 2, *pag.* 72.

digkeiten der einzelnen Fäden genau nach dem Gesetze des Paraboloïdes zu vertheilen, so dafs die näher am Rande liegenden Schichten eine verhältnifsmäfsig zu grofse und dafür die mehr in der Mitte liegenden eine kleinere Geschwindigkeit haben, wodurch bei gleich bleibender lebendiger Kraft die Ausflufsmenge vermehrt werden mufs. Diefs gilt hauptsächlich für den Fall, wo durch ein besonderes Mundstück die langsamer fliefsenden Randschichten gleichsam abgehalten werden, wie diefs bei einem conoidischen Mundstück der Fall ist [1]).

Wir gehen nun über zur Prüfung der Gleichung VII und wollen sehen, wie weit die für dieselbe Temperatur mit dieser Gleichung gefundenen Werthe von z mit einander übereinstimmen.

Aus VII folgt:

$$\text{IX.} \quad z = \frac{2^{\frac{1}{3}}\pi^2 sPhgr^4 - sPV^2}{2^{\frac{10}{3}}\pi g l V}$$

Wenn wir unsere Versuche, die, wie wir oben gesehen haben, bald von der Poiseuille'schen Formel abweichen, nach dieser neuen Formel berechnen, so erhalten wir folgende Werthe:

$r = 0^{cm},05502 \quad h = 29^{cm},05$

	l	$\frac{M}{t}$	z	τ
	cm	gr	gr	°
1)	39,75	0,2509	0,1028	19,7
2)	38,35	0,2607	0,1024	19,7
3)	35,44	0,2826	0,1019	19,7
4)	33,11	0,3234	0,0945	20,2
5)	28,59	0,3507	0,1003	20,4
6)	25,82	0,3845	0,1005	20,2
7)	23,09	0,4174	0,1026	19,8
8)	20,72	0,4605	0,1024	20,1
9)	17,93	0,5184	0,1031	19,6
10)	15,08	0,5910	0,1040	19,6
11)	12,10	0,6940	0,1060	19,5

1) Weisbach, Experimentalhydraulik, S. 42.

	l	$\frac{M}{t}$	z	τ
	cm	gr	gr	°
12)	9,55	0,7896	0,1120	19,7
13)	7,12	0,9083	0,1206	19,7
14)	5,45	1,0503	0,1206	19,5
15)	4,21	1,1480	0,1285	19,6
16)	2,86	1,2820	0,1408	19,5
17)	1,40	1,5570	0,1215	19,1

Die Werthe von z sind für das Quadratmeter als Flächeneinheit berechnet.

Es bleiben hier die Werthe von z auch nicht constant, sondern nehmen, wenn auch ziemlich unbedeutend, mit der Ausflufsgeschwindigkeit zu. Wir können daraus schliefsen, dafs wenn sich auch die Abweichungen unserer Versuche von der Poiseuille'schen Formel zum gröfsten Theile durch die Berücksichtigung der Geschwindigkeitshöhe erklären lassen, doch noch eine Abweichung stattfindet, die ihre Erklärung nur darin finden kann, dafs bei gröfseren Geschwindigkeiten noch ein Widerstand auftritt, den wir bis jetzt in unserer Rechnung nicht berücksichtigten; es ist das nichts anderes als der schon oben erwähnte Erschütterungswiderstand, den wir am Schlusse unserer Arbeit etwas genauer betrachten werden, und der sich also schon hier zu erkennen giebt.

Um deutlicher zu sehen, wie grofs die Abweichungen unserer Versuche von den Ergebnissen der erhaltenen Formel sind, haben wir mit dem z, das als Mittel aus den drei ersten Werthen der obigen Tabelle erhalten wird, das heifst mit

$$z = 0,1024$$

aus der Formel VII das V für die übrigen Versuche berechnet und dadurch folgende Tabelle erhalten:

$r = 0^{cm},05502. \quad h = 29^{cm},05.$

	l	$\frac{M}{t}$ berechnet	$\frac{M}{t}$ gefunden	Differenz	τ
	cm	gr	gr		0
4)	33,11	0,2998	0,3234	— 0,0236	20,2
5)	28,59	0,3441	0,3507	— 0,0066	20,4
6)	25,82	0,3781	0,3845	— 0,0064	20,2
7)	23,09	0,4183	0,4174	0,0009	19,8
8)	20,72	0,4605	0,4605	0,0000	20,1
9)	17,93	0,5210	0,5184	0,0026	19,6
10)	15,08	0,6015	0,5910	0,0105	19,6
11)	12,10	0,7119	0,6940	0,0179	19,5
12)	9,55	6,8386	0,7896	0,0490	19,7
13)	7,12	0,9956	0,9083	0,0873	19,7
14)	5,45	1,133	1,0503	0,0827	19,5
15)	4,21	1,253	1,148	0,105	19,6
16)	2,86	1,292	1,282	0,010	19,5
17)	1,40	1,586	1,557	0,029	19,1

Wir gehen nun über zur Vergleichung anderer Versuche mit unserer Formel, und wählen zuerst eine Anzahl aus den zahlreichen Versuchsreihen von Poiseuille. Wir haben schon früher bemerkt, dafs die von Hrn. Poiseuille angestellten Versuche nur innerhalb einer gewissen Gränze mit seiner Formel übereinstimmen und dafs diese Gränze da eintritt, wo die Geschwindigkeitshöhe nicht mehr vernachlässigt werden darf. Nach unserer Formel berechnet müssen die Versuche also auch noch über diese Gränze hinaus stimmen. Da jedoch ungefähr in demselben Punkte, wo die Geschwindigkeitshöhe sich geltend macht, auch der später zu behandelnde Erschütterungswiderstand auftritt, so werden sich immer noch Differenzen zwischen den Ergebnissen der Erfahrung und der Berechnung einstellen, die jedoch bedeutend kleiner sind als die Differenzen, welche bei der Berechnung nach der Poiseuille'schen Formel auftreten; die folgende Tabelle giebt eine Zusammenstellung.

In der ersten Columne stehen die Nummern, in der zweiten die Citate und zwar bedeutet die erste Zahl die Seitenzahl in den *Mémoires de l'Académie*, der Buchstabe die von Poiseuille gebrauchte Bezeichnung der Röhre und die letzte Ziffer die Nummer des Versuchs. In der dritten, vierten und fünften Columne befinden sich die Röhrenlängen, Wasserdruckhöhen und Radien in Centimetern, in der sechsten Columne die Ausflufsmenge in Cubikcentimetern; in den beiden letzten Columnen die berechnete Zähigkeit, und zwar zuerst nach meiner Formel und dann nach der von Poiseuille berechnet. Die Temperatur ist 10° C.

	Citate	l	h	r	V	z berechnet nach der eigenen Formel	z berechnet nach der Poiseuille'-schen Formel
		cm	cm	cm	cc	gr	gr
1	461 A 1	10,05	524,8	0,007055	0,003805	0,1334	0,1335
2	462 A' 6	7,58	1005	0,00707	0,009720	0,1334	0,1338
3	463 A'' 1	5,11	133,8	0,00708	0,001973	0,1308	0,1309
4	463 A'' 5	5,11	1054	0,00708	0,01519	0,1331	0,1339
5	464 A''' 1	2,555	527	0,007085	0,01516	0,1330	0,1349
6	465 A^{IV} 1	1,575	33,54	0,007085	0,001543	0,1363	0,1366
7	465 A^{IV} 7	1,575	1054	0,007085	0,04476	0,1388	0,1479
8	466 A^{V} 1	0,955	32,15	0,007085	0,002395	0,1391	0,1391
9	466 A^{V} 5	0,955	262,9	0,007085	0,01858	0,1403	0,1466
10	467 A^{VI} 1	0,6775	33,66	0,007085	0,003484	0,1401	0,1411
11	467 A^{VI} 7	0,6775	1052	0,007085	0,08046	0,1528	0,1909
12	468 B 1	10,005	528,1	0,005655	0,001572	0,1348	0,1348
13	468 B 2	10,005	1005	0,0056525	0,002978	0,1351	0,1352
14	469 B' 4	7,505	263,7	0,00566	0,001057	0,1337	0,1340
15	470 B'' 5	4,9375	1054	0,005665	0,006454	0,1333	0,1337
16	471 B''' 4	2,3575	263,7	0,00567	0,003408	0,1327	0,1332
17	472 B^{IV} 1	0,9	33,67	0,00567	0,001163	0,1302	0,1303
18	472 B^{IV} 6	0,9	526,3	0,005672	0,01720	0,1320	0,1382
19	472 B^{IV} 7	0,9	1053	0,00567	0,03240	0,1350	0,1466
20	473 B^{V} 4	0,39	202,8	0,005675	0,01507	0,1405	0,1406
21	473 B^{V} 7	0,39	1052	0,005675	0,05862	0,1390	0,1874
22	476 C^{IV} 4	1,015	202,4	0,004275	0,002047	0,1271	0,1277
23	477 C^{V} 6	0,6025	526,6	0,004275	0,008594	0,1287	0,1334
24	480 D''' 2	0,995	132,2	0,002179	0,00008774	0,1340	0,1340
25	481 D^{IV} 7	0,335	1050	0,002175	0,002062	0,1323	0,1335
26	484 F' 3	38,3825	66,742	0,032665	0,057405	0,1349	0,1354
27	485 F' 8	20	262,658	0,032665	0,4182	0,1336	0,1403
28	486 F''' 5	5,045	132,365	0,03269	0,6274	0,1475	0,1876
29	487 F^{IV} 2	2,6	16,339	0,03273	0,1689	0,1467	0,1677
30	487 F^{V} 9	1,075	514,662	0,03273	2,342	0,2199	0,9212

Wir lassen nun hier eine Anzahl Versuche folgen, die von Hrn. Hagen ebenfalls mit Wasser angestellt worden sind; wir haben zuerst die pariser Zolle und preufsischen Lothe in Centimeter und Cubikcentimeter ausgedrückt und dann aus diesen Versuchen sowohl nach unseren als nach der Poiseuille'schen Formel das z berechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Citate beziehen sich auf die Abhandlung in diesen Annalen Bd. 46, S. 428. Die römischen Ziffern bedeuten die Beobachtungsreihe und die arabischen die Nummer der Beobachtung.

	Citate	l	h	r	V	z berechnet nach der eigenen Formel	z berechnet nach der Poiseuille'schen Formel	τ
		cm	cm	cm	cc	gr	gr	
1	I. 1	47,326	2,423	0,1275	0,3835	0,1359	0,1385	10°,2 C.
2	I. 2	47,326	9,802	0,1275	1,457	0,1377	0,1476	10 ,2
3	I. 3	47,326	20,608	0,1275	2,790	0,1430	0,1620	10 ,2
4	I. 4	47,326	29,896	0,1275	3,797	0,1468	0,1726	10 ,2
5	I. 5	47,326	40,299	0,1275	4,813	0,1508	0,1836	10 ,2
6	II. 1	108,989	1,3291	0,20059	0,5621	0,1363	0,1379	10 ,5
7	II. 2	108,989	9,6504	0,20059	3,693	0,1415	0,1524	10 ,5
8	II. 3	108,989	20,979	0,20059	7,1685	0,1495	0,1707	10 ,5
9	III. 1	104,67	0,7174	0,2952	1,496	0,1315	0,1361	11
10	III. 2	104,67	2,4552	0,2952	4,551	0,1397	0,1537	11
11	III. 3	104,67	2,937	0,2952	5,277	0,1423	0,1586	11
12	III. 4	104,67	7,1708	0,2952	10,61	0,1599	0,1925	11
13	III. 5	104,67	8,4458	0,2952	12,03	0,1629	0,2000	11

Aus dieser Tabelle läfst sich dieselbe Folgerung ziehen, die sich bei der Berechnung der Poiseuille'schen Versuche ergeben hat, dafs nämlich der bedeutendste Theil der Abweichung von der Poiseuille'schen Formel sich durch die Einführung der Geschwindigkeitshöhe beseitigen läfst. Dafs das z auch mit Berücksichtigung der Geschwindigkeitshöhe keinen constanten Werth erhält, mufs dem Erschütterungswiderstande zugeschrieben werden. Wir sehen ferner, dafs die aus den Versuchen von Hagen abgeleiteten Werthe von z ziemlich genau mit denen übereinstimmen, welche die Berechnung der Poiseuille'schen Versuche giebt, was auch seyn mufs, da die Temperaturunterschiede nur unbedeutend sind. Wir können aus dieser Uebereinstimmung den Schlufs ziehen, dafs auf den Werth von z die Substanz der Röhre keinen Einflufs hat, Hagen bediente sich nämlich kupferner, Poiseuille aber gläserner Röhren. Diese Unabhängigkeit von der Substanz der Röhre zeigt am deutlichsten, dafs, sobald die Wand von der Flüssigkeit benetzt wird, nur die Cohäsionskräfte zwischen den einzelnen Wassertheilchen und nicht auch die Adhäsionskräfte zwischen den Wassertheilchen und der Wand einen Einflufs auf die Ausflufsmenge ausüben.

Hr. Hagen hat in seiner Abhandlung auf theoretischem Wege eine Formel abgeleitet, die bis auf einen gewissen Grad der unserigen ähnlich ist; es sollen nun hier die Unterschiede betrachtet werden, die zwischen den beiden Rechnungsarten stattfinden. Wir stellen zum Vergleich in beiden Formeln h auf die eine Seite und haben aus unserer Gleichung:

$$h = \frac{1}{r^4}\left(\frac{8}{\pi}\frac{z l V}{P s} + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}\pi^2 g} V^2\right)$$

oder ausgerechnet:

$$h = \frac{1}{r^4}(0{,}00003397\, l V + 0{,}00008199\, V^2)$$

während die Formel von Hagen auf das Centimeter als Längeneinheit berechnet ergiebt:

$$h = \frac{1}{r^4}\,(0{,}00003343\,l\,V + 0{,}0001394\,V^2)$$

was sich auch seinen Versuchen anschliefst.

Was die Berechnung der Coëfficienten von V und V^2 betrifft, so ist Hr. Hagen von der Voraussetzung ausgegangen, dafs der Theil, welcher V enthält, die Widerstandshöhe und der Theil, welcher V^2 enthält, die Geschwindigkeitshöhe ausdrückt, was mit unserer Behandlung der Aufgabe übereinstimmt. Nun aber setzt Hr. Hagen auch hier voraus, dafs jede Schicht der anliegenden um gleich viel voraus-eilt, und dafs somit die in der Zeiteinheit ausgeflossene Wassermenge einen Kegel bildet. Wir haben schon weiter oben unsere Gründe angegeben, warum wir uns mit dieser Anschauungsweise nicht verständigen können.

Mit der Berechnung des V^2 enthaltenden Theiles können wir uns auch nicht einverstanden erklären, abgesehen davon, dafs die Annahme des Kegels darauf ihren Einflufs ausübt. Wir müssen nämlich hier dasselbe wiederholen, was wir schon weiter oben bemerkt haben, dafs nämlich die Druckhöhe h bei derselben Oeffnung immer dieselbe lebendige Kraft liefern mufs, wenn nicht durch einen äufseren Widerstand wie Reibung ein Theil der lebendigen Kraft verbraucht, respective in Wärme umgewandelt wird; diese lebendige Kraft ist:

$$\pi r^2 \sqrt{2gh}\,.\,2gh\,\frac{p_s}{g}$$

Berechnen wir mit dieser Voraussetzung und der Annahme des Kegels den Coëfficienten von V^2, so finden wir:

0,0001001

was allerdings nicht mehr so genau mit den Versuchen stimmt.

Beim Vergleich der Formeln stimmen die Coëfficienten von $l\,V$ ziemlich genau, die von V^2 weniger, und zwar ist der unserer Formel kleiner; was natürlich daher rührt, dafs eigentlich der Erschütterungswiderstand noch berücksichtigt werden müfste; und da dieser, wie wir gleich nachher sehen werden, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so würde er auf das V^2 enthaltende Glied einen Einflufs ausüben.

Wir gehen nun über zu den Beobachtungen, die mit weiten Röhren gemacht sind. Wenn wir für dieselben nach unserer Formel die Ausflufsmenge berechnen, so fällt dieselbe bedeutend gröfser aus als die wirkliche durch den Versuch bestimmte Menge, oder, was auf dasselbe herauskommt, wenn wir aus den Versuchen mit weiten Röhren das z nach unserer Formel berechnen, so wird dasselbe zu grofs ausfallen, und zwar im Allgemeinen um so gröfser, je weiter die Röhren und je gröfser die Geschwindigkeit.

Um diefs zu zeigen, wählen wir ein Paar mit Wasser angestellte Versuche von Dubuat [1]). In der ersten Columne steht die Nummer des Versuches von Dubuat. Die Längen sind auf Centimeter und die Volumina auf Cubikcentimeter reducirt.

$l = 98^{cm},129 \quad r = 0^{cm},3271.$

	h	v	z
	cm	cc	gr
38	2,255	6,895	0,1272
37	4,399	11,54	0,1368
36	5,639	13,01	0,1559
35	7,344	15,13	8,1728
34	10,038	17,82	0,1995
33	13,083	20,64	0,2227
30	19,926	26,07	0,2646
29	24,588	30,55	0,2878
28	54,589	47,27	0,3739

Dafs das aus No. 38 abgeleitete z sogar kleiner ausgefallen, als das aus den Poiseuille'schen Versuchen bestimmte, kommt wahrscheinlich daher, dafs Dubuat bei höherer Temperatur als 10° C. experimentirte. Bei diesen Versuchen war der Radius noch nicht sehr grofs. Um zu zeigen, wie weit die Abweichung von unserer Formel gehen

1) *Dubuat, Principes d'hydraulique T. I, p.* 74.

kann, wählen wir ein Paar ebenfalls mit Wasser angestellte Versuche von Darcy und berechnen aus ihnen z; wir wenden in diesem Falle einfach die Formel IV an, da Hr. Darcy mit Manometern die Gröfse der Widerstandshöhe bestimmte.

Die Nummer in der ersten Columne bezieht sich auf die Versuchstabellen von Hrn. Darcy.

$l = 10000^{cm}$

	h	r	V	z
	cm	cm	cc	gr
23	1057,1	1,33	711,9	1,824
145	1680,7	4,095	17054	10,88
172	410,5	12,16	91962	36,60

Sowohl aus den Versuchen von Dubuat als auch besonders aus diesen letzteren ist deutlich zu erkennen, dafs das z nicht mehr constant bleibt, sondern ganz bedeutend zunimmt, indem wir aus dem Versuche No. 172 von Darcy einen beinahe 300 Mal zu grofsen Werth für z berechnet haben. Die Formel, die also die Erscheinungen bei engen Röhren erklärte, pafst nicht mehr für die weiten Röhren. Diefs ist nun auch neben dem praktischen Bedürfnisse hauptsächlich Schuld daran, dafs das Problem über das Fliefsen in Röhrenleitungen ganz selbstständig und unabhängig von dem für die Capillarröhren behandelt wurde. Die meisten Arbeiten hatten dabei einen praktischen Zweck im Auge, nämlich Formeln aufzustellen, die zur Berechnung einer Röhrenleitung dienen sollten. Unsere Aufgabe ist eine vollkommen andere, wir wollen zeigen, dafs dieselben Grundbedingungen, die uns den Aufschlufs über die Erscheinungen der engen Röhren gegeben haben, auch noch für weite Röhren gelten, nur dafs dabei noch neue Umstände hinzutreten, die bei den engen Röhren vernachlässigt bleiben konnten. Wir werden daher auch auf die von Gerstner[1]) Prony[2]), Eytelwein[3]) Weisbach[4]) u. s. w. aufge-

1) Gerstner, Handbuch der Mechanik Bd. II, 1832, S. 176.
2) *Prony, Recherches physico-mathématiques.*
3) Eytelwein, Untersuchungen über die Bewegung des Wassers.
4) Weisbach, Ingenieur- und Maschinenmechanik Bd. I, S. 747.

stellten Formeln nicht weiter eingehen, für die praktische Anwendung sind sie tauglich, aber über den inneren Vorgang beim Fliefsen des Wassers durch eine Röhre geben sie keinen Aufschlufs, besonders da sie nicht die Verschiebung der einzelnen Schichten an einander in Rechnung bringen, sondern fast immer von dem Satze des Parallelismus der Schichten ausgehen und nur den Widerstand betrachten, den das Wasser in Gesammtheit erleidet.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dafs hier bei den weiten Röhren neue Verhältnisse auftreten, die bei der Aufstellung der frühern Formel nicht berücksichtigt wurden; das heifst, es tritt hier noch ein neuer Widerstand dazu, der bei engen Röhren und geringer Geschwindigkeit verschwindet, bei weiten Röhren und grofser Geschwindigkeit jedoch sehr bedeutend werden kann, es ist diefs der schon öfters erwähnte *Erschütterungswiderstand*. Es ist leicht zu sehen, dafs nur bei engen Röhren und geringer Geschwindigkeit alle Theilchen sich geradlinig der Axe der Röhre parallel bewegen werden, bei weiten Rohren und gröfserer Geschwindigkeit werden seitliche Strömungen, Wirbel und vibrirende Bewegungen eintreten, die alle in Folge der dabei entstehenden Reibung eine gewisse Menge der lebendigen Kraft, welche von der Druckhöhe geliefert wird, verzehren werden. Die vibrirenden Bewegungen werden besonders dann eintreten, wenn die Röhrenwände rauh sind und der Durchmesser der Röhre öfters variirt. Alle diese Widerstände fassen wir unter dem Namen des Erschütterungswiderstandes zusammen, da sie ähnlich dem Widerstande sind, den ein Wagen beim Fahren auf rauher Strafse erfährt. Es können sich diese Bewegungen auch in dem ausfliefsenden Strahle zeigen, wie diefs Hr. Hagen beobachtet hat. Er sagt nämlich [1]: »Liefs ich das Wasser frei in die Luft ausströmen, so bildete der Strahl bei kleinerer Druckhöhe eine unveränderte Form, und er hatte in der Nähe der Röhre das Ansehen eines festen Glasstabes; sobald aber bei stärkerem Drucke die Geschwindigkeit die bezeichnete Gränze über-

1) Diese Ann. Bd. 46, S. 424.

stieg, so fing er an zu schwanken und der Ausflufs geschah nicht mehr gleichförmig, sondern stofsweise«.

Dieser Erschütterungswiderstand hängt nun offenbar nicht von der relativen Geschwindigkeit ab, mit welcher eine Schicht der nebenanliegenden voraneilt, sondern von der absoluten Geschwindigkeit derselben, und da ein Theilchen bei doppelter Geschwindigkeit doppelt so viele und zu gleicher Zeit doppelt so starke Stöfse bekommt, so nehmen wir an, es sey dieser Widerstand dem Quadrate von r proportional. Es ist ferner leicht einzusehen, dafs dieser Widerstand von der Substanz der Röhre nicht unabhängig ist und besonders auch von der Rauhigkeit der Röhrenwand abhängen mufs, wie diefs sehr deutlich aus den in sehr grofsartigem Maafsstabe angestellten Versuchen des Hrn. Darcy hervorgeht.

Wir müssen nun die Gröfse des Erschütterungswiderstandes für unsere Schicht entwickeln. Bedeutet a den von der Beschaffenheit der Röhrenwand und dem Radius der Röhre abhängigen Erschütterungswiderstand bei der Einheit der Geschwindigkeit und der Einheit der Masse, so ist derselbe für die Geschwindigkeit v und die Masse $2\pi\varrho\frac{1}{n}l\frac{P}{g}s$, die uusere Schicht besitzt, gleich:

$$2\pi\varrho\frac{1}{n}l\frac{P}{g}s\,a v^2.$$

Es mufs also bei der Gleichung II dieses Glied noch hinzugefügt werden, und zwar mit negativem Zeichen, weil diese Kraft nach innen zu wirkt, wir haben also:

$$\text{X.}\quad 2\pi\varrho\frac{1}{n}h''Ps + 2\pi lk\frac{1}{n^2}\left(\varrho\frac{d^2v}{d\varrho^2}+\frac{dv}{d\varrho}\right) - 2\pi\varrho\frac{1}{n}l\frac{P}{g}s\,av^2 = 0$$

oder

$$\text{XI.}\quad \frac{d^2v}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dv}{d\varrho}-\frac{aPsv^2}{gx}+\frac{h''Ps}{lx}=0.$$

Diefs ist also die Fundamentalgleichung für die Bewegung einer Flüssigkeit in einer Röhre; bei engen Röhren kann a gleich 0 gesetzt werden und dann geht sie in die schon behandelte Differentialgleichung über. Die Integration der Gleichung XI in geschlossener Form ist wohl nicht möglich; die Integration durch Reihen führte mich auch zu keinem Ziele, und ich habe mich daher für einstweilen mit der Behandlung eines Gränzfalles begnügt, was man mir um so eher nachsehen wird, als die Behandlung mit weiten Röhren mehr nur als Anhängsel meiner Arbeit zu betrachten ist; es soll ja nur gezeigt werden, dafs die Resultate, die mit weiten Röhren gefunden wurden, sich mit den von mir ausgesprochenen Ideen über die innere Reibung vollkommen vertragen.

Ich will nämlich den Fall behandeln, wo das a verhältnifsmäfsig grofs wird, d. h. den Fall, wo wir annehmen können, dafs der mittlere Faden annäherungsweise eine Geschwindigkeit hat, die dem Erschütterungswiderstande allein entspricht, und wo also der Reibungswiderstand nur zur Bestimmung der Function dient, nach welcher die Geschwindigkeit von der Mitte nach dem Rande zu abnimmt.

In diesem Falle haben wir für den mittleren Faden:

$$-\frac{aPsv^2}{gz}+\frac{h''Ps}{lz}=0$$

woraus:

$$v=\sqrt{\frac{h''g}{al}}$$

Diefs ist also für diese Voraussetzung die Geschwindigkeit in der Mitte der Röhre.

Am Rande verschwindet hingegen das Glied $\frac{aPsv^2}{gz}$ in unserer Differentialgleichung, und wir haben:

$$\frac{d^2v}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dv}{d\varrho}+\frac{h''Ps}{lz}=0$$

woraus folgt:

$$\frac{dv}{d\varrho}=-\frac{h''Psr}{2lz}$$

Wir haben somit folgende Bedingungen:

$$\text{für } \varrho=0 \quad v=\sqrt{\frac{h''g}{al}}$$

$$\text{für } \varrho=r \quad \frac{dv}{d\varrho}=-\frac{h''Psr}{2lz}$$

Es ist ferner ohne Rechnung die ungefähre Gestalt der Function leicht zu erkennen. Ohne Erschütterungswiderstand wäre dieselbe die Gleichung einer Parabel; in Folge des Erschütterungswiderstandes werden alle Ordinaten verkleinert und zwar am stärksten die in der Mitte, am wenigsten die am Rande, in Folge davon werden wir offenbar eine Curve bekommen, die immerfort ihre convexe Seite nach aufsen kehrt, und die wir gewissermafsen mit einer zusammengedrückten Parabel vergleichen können; es geht daraus hervor, dafs wir zu den obigen Bedingungen und den bekannten Gränzbedingungen, dafs

$$\text{für } \varrho = 0 \quad \frac{dv}{d\varrho} = 0 \text{ und}$$
$$\text{» } \varrho = r \quad v = 0$$

auch noch die bringen können, dafs $\frac{dv}{d\varrho}$ und $\frac{d^2v}{d\varrho^2}$ immer negativ seyn müssen.

Diesen Bedingungen kann nun durch einen elliptischen Bogen genügt werden. Nehmen wir eine Ellipse, deren Hauptaxe mit der Röhrenaxe zusammenfällt, so ist ihre Gleichung:

$$\text{XII.} \quad \varrho^2 = \beta\left(\sqrt{\frac{h''g}{al}} - v - \frac{\left(\sqrt{\frac{gh''}{al}} - v\right)^2}{\alpha}\right)$$

α und β lassen sich durch die oben bezeichneten Bedingungen bestimmen, und wir erhalten durch die Ausführung der Rechnung:

$$\beta = \frac{2Psr^2\sqrt{agh''l} - 4gzl}{gh''Pl}$$

$$\alpha = \frac{2r^2h''Ps\sqrt{agh''l} - 4gh''lz}{r^2ah''Psl - 4lz\sqrt{agh''l}}$$

Da nun:

$$V = -\int_{v=\sqrt{\frac{h''g}{al}}}^{v=0} \varrho^2\, dv$$

so erhalten wir:

$$\text{XIII.}\quad V = \frac{2}{3}\pi r^2 \sqrt{\frac{h''g}{al}} - \frac{2}{3}\frac{\pi z g}{aPs}$$

Und hieraus, wenn wir $V = \pi r^2 c$ setzen, wo c die mittlere Geschwindigkeit bedeutet:

$$\text{XIV.}\quad \frac{a}{g} = \frac{2}{9}\frac{h''}{lc^2} - \frac{2}{3}\frac{z}{sPcr^2} + \sqrt{\frac{4}{81}\frac{h''^2}{l^2c^4} - \frac{8}{27}\frac{zh''}{sPlr^2c^3}}$$

Der Werth von a mufs nun aus den Versuchen bestimmt werden, und wenn unsere Voraussetzung richtig ist, dafs der Erschütterungswiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so müssen wir für dieses α aus einer Anzahl Versuche, die mit Röhren von derselben Beschaffenheit und demselben Durchmesser gemacht sind, constante Werthe erhalten. Wir wählen dazu Versuche mit Röhren von ziemlich bedeutendem Durchmesser, weil sonst die Bedingung nicht eintreten kann, dafs die Geschwindigkeit des mittleren Fadens hauptsächlich nur von dem Erschütterungswiderstande abhängt. Wir geben hier des Beispiels wegen die Berechnung der Versuche No. 166 bis No. 173 von Hrn. Darcy [1]), und da dieser Beobachter durch Manometer direct die Gröfse der Widerstandshöhe bestimmte, so ist es hier nicht nöthig auf die Geschwindigkeitshöhe Rücksicht zu nehmen. Die Temperatur, bei welcher diese Versuche angestellt wurden, beträgt $15\frac{1}{4}^{0}$. Wenden wir den aus den von Poiseuille bei verschiedener Temperatur angestellten Versuchen für diese Temperatur durch Interpolation gefundenen Werth von

$$z = 0^{gr},11594$$

an, so erhalten wir folgendes Resultat, bei dem das a für die Geschwindigkeitseinheit eines Meters und die Masseneinheit eines Grammes berechnet wurde:

1) *Darcy*, *Recherches p.* 58 *et* 59.

$l = 10000^{cm}$ $r = 12^{cm},16$

	h'' cm	c cm	$\frac{a}{g}$
166	9,4	30,7	0,004398
167	20,2	45,2	0,004370
168	47,3	70,7	0,004191
169	115	110,6	0,004170
170	229	154,7	0,004246
171	320	183,3	0,004227
172	410,5	207,3	0,004240
173	1398,1	383,3	0,004226

Als Mittel daraus ergiebt sich:

0,004258.

Weitere Beispiele füge ich hier nicht bei; zahlreiche Berechnungen haben mich überzeugt, dafs bei andern Versuchen, die den oben bezeichneten Bedingungen genügen, das a auch für dieselbe Röhre constant bleibt.

Die Versuche von Hrn. Darcy geben uns ferner ein Mittel an die Hand, zu untersuchen, ob unsere Function der Zunahme der Geschwindigkeit vom Rande nach der Mitte mit der Erfahrung stimmt; indem bei den Versuchen mit obigen Röhren vermittelst einer Pitot'schen Röhre die Geschwindigkeit an einigen Punkten der Röhre bestimmt wurde. Es folgt aus Gleichung XII:

$$v = \frac{-2 + \sqrt{4 + (r^2 - \varrho^2).\left(\frac{r^2 a h'' s^2 P^2}{g l s^2} - 4\sqrt{\frac{a h'' s^2 P^2}{g l s^2}}\right)}}{\frac{r^2 a s P}{g s} - 4\sqrt{\frac{a l}{h'' g}}}.$$

Indem wir aus den Versuchen von Darcy [1]) die Werthe einführen, erhalten wir folgende Tabelle, wobei v die aus unserer Formel berechnete und v' die von Darcy mit Hülfe der Pitot'schen Röhre beobachtete Geschwindigkeit bedeutet:

1) *Recherches p.* 138 *et* 139.

$l = 10000^{cm}$ $r = 12^{cm},16$

h	ϱ	v	v'	$\frac{v}{v'}$
cm	cm	cm	cm	
20,2	0	69,25	56	1,237
	4,5	74,55	52,4	1,232
	8,8	47,79	43,2	1,138
47,3	0	105,8	82,9	1,276
	4,4	98,62	76,7	1,286
	8,8	73,01	65,7	1,111
320	0	275	228,9	1,210
	4,4	256,3	213,3	1,202
	8,8	189,8	181,5	1,045
1398,1	0	573,4	476	1,205
	4,4	534.6	442	1,209
	8,8	395,8	390,6	1,035

Aus dieser Tabelle geht hervor, dafs die berechneten und beobachteten Geschwindigkeiten nicht vollkommen übereinstimmen; die ersteren sind gröfser und zwar ist das Verhältnifs von $\frac{v}{v'}$ für $\varrho = 0$ und $\varrho = 4,4$ so ziemlich constant, während es für $\varrho = 8,8$ ziemlich auffallend abnimmt. Dafs die berechneten v etwas gröfser ausfallen, kann uns nicht befremden, da es sehr wahrscheinlich ist, dafs in der Pitot'schen Röhre das Wasser nicht bis zur vollkommnen Geschwindigkeitshöhe ansteigt. Die Ungleichheit des Verhältnisses $\frac{v}{v'}$ erklärt sich aus dem Umstande, dafs wir bei der Wahl des Ellipsenbogens eine Curve einführten, die sich zu schnell vom Rande entfernt und somit für die Geschwindigkeiten, die näher dem Rande zu liegen, zu kleine Werthe liefert; aus der Differentialgleichung ergiebt sich nämlich, dafs die Function der Geschwindigkeit am Anfang vom Rande her sehr schnell zunimmt und einer solchen Curve entsprechen auch die gefundenen Werthe. Hingegen folgt aus dem beobachteten Werthe von v durchaus nicht, dafs am Rande der Röhre eine endliche Geschwindigkeit stattfindet, wie Hr. Darcy folgerte, sondern nur, dafs schon bei geringer Entfernung vom Rande die Geschwindigkeit bedeutend wird.

Auf die nähere Betrachtung der weiten Röhren, auf die Untersuchung der Abhängigkeit des Erschütterungswiderstandes von der Weite der Röhre und der Beschaffenheit der Wand gehen wir hier einstweilen nicht weiter ein, es genügt uns gezeigt zu haben, dafs unsere Voraussetzungen hinreichen, um auch das Problem der weiten Röhren bis zu einem gewissen Punkte zu lösen; für den praktiscken Gebrauch wird man einstweilen die zu diesem Zwecke aufgestellten Formeln gebrauchen müssen.

Wir stellen hier noch ein Mal die Resultate unserer Arbeit zsammen.

1) *Definition.* Wir bezeichnen mit dem Namen *Zähigkeit* die Kraft, die nöthig ist, um eine Flüssigkeitsschicht von der Dicke eines Molecüls und der Einheit der Oberfläche in einer Sekunde mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Entfernung zweier Molecüle an einer zweiten Schicht vorbeizuschieben.

2) Diese Zähigkeit beträgt für Wasser bei 10° C. und bei dem Quadratmeter als Flächeneinheit:

   0,13351 Grm.

3) Die Zähigkeit nimmt sehr bedeutend mit der Temperatur ab.

4) Die Reibung zwischen zwei Flüssigkeitsschichten ist
   a) unabhängig von dem Druck;
   b) proportional der Gröfse der reibenden Oberfläche;
   c) proportional der relativen Geschwindigkeit beider Schichten.

5) Aus diesen Bedingungen lassen sich die Gesetze für enge Röhren vollkommen ableiten.

6) Auch die Gesetze, die bei weiten Röhren stattfinden, lassen sich aus dieser Reibung erklären, sobald man noch einen *Erschütterungswiderstand* zu Hülfe nimmt.

7) Dieser Erschütterungswiderstand hängt ab von der Beschaffenheit und dem Durchmesser einer Röhre und ist dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional.

Nachdem nun auf diese Weise die *Zähigkeit* einer Flüssigkeit auf eine bestimmte numerische Gröfse zurückgeführt ist, die für jeden gegebenen Fall durch den Versuch mit Leichtigkeit ermittelt werden kann, handelt es sich darum diese Zähigkeit bei verschiedenen Flüssigkeiten näher zu untersuchen. Eine nähere Erforschung ihrer Abhängigkeit von der Temperatur, von der Menge der aufgelösten Substanz bei einer Lösung, ihres Zusammenhangs mit der Capillaritätsconstanten u. s. w. sind die Aufgaben, die ich mir zunächst gestellt habe.

II. *Ueber die chemische Harmonika; von Dr. Sondhaufs.*

(Schlufs von S. 43.)

9. Die Entstehung des Tons der chemischen Harmonika, besonders die Bildung von Flageolettönen, hängt aufserdem noch von der Stelle ab, an welcher die Flamme auf die in Schwingungen zu versetzende Luftsäule wirkt. Oft entsteht, wenn man eine Röhre nur wenig über die Flamme senkt, wie schon früher bemerkt worden ist, zunächst ein Flageoletton, und erst wenn man die Röhre tiefer hält, spricht der Grundton derselben an; manchmal tritt statt desselben wohl auch ein anderer Flageoletton ein. Auch auf die Höhe des Grundtons der Röhre hat die Stelle, wo die Flamme während seiner Erzeugung sich befindet, entschiedenen Einflufs. Wenn der Ton erst anspricht, wenn die Flamme sich in der Mitte der Röhre befindet, so ist er in der Regel eine kleine, manchmal sogar eine grofse Sekunde höher, als in dem Falle, wo die Flamme die Energie besitzt, den Grundton schon in dem untersten Theile der Röhre zu erregen. Wenn man in diesem Falle