9. *Ueber die Bewegung eines gespannten Fadens, welcher gezwungen ist, durch zwei feste Punkte mit einer constanten Geschwindigkeit zu gehen, und zwischen denselben in Transversalschwingungen von geringer Amplitude versetzt wird; von Rudolf Skutsch.*

Für die transversale Bewegung eines völlig biegsamen, mit constanter Kraft T gespannten Fadens, dessen Längeneinheit die Masse m besitzt, gilt mit $r^2 = T/m$ die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = r^2 \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} \,.$$

Hierbei ist das rechtwinkelige Coordinatensystem so gewählt, dass seine x-Axe dem nur unendlich wenig von der geradlinigen Form abweichenden Faden parallel ist, und jedem Punkte des letzteren ein bestimmter Abscissenwerth dauernd entspricht. Ihre Integration führt bekanntlich auf die Gleichung:

$$(2) \qquad y = \Gamma(r t + x) - \Delta(r t - x),$$

wo Γ und Δ willkürliche Functionen sind.

Der Fall, dass es sich um Schwingungen eines zwischen zwei festen Punkten eingespannten Fadens handelt, ist bereits von d'Alembert mit dem Erfolge untersucht worden, dass es möglich wurde, die Form des schwingenden Fadens zu jeder Zeit aus einem beliebigen bekannten Anfangszustand abzuleiten.[1])

Das hier vorliegende Problem, welches neben theoretischem Interesse vielleicht auch die Möglichkeit einer technischen Anwendung bietet, ist ohne besondere Schwierigkeit durch eine Abänderung oder vielmehr Verallgemeinerung der d'Alembert'schen Rechnungen zu lösen, wie sie übrigens zwecks mathematischer Gestaltung des Doppler'schen Princips für akustische und optische Wellen theilweise schon von Klinkerfues vorgenommen worden ist.[2]) Wir transformiren zu diesem

---

1) Mémoires de l'Académie de Berlin pour 1747, p. 214.

2) Göttinger Nachrichten 1868, p. 469.

Behuf das Coordinatensystem so, dass sein Anfangspunkt dauernd mit dem einen der beiden festen Punkte zusammenfällt, an welchen sich der Faden entlang bewegt. Ist die Geschwindigkeit des Fadens gegen diese Punkte $+c$ und bezeichnen wir die Abscissen in dem neuen Coordinatensystem mit ξ, so erhalten wir wegen $x = \xi - ct$:

$$(3) \qquad y = \Gamma[(r-c)t + \xi] - \Delta[(r+c)t - \xi].$$

Da y für $\xi = 0$ verschwindet, so wird

$$(4) \qquad \Gamma[(r-c)t] = \Delta[(r+c)t];$$

also

$$(5) \qquad y = \Gamma[(r-c)t + \xi] - \Gamma\left[(r-c)t - \frac{r-c}{r+c}\cdot\xi\right].$$

Hat nun der zweite feste Punkt die Abscisse $\xi = +l$, so verschwindet y auch für $\xi = +l$, und es wird:

$$(6) \qquad \Gamma[(r-c)t + l] = \Gamma\left[(r-c)t - \frac{r-c}{r+c}\cdot l\right].$$

Somit ist Γ eine periodische Function mit der Periode

$$l + \frac{r-c}{r+c}\cdot l = \frac{2rl}{r+c}.$$

Zufolge Gleichung (5) wiederholen sich also die zu bestimmtem ξ gehörigen Werthe von y, so oft die Zeit t um den Betrag

$$(7) \qquad \tau = \frac{2rl}{(r+c)(r-c)}$$

bez. ein ganzes Vielfache desselben zunimmt, und es ist τ die Schwingungsdauer des Fadens. Ein Vergleich mit der Schwingungsdauer des gleich langen eingespannten Fadens

$$\tau_0 = \frac{2l}{r}$$

ergiebt

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{r^2 - c^2}{r^2} = 1 - \frac{c^2}{r^2}.$$

Sind z und z_0 die entsprechenden Schwingungszahlen, so wird zufolge der Gleichung

$$(8) \qquad z = z_0\left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right)$$

die Abhängigkeit der Schwingungszahl z von der Geschwindigkeit c in einem rechtwinkeligen Coordinatensystem durch eine Apollonische Parabel nach Fig. 1 dargestellt.

Es mag nun zunächst bemerkt sein, dass auf den berechneten Werth τ auch eine sehr einfache Betrachtung führt. Wie man nämlich die Schwingungsdauer τ_0 des eingespannten Fadens als die bei einer Geschwindigkeit r nothwendige Zeit erhält, um den Weg l zweimal zurückzulegen, so ergiebt sich die Schwingungsdauer τ für den mit einer Geschwindigkeit c an den festen Punkten sich entlang bewegenden Faden als die Summe der Zeiten, in welchen der Weg l einmal mit der Geschwindigkeit $r + c$ und einmal mit der Geschwindigkeit $r - c$ zurückgelegt wird, nämlich

$$\tau = \frac{l}{r+c} + \frac{l}{r-c} = \frac{2rl}{(r+c)(r-c)} .$$

Der Grenzfall $r = c$, welcher auf $\tau = \infty$ führt, ist von Interesse. Es wird dann in Gleichung (5) y von t unabhängig, d. h. der Faden behält eine ihm ertheilte Abweichung von der geraden Linie dauernd bei. Die Erklärung hierfür ist darin zu finden, dass in diesem Falle die jedem einzelnen Fadentheilchen durch die Spannkräfte T ertheilten Transversalbeschleunigungen gerade hinreichen, um eine Bahnkrümmung desselben herbeizuführen, ebenso gross als die Fadenkrümmung an der betreffenden Stelle. Es tritt also im Zeitdifferential jedes Fadentheilchen an Stelle des Nachbartheilchens, ohne dass dadurch die Form des Fadens verändert wird, ein bekannter Satz, welcher im Gegensatz zu den bisherigen Ergebnissen die Verallgemeinerung von nahezu geradlinigen Fadenformen auf beliebig, auch räumlich gekrümmte zulässt und auch in der Form ausgesprochen werden kann: „Jede Curve ist Seilcurve für die Fliehkräfte der Theilchen eines gleichmässig mit der Masse m pro Längeneinheit belegten Fadens, welchen man sich mit der Geschwindigkeit c an der Curve entlang gezogen denkt; die Seilkraft ist längs des ganzen Fadens gleich $c^2.m.$"

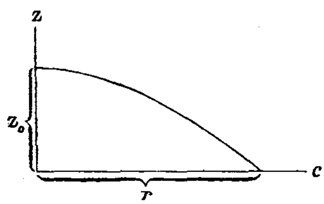

Fig. 1.

Theoretisch lässt sich die Richtigkeit dieses Satzes leicht durch einfache Rechnung bestätigen; dagegen ist es noch nicht gelungen, einen experimentellen Beweis des Satzes zu erbringen, und zwar infolge der Schwierigkeit, die Beeinflussung der Fadenform durch äussere Kräfte auszuschliessen. Sehr interessante Versuche über diesen Gegenstand verdankt man Herrn Aitken, welcher in sich zurücklaufende Ketten durch eine sich drehende Rolle in sehr schnelle Bewegung setzte; eine Unabhängigkeit von der Gravitation ist aber hierbei nicht erzielt worden.[1])

Soll die Form, welche der schwingende Faden zu irgend einer Zeit t annimmt, aus den anfänglichen Elongationen y_0 der einzelnen Fadenpunkte und den zugehörigen transversalen Geschwindigkeiten v abgeleitet werden, so hat man erstens

$$(9) \qquad y_0 = \Gamma(\xi) - \Gamma\left[\frac{r-c}{r+c}(-\xi)\right].$$

Durch Differentiation der Gleichung (5) erhält man ferner:

$$(10) \qquad \frac{dy}{dt} = (r-c)\left\{\Gamma'[(r-c)t+\xi] - \Gamma'\left[(r-c)t - \frac{r-c}{r+c}\xi\right]\right\}.$$

Da dy/dt zur Zeit $t = 0$ den Werth v hat, so wird:

$$(11) \qquad v = (r-c)\left\{\Gamma'[\xi] - \Gamma'\left[-\frac{r-c}{r+c}\cdot\xi\right]\right\};$$

oder auch:

$$(12) \qquad \int v\,d\xi = (r-c)\,\Gamma(\xi) + (r+c)\,\Gamma\left(-\frac{r-c}{r+c}\cdot\xi\right).$$

Durch Addition der mit geeigneten Factoren multiplicirten Gleichungen (9) und (12) erhält man:

$$(13) \qquad \Gamma(\xi) = \frac{\int v\,d\xi}{2r} + \frac{r+c}{2r}\cdot y_0;$$

$$(14) \qquad \Gamma\left(-\frac{r-c}{r+c}\cdot\xi\right) = \frac{\int v\,d\xi}{2r} - \frac{r-c}{2r}\cdot y_0.$$

Der Periodicität der Function Γ zufolge genügt es die letztere etwa nur für die Abscissen von $-[(r-c)/(r+c)]\,.\,l$ bis $+l$ zu berechnen, entsprechend den Werthen $\xi = -l$ bis $\xi = +l$.

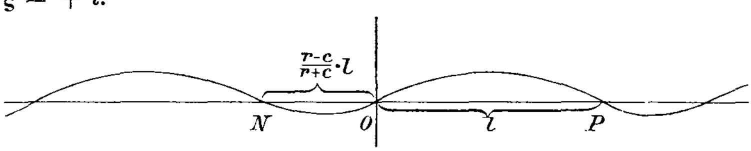

Fig. 2.

1) Aitken, Philosophical Magazine 5. p. 81. 1878.

Ist in Fig. 2 die Function Γ für dieses Intervall durch die Curve NOP dargestellt und nach rechts und links beliebig weit durch congruente Wiederholungen verlängert, so lässt sich vermittelst derselben die Elongation eines Fadenpunktes mit der augenblicklichen Abscisse ξ zur Zeit t leicht finden. Trägt man nämlich auf der Abscissenaxe zunächst von O aus ein Stück $(r-c)t$ und hierauf von dessen Endpunkt ausgehend unter Berücksichtigung der Vorzeichen die Strecken ξ und $-[(r-c)/(r+c)].\xi$ ab, so ergiebt sich die gesuchte Elongation als der Unterschied der Ordinaten in den letzterhaltenen beiden Punkten.

Ist z. B. $c = r/3$ und sind die anfänglichen Geschwindigkeiten $v = 0$, so wird

$$NO = \tfrac{1}{2}\,OP$$

$$\Gamma(\xi) = \tfrac{2}{3}\,y_0; \qquad \Gamma\left(-\frac{r-c}{r+c}\cdot\xi\right) = -\tfrac{1}{3}\,y_0.$$

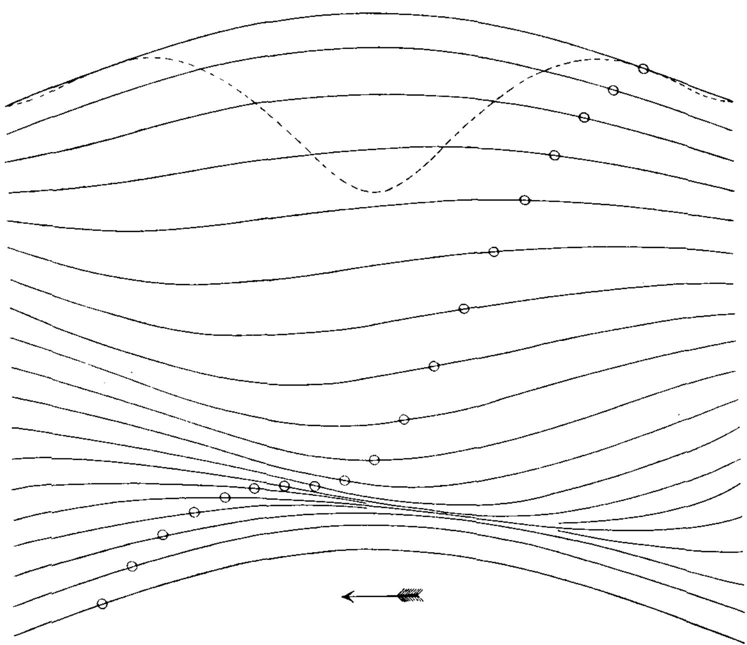

Fig. 3

In Fig. 3 ist unter Annahme eines Anfangszustandes:

$$y_0 = \text{const.} \sin \frac{\pi . \xi}{l}$$

die gegen den ruhenden Faden im Verhältniss 9 : 8 verlängerte Schwingungsdauer in 18 gleiche Theile getheilt, und die augenblickliche Form des Fadens nach Ablauf jedes einzelnen solchen Zeittheilchens construirt. Den Zeiten t und $t - \tau$ entsprechen congruente, symmetrisch liegende Fadenfiguren, der Zeit $\tau/2$ eine symmetrische Curve, aber keine Sinuslinie.

Die Bewegungsrichtung des Fadens ist durch einen Pfeil angedeutet, zudem sind die Orte, welche ein bestimmter Punkt des Fadens bei dessen aufeinander folgenden Formen der Reihe nach inne hat, durch kleine Kreise bezeichnet. Schliesslich ist noch durch die gestrichelte Curve die Bahn dieses selben Punktes zusammenhängend dargestellt.