Charles Hermite.

Von

M. NOETHER in Erlangen.

Das neue Jahrhundert hat zu seinem Beginn einen Mann verloren, der noch aus der grossen Zeit der Gauss, Jacobi und Cauchy als ihr geistiger Schüler und unmittelbarer Fortsetzer zu uns herüberrahte, in dessen erste Schaffenszeit die Entwicklung neuer Grundideen der zahlentheoretischen, der algebraischen und der analytischen Wissenschaft gefallen ist, und der selbst durch eine lange Reihe bedeutender Entdeckungen so sehr den Charakter seiner Zeit mitbestimmte, dass sich an seinen Namen und sein Werk neben den Traditionen der Vergangenheit auch Ausblicke auf die Forschung der Gegenwart bis in dieses Jahrhundert hinein, das er noch begrüssen konnte, knüpfen. Wenn so die ausserordentliche Verehrung, die Ch. Hermite immer und überall genossen hat, zunächst auf der idealen Bedeutung der wissenschaftlichen Güter beruhte, als deren Repräsentant er erscheint, so hatte sie eine weitere feste Stütze in der edeln Persönlichkeit, welche sich in dem Verstorbenen verkörperte. Auch in Deutschland, dessen mathematische Wissenschaft Hermite seinem Heimatlande vermittelte und zu dessen Forschern er von je enge Beziehungen unterhielt, und in unseren Annalen, die mit manchen seiner Bestrebungen in nähere Fühlung gekommen sind, findet die Trauer um den Heimgang lebhaften Widerhall. Schon bei den Nachrufen, die wir seinen ihm befreundeten Mitstreibern aus der Zeit der 50^{er} Jahre, die damals mit ihm um die Wiege der neueren Algebra gestanden, Cayley, Sylvester, Brioschi, in diesen Blättern gewidmet*), haben wir eine Reihe von Einzelbeziehungen zwischen ihm und insbesondere den letzten beiden hervorheben und eingehend erörtern müssen; spiegeln sich ja doch Hermite's Ideen in dem ganzen Schaffen Brioschi's wieder. Aber Hermite war weitaus der vielseitigste unter jenen Vorkämpfern der algebraischen

*) S. diese Annalen Bde. 46, 50.

Richtung, er war von arithmetischen und analytischen Einflüssen durchtränkt, in seinem Gesamtwirken spielt die algebraische Richtung zwar eine starke, aber doch nur eine Theilrolle. Um so nothwendiger erscheint es, dass wir im Anschlusse an jene Aufsätze nun auf diesen Blättern die Einzelheiten zu einem Gesamtbilde von Hermite's Wirken ergänzen und seine Bedeutung und Art zu würdigen suchen, um unseren geistigen Zusammenhang mit jener älteren Zeit uns voller zu vergegenwärtigen. In Bezug auf einige damals eingehend besprochenen Einzelheiten, die wir nunmehr, trotz ihrer Bedeutung in Hermite's Schaffen, nur noch knapp berühren, verweisen wir auf jene Aufsätze*).

Wir stellen vorerst die wenigen uns bekannten Lebensdaten kurz zusammen.

Charles Hermite, in Dieuze, Lothringen, am 24. Dez. 1822 geboren, verbrachte seine ersten Jugendjahre innerhalb seiner Familie in Nancy und besuchte auch das dortige Lyceum. Noch bei seinem Jubiläum gedenkt er in treuer Erinnerung dieser Stadt und seiner heimatlichen Provinz, in die er späterhin oft zurückgekehrt. Die Schulstudien führte er dann an den Pariser Lyceen Henry IV und Louis-le-Grand weiter. Sein mathematischer Lehrer an letzterem Colleg war noch derselbe Richard, der schon Galois in seinen Privatstudien ermuthigt hatte**). Auch für Hermite ist charakteristisch, dass er sich schon damals nicht an den Schulgang des durch seine Vorbereitung für die École Polytechnique bekannten Lehrers hielt, sondern, wie später als Zögling dieser Anstalt, mehr an das Selbststudium classischer Werke: von Lagrange's *Traité de la résolution des équations numériques* und von Gauss' *Disquisitiones arithmeticae*. So erhielt er 1842 zwar das 1. Accessit in „*Mathématiques spéciales*“ beim allgemeinen Concours der Pariser Lyceen in der Sorbonne, nicht aber den Preis, obwohl, nach dem Zeugniß von

*) Von der Hermite betreffenden Litteratur sei erwähnt:

1. „1822—1892. Jubilé de M. Hermite (24. Déc.).“ Paris, Gauthier-Villars 1893. Mit Lichtbild.
2. C. Jordan: „Notice sur M. Ch. Hermite.“ C. R. de l'Ac. des Sc., vom 21. Jan. 1901, abgedruckt im Journal de Math., 5^{te} S., Bd. 7.
3. E. Picard: „L'Oeuvre scientifique de Ch. Hermite.“ Ann. de l'Éc. Norm. Sup., 3^{te} S., Bd. 18, 1901.

[Eine eingehende und übersichtliche Würdigung, in einer von Hrn. Picard als Nachfolger Hermite's auf dessen Lehrstuhl an der Fac. des Sciences am 2. März 1901 gehaltenen Vorlesung. 26 SS.]

4. Ein vorläufiges Verzeichniß der Publicationen Hermite's in Loria's Bollet. di Bibl. e Stor. dei sc. mat., Heft Jan.—März, 1901.

Dazu kommt eine Reihe kürzerer Nachrufe.

**) Cf. Liouville in der Einleitung zu Galois' Schriften, Journal de Math. XI, 1846.

Hrn. Darboux*), die — bis jetzt nicht veröffentlichten — „feinen Bemerkungen seiner Bewerbungsschrift noch heute das Ingeniöseste und Originalste bleiben, was zum Descartes'schen Theorem hinzugefügt worden ist“.

Noch aus der Collegzeit von 1842 datirt die erste publicirte wissenschaftliche Arbeit Hermite's: „*Considérations sur la résolution algébrique de l'équation du cinquième degré*“ (Nouv. Ann., t. I). Wie so viele hatten auch ihn zuerst die Gleichungen 5^{ten} Grades angezogen; aber, ungleich Jacobi, nicht die Frage der Auflösung, sondern die der algebraischen Auflösbarkeit selbst. Unbekannt mit den Arbeiten Ruffini's und Abel's, vor der Publication der Arbeit von Galois, lehnt sich Hermite allein an den Zusatz XIII von Lagrange's Abhandlung an, und er machte dementsprechend einen Versuch, zwischen der Möglichkeit, dass sich dessen Resolvente 6^{ten} Grades durch Gleichungen 2^{ten} und 3^{ten} Grades erniedrigen lasse, und dem für Lösung der Gleichung 5^{ten} Grades als nöthig angenommenen Ausziehen einer fünften Wurzel auf einfache Weise einen Widerspruch herzustellen.

Gegen Ende 1842 trat Hermite — nur als 68^{ster}**) — in die École Polytechnique ein; und sogleich vertiefte er sein Studium der Gleichungen an der Hand der Arbeiten Jacobi's über elliptische und hyperelliptische Functionen, welch' letztere, erst acht Jahre vorher von diesem definitiv in die Wissenschaft eingeführt (Crelle J. 13), damals die ganze mathematische Welt in tiefe Bewegung setzten. Glücklicher Weise waren diese Arbeiten, in lateinischer oder französischer Sprache abgefasst, Hermite zugänglich; und er, der Zwanzigjährige, nahm, öffentlich als erster nach Jacobi, in eklatantem Masse seinen Anteil. Durch Liouville aufgemuntert, richtete er schon Januar 1843 einen Brief über die Theilung der hyperelliptischen Functionen an Jacobi, den dieser mit Worten der höchsten Anerkennung über die Entdeckung begrüßte (C. R. Bd. 17, vom 10. Juli 1843) und, sammt dem zweiten Briefe Hermite's vom August 1844 und seiner Beantwortung, in den ersten von ihm selbst besorgten Band seiner Werke aufnahm***). Die in der zweiten Hälfte der 40^{er} Jahre folgende reiche Production Hermite's, die mit ihren Entdeckungen in der Theorie der elliptischen Functionen und in der Zahlentheorie durchaus in Beziehung zu Jacobi'schen Arbeiten steht, ist ebenfalls in Briefen an Jacobi

*) „Jubilé etc.“ Es handelt sich um den von Hermite gefundenen Satz: dass eine Gleichung, von der vier aufeinanderfolgende Coefficienten eine arithmetische Progression bilden, complexe Wurzeln besitzen muss. Cf. Nouvelles Annales de Math., t. I, p. 385.

**) Cf. Nouvelles Annales de Math., t. I, p. 263; 1842.

***) Abgedruckt auch im 2. Bande der neuen Ausgabe von Jacobi's Werken.

niedergelegt und von diesem im Crelle'schen Journal veröffentlicht*); wie denn Hermite sein ganzes Leben hindurch eine ausgedehnte Correspondenz unterhielt, in die er einen guten Theil seiner Forschungsergebnisse und Betrachtungen freigebig niederzulegen pflegte: nur ein Theil davon ist publicirt.

Es scheint nicht, dass sich Hermite während seiner Studienzeit, oder später, an einen seiner Lehrer, als solchen, näher angeschlossen habe; wohl aber stand er Manchen, besonders Cauchy, in Gesinnung und freundschaftlich sehr nahe. Von 1848 an, und die 50^{er} Jahre hindurch, war er als Repetitor und Zulassungs-Examinator an der École Polytechnique thätig. Diese letztere Zeit war zugleich weitaus die seiner höchsten Productivität, seiner folgenreichsten Forschungsperiode; in allen seinen Gebieten: der Zahlentheorie, der neueren Algebra und der Theorie der Gleichungen, der Theorie der Abel'schen und elliptischen Functionen, vor Allem in Fragen, welche aus mehreren dieser Disciplinen ressortirten, drängten sich damals bei ihm die neuen Ideen, die eine Reihe weiterer Gebiete erschlossen. Sie öffneten ihm auch schon 1856 die Pforten der Académie des Sciences, wie weiterhin die der übrigen Académien und gelehrten Gesellschaften. Aber seine lehramtliche Stellung verbesserte sich nur langsam. 1862 wurde für ihn an der École Normale der Lehrstuhl eines Maître de Conférences geschaffen, wobei ihm nur Gelegenheit zu elementaren Vorlesungen gegeben, aber doch schon vergönnt war, Schüler um sich zu haben, die heute einen vordern Rang in der Wissenschaft einnehmen. 1863 erhielt er zugleich das verantwortungsvolle Amt eines Examinateur de sortie an der École Polytechnique; und 1869 wurde er Nachfolger Duhamel's an dieser Schule für Analysis, und an der Faculté des Sciences erst für Algebra, dann ebenfalls für Analysis. Ersteres Amt behielt er activ bis 1878, letzteres bis 1897 bei.

Hier nun entfaltete er eine eminent anregende Lehrkraft: ohne die Spur eines Schulgangs, aus dem Vollen hervorgegangen, wandte sie sich an Geist und Herz des Studirenden zugleich, floss ihm die Liebe zur Wissenschaft ein, und führte ihn, vom Nächsten ausgehend, rasch und unmerklich auf Höhen voller Ausblicke. Hier, wie in seinen Arbeiten, brachte er auch die, selbst von den grossen Vertretern der französischen Mathematik bisher stark vernachlässigten Ideen der ausländischen, vor Allem der deutschen, Analytiker zur Geltung; ja zu Beginn der 60^{er} Jahre konnte man unter den Vertretern der neuen algebraischen und analytischen Richtungen in Frankreich nur Hermite hervorheben, in dem die ganze

*) Auch abgedruckt in dem durch Dirichlet besorgten 2. Bande der alten Ausgabe von Jacobi's Werken.

jetzige mathematische Schule dieses Landes ihren Lehrer und Meister verehrt. Es entstanden die berühmten „Cours“, die weit über Frankreich hinaus zurückwirkten. Auch der Anfang und das Ende der 70^{er} Jahre brachten Hermite nochmals zwei eingreifende Forschungsperioden. Zwischen der engeren Zahl von grösseren zusammenhängenden Arbeiten zieht zugleich, bis zu den letzten Tagen des Jahrhunderts, eine ununterbrochene Kette von etwa 200 Publicationen hin, in den Academie- und allen mathematischen Zeitschriften, mit Einzelresultaten und zerstreuten Lichtblicken auf alle seine Arbeitsgebiete. Dazu kommt eine Reihe, in der Académie des Sciences gehaltener, beredter Nachrufe, von denen die, welche ihm als Freunde und Forscher Verbundene, wie Halphen, Kronecker, Cayley, Weierstrass und Brioschi, betreffen, nicht nur warme und schwungvolle Worte selbstloser Anerkennung finden, sondern auch mit wenigen Strichen treffende Bilder der wissenschaftlichen Bedeutung der Gezeichneten liefern.

Aus einer erweiterten Examinationsthätigkeit ging auch noch ein Interesse für und ein Einfluss auf den Unterricht an den Mittelschulen hervor. Wie er es am Schlusse seines Lebens in einem an die Redaction der neuen Serie des „Archivs der Mathematik und Physik“, Bd. I, 1901, gerichteten Briefe — der auch ein Zeugnis der Pietät gegen seine deutschen Vorgänger ist — ausspricht, hält er es schon in diesen Schulen für möglich, das mathematische Interesse durch den Hinweis auf hohe, aber einfache Ideen der grossen Meister zu wecken, wie er denn die Anregung des Interesses weit über noch unverstandene Strenge stellt. Dieser Standpunkt ergab ihm auch für die ersten Jahre des Hochschulunterrichts sein Programm.

Das Jahr 1892 brachte Hermite, an seinem 70^{sten} Geburtstage, eine Huldigung, wie sie selten einem Gelehrten zu Theil wurde*). Sie galt zwar dem Forscher und Lehrer, aber sie ging zugleich aus der allgemeinen Verehrung hervor, welche er als Persönlichkeit genoss. Er hat ein langes arbeitsreiches Leben ganz der reinen Wissenschaft geweiht, der Erforschung neuer Wahrheiten und der Mittheilung ihrer Lehren. Und nicht nur ihrer Lehren: er wusste den sittlichen Geist in seine Schüler zu pflanzen, er spendete ihnen aus der Fülle seiner Gedanken, er war ihr treuester Freund. „Die Wissenschaft gibt“, sagt Hermite an seinem Jubeltage, „in Erwiderung der Anstrengungen, die sie auferlegt, Freundschaftsbeziehungen, als beste Belohnung“. Er verband mit den Gaben des Geistes gerade die Gaben, welche den Menschen lebenswerth machen und ihm Freunde erwerben. Keiner war pietätvoller gegen seine Meister, keiner mehr als er davon entfernt, für sich selbst Ansprüche zu stellen, da er seine eigenen

*) S. die oben genannte Schrift „Jubilé etc.“

Leistungen stets an den hohen Endzielen, die er im Auge gehabt, mass. Wie oft hat er fremde Entdeckungen, auch wenn sie von ihm selbst längst gehegte Gedanken aussprachen, freudig anerkannt, wie suchte er überall auch das kleinste Verdienst Anderer, wenn es einen Beitrag zu einem höheren Ziel zu bilden schien, klarzustellen und hervorzuheben. Die ihm eigene unerschöpfliche Höflichkeit und Zuvorkommenheit, wie sie sich in seinen Briefen kundgibt, war nichts Aeusserliches; es war die Form, unter der sich ein bescheidenes Wesen, ein hoher Sinn und ein inneres Wohlwollen bargen.

Ch. Hermite verschied am 14. Januar 1901, unerwartet und schmerzlos. Vermählt war er mit einer Schwester seines Freundes Joseph Bertrand; des anregenden Verkehrs in dem Gelehrtenheim der Rue de la Sorbonne werden sich zahlreiche Fachgenossen dankbar erinnern. Jetzt betrauert die Wittwe mit einer zahlreichen Familie: zwei Töchtern, zwei Schwiegersöhnen, unter denen E. Picard, mit Enkeln und Urenkeln und mit vielen Näherstehenden, den Hintritt ihres Oberhauptes. —

Die *Arbeiten* Hermite's lassen sich zwar in bestimmte Richtungen gruppieren, die meist auch zeitlich auseinanderliegen, nicht aber direct nach dem gewöhnlichen Schema der mathematischen Disciplinen unterscheiden. Die grösseren Leistungen gehören zumeist Grenzgebieten zwischen mindestens zwei dieser Disciplinen an, und sie haben, äusserlich betrachtet, nur das gemeinsam, dass sie als arithmetische in demjenigen weiteren Sinn der Zahl zu kennzeichnen sind, der das stetige Gebiet mitumfasst, also neben der engeren Zahlentheorie Algebra und Analysis einschliesst, Geometrie und Mechanik aber noch ausschliesst*).

In den ersten Arbeiten, bis Mitte der 40^{er} Jahre, strömt ein mächtiger Gedankenfluss von den *Gleichungen* aus auf die *Theorie der Abel'schen* und *elliptischen Functionen* über. Ende der 40^{er} Jahre bis tief in die 50^{er} Jahre hinein fällt die lange Reihe der *engeren arithmetischen* Arbeiten, sogleich (1847) ausgezeichnet durch Einführung von *algebraischen Ideen über quadratische Formen*, und dann, damit verbunden, durch die Einführung von *continuirlichen Variabeln*. Der ganze Reichthum dieser selben Quelle enthüllt sich aber erst kurz darauf (1852—1854), als die allgemeinen *Invariantenideen zur neueren Algebra der Formen* daraus hervorbrechen. Nur ein Jahr später (1855) geht die engere Arithmetik eine neue Verbindung mit der Theorie der Thetafunctionen ein, und es entsteht die Arbeit, welche unter den Leistungen Hermite's den grössten Einfluss ausüben sollte: die *Grundlegung der Transformationstheorie* in

*) Cf. Kronecker, „Ueber den Zahlbegriff“, Crelle J. 101 (Werke III).

der *Theorie der Abel'schen Transcendenten*. Schon das Jahr 1858 bringt die Entdeckung, welche den Namen Hermite's in die weitesten Kreise getragen hat: die *Auflösung der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades mittelst elliptischer Functionen*, eine Frucht der Verbindung der Theorie der Substitutionsgruppen und der Gleichungen mit der der elliptischen Functionen, zu deren weiterer Ausreifung auch noch die Formentheorie sich gesellte. Diese Arbeit, und die 1859 entstandene über die *Modulargleichungen* der elliptischen Functionen, einer Verbindung von Gleichungstheorie, elliptischen Functionen und Arithmetik entsprossen, enthalten die Keime einer neuen Entwicklung, die zu den modernen Disciplinen der Modulfunctionen und der automorphen Functionen hinführen sollte. Die in diesen 50^{er} Jahren entfaltete Fruchtbarkeit ist eine geradezu erstaunliche; wie denn diese Jahre, in denen auch Puiseux's Arbeit erschienen ist und Weierstrass und Riemann der Functionentheorie neue Grundlagen gegeben haben, zu den wichtigsten der ganzen Geschichte der Mathematik gehören.

Der Anfang der 60^{er} Jahre erzeugt, in Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf die engere Zahlentheorie nach Jacobi's Vorgang, Resultate in *Classenzahlrelationen*. Es folgt scheinbar eine Pause, äusserlich angefüllt von Vorlesungen und kürzeren Aufsätzen über Reihenentwicklungen von elliptischen und anderen Functionen. Da erscheinen plötzlich (1873) die Arbeiten über *Approximation der Functionen*, gipfelnd in dem grossen Abschlusse des *Beweises der Transcendenz der Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems*: arithmetische Begriffsbildungen, auf die Analysis angewandt.

Gegen Ende der 70^{er} Jahre aber beginnt Hermite die „*Anwendungen der elliptischen Functionen*“ auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen, die Lösung einer *Verallgemeinerung der Lamé'schen Gleichung* durch seine doppelt-periodischen Functionen 2^{ter} Gattung, womit er sich von den elliptischen Functionen aus auf ein Gebiet begab, das die neuere Analysis beherrscht, und auch Probleme der Mechanik löste. Die ganze übrige Arbeitszeit war, im Anschlusse an seine Vorlesungen in der Faculté des Sciences, wesentlich den *elliptischen Functionen*, den *bestimmten Integralen* und den *eindeutigen Functionen einer Variabeln* überhaupt gewidmet. —

Im Jahre 1828 schreibt Jacobi, in seinen „*Notices sur les fonctions elliptiques*“, welche hauptsächlich die Transformation und Theilung behandeln, an Crelle: „Vous voyez, Monsieur, que la théorie des fonctions elliptiques est un vaste objet de recherches qui dans le cours de ses développements embrasse presque toute l'algèbre, la théorie des intégrales définies et la science des nombres. Quel titre de gloire pour l'illustre

auteur du «Traité des fonctions elliptiques», que d'avoir créé cette belle théorie et d'avoir allumé ce flambeau à la postérité.“ Diese Worte müssen in Hermite gezündet haben, sie deuten prophetisch auf sein Werk und umfassen ein grosses Stück seines Zukunftsprogramms.

Jacobi hatte (hier in Cr. J. Bde. 3, 4, wie schon in Cr. J. Bd. 2) den analytischen Ausdruck der Wurzeln der Gleichung des Grades n^2 für die n -Theilung der Argumente der elliptischen Functionen abgeleitet, indem er zur Umkehrung seiner Transformationsformeln den Charakter der doppelten Periodicität benutzte, und er hatte dadurch auch die algebraischen Ausdrücke der Wurzeln, die bei Abel noch von zwei successiven Gleichungen n^{ten} Grades abhingen, auf einfache und eindeutige Weise als Summe von n^{ten} Wurzeln (n prim) von rationalen Ausdrücken erhalten. Publicirt aber hatte Jacobi nur den Beginn der Ausführung, das Weitere ist erst später (Ges. Werke, I, 1881) aus dem Nachlass veröffentlicht. Wie hoch Jacobi die Grundlage, die Formel der inversen, irrationalen Transformation geschätzt, geht aus einem Briefe an Legendre vom 18. Jan. 1829 hervor: „La découverte de cette formule m'a coûté beaucoup de peine, et c'est peut-être pourquoi je voudrais la compter pour le résultat le plus important de tout ce que j'ai trouvé jusqu' ici.“

Ferner hatte Jacobi in seiner Abhandlung von 1834 (Cr. J. 13) „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis . . .“, welche die Grundlage der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale enthält, auch schon angedeutet, dass die n -Theilung für die hyperelliptischen Functionen von zwei Argumenten auf eine Gleichung des Grades n^4 führe, die für $n = 2$ durch blosse Quadratwurzeln lösbar sei, jedoch ohne Ausführung.

Hier nun sollte, angeregt durch diese beiden Untersuchungen, der junge Hermite eingreifen. In seinem schon angeführten Briefe an Jacobi vom Jan. 1843 (auch in C. R. t. 17 und in Cr. J. 32) gibt er mit einem Schlage die Verallgemeinerung der Jacobi'schen algebraischen Lösung der *allgemeinen n -Theilungsgleichung* von den elliptischen Functionen auf die *hyperelliptischen* von zwei Argumenten, und zwar für eine beliebige Zahl n : eine Arbeit, die schon eine tiefe Einsicht in die Periodicitäts-eigenschaften dieser Functionen und in das Abel'sche Theorem erforderte. Zu jener Zeit war von diesen Functionen ausser ihrer Definition noch nichts bekannt, und Abel's schwierige Arbeit über sein Theorem war eben erst erschienen. Hermite ging auch noch auf die „specielle“ n -Theilung der Perioden ein, indem er Jacobi's Bemerkung (Cr. J. 13), dass dieselbe für eine Primzahl n auf eine im Allgemeinen nicht lösbare Gleichung des Grades $\frac{n^4 - 1}{n - 1}$ — der Anzahl der Transformationen n^{ter} Ordnung —

und auf eine lösbare Gleichung des Grades $\frac{n-1}{2}$ führe, bewies. In Bezug auf das Erstere schreibt ihm Jacobi (Juni 1843, C. R. 17): „Sie haben sich durch die Entdeckung dieser Theilung ein weites Feld für Untersuchungen und neue Entdeckungen geöffnet, welche der analytischen Kunst einen grossen Aufschwung geben werden“.

Auch bei den nächsten Arbeiten steht das grosse Problem, welches Jacobi der Wissenschaft vorgelegt, die analytische Darstellung der Umkehrungsfunktionen der Integralsummen, für Hermite als Leitstern da. Er dehnt in der Abhandlung „Sur la théorie des transcendentes à différentielles algébriques“ (C. R. 18, 1844; auch im Journ. de Math. IX) auf Grund von Abel's Abhandlung das Problem auf die Integrale über beliebige algebraische Differentialausdrücke aus; er versucht die Perioden einzuführen, wohl schon als Integrale auf Schleifenwegen zwischen Verzweigungspunkten, aber ohne — 2 Jahre vor Cauchy's Noten in C. R. t. 23 und 6 Jahre vor Puiseux's „Recherches“ — hier zum Abschluss kommen zu können; er denkt auch an die linearen Differentialgleichungen für die Integrale 1^{ter} Gattung als Functionen des Moduls. Wichtiger ist, dass er zum Zwecke des Fortschritts zunächst für nöthig hält, in die Transformationstheorie der elliptischen Functionen, also in ein gelöstes Problem, neue, und zwar functionentheoretische, Gesichtspunkte einzuführen, um so den rationalen Ausdruck der neuen Variablen y durch die ursprüngliche $x = \sin am u$ und die algebraische Beziehung zwischen y und $\frac{dy}{du}$ zu gewinnen, wie auch die Transformation des Integrals dritter Gattung.

Dieser Gesichtspunkt führt Hermite kurz darauf (Brief an Jacobi vom August 1844; auch in Cr. J. 32 veröffentlicht) zu einer Entdeckung, welche ihm erlaubt hat, die *Theorie der Thetafunctionen* einheitlich vorerst der ganzen Theorie der elliptischen Functionen zu Grunde zu legen, und welche späterhin auch für seine Transformationstheorie der Abelschen Functionen, wie für die Thetarelationen überhaupt, in der That das Fundament werden sollte. Hermite führt neue Functionen ein: die allgemeinsten holomorphen Functionen von u mit den Periodicitätseigenschaften rationaler ganzer homogener Functionen n^{ten} Grades von $\Theta(u)$ und $H(u)$, die später sogenannten Thetafunctionen n^{ter} Ordnung, und er erkennt ihre Grundeigenschaft, dass sie sich aus $2n$ solchen Functionen linear und homogen zusammensetzen lassen.

Diese scheinbar einfache, aber folgenreiche Entdeckung liefert ihm ohne Weiteres die Jacobi'schen inversen Formeln für die Transformation n^{ter} Ordnung. Sie gibt ihm aber auch den transcendenten Ausdruck der allgemeinsten doppelt-periodischen Function, die eine rationale Function

von $x = \sin \operatorname{am} u$ und $\frac{dx}{du}$ ist, in der neuen Form eines Quotienten zweier Producte von Thetafunctionen von gleich vielen Factoren [„Hermite'scher Satz“]:

$$\frac{\prod_i H(u + a_i)}{\prod_i H(u + b_i)}$$

mit der aus dem doppelt-periodischen Charakter geschlossenen Bedingung

$$\sum a_i \equiv \sum b_i \pmod{\text{Perioden}}.$$

Dies letztere ist nichts anderes als das Abel'sche allgemeine Additionstheorem für elliptische Functionen, oder wenn man will, der [„Riemann-Roch'sche“] Satz für die Anzahl der linear unabhängigen doppelt-periodischen Functionen, mit gegebenen Unendlichkeitspunkten. In dieser Ableitung, an Stelle derjenigen Abel's, fand Jacobi (Cr. J. 32) das Originalste und Ingeniöseste der Untersuchung Hermite's. „Hermite hat“, sagt Jacobi in einem aus dem Nachlass veröffentlichten Aufsatz (Ges. Werke, II, S. 516), „dem Abel'schen Werke eine neue Form gegeben, wie sie fast allen Arbeiten dieses grossen Genies zu wünschen ist, wenn ihre tiefen Gedanken klarer hervortreten sollen.“ Die Ableitung der ganzen elliptischen Transformationstheorie aus seinem Thetatheorem deutet Hermite nur erst an.

Inzwischen hatte auch Liouville in Vorlesungen eine einfache Theorie der doppelt-periodischen Functionen entwickelt, die auf ihre Zerlegung in eine Summe von solchen mit nur je zwei Polen im Periodenparallelogramm gegründet war. Hermite legte dann der Academie eine grössere Arbeit vor, in der er an der Hand der Cauchy'schen Residuentheorie die Zerlegung der doppelt-periodischen Function mit einer endlichen Anzahl von Polen im Parallelogramm in ihre einfachsten *transcendenten Elemente* lehrt: in eine Summe von Functionen $\frac{H'(u - \alpha_i)}{H(u - \alpha_i)}$, also von Integralen

2^{ter} Gattung mit nur je einem Unstetigkeitspunkte, und deren Differentialquotienten. Eine leichte Umrechnung führt von da zur Darstellung als Summe von einfachen elliptischen Functionen, wie $\frac{1}{\sin \operatorname{am}(u - \alpha_i)}$. Die

nach den Berichten von Cauchy und Liouville (C. S. 32) ursprünglich für die Mém. des Sav. Étrang. bestimmte Arbeit liegt jedenfalls den später als Anhang zu Lacroix's Traité erschienenen vielgelesenen „Notes“ zu Grunde; und auf den Arbeiten von Cauchy, Liouville und Hermite in Gemeinsamkeit baut sich dann das systematische Werk von Briot und Bouquet auf.

Hermite's Untersuchung von 1844 über die elliptischen Functionen

hatte ihm offenbar als Vorbereitung für eine analoge Behandlung der höheren Transcendenten dienen sollen. Er hatte richtig vorausgefühlt, dass es dabei zunächst auf eine Verallgemeinerung der elliptischen *Theta-function* ankomme, wobei an Stelle der Productzerlegung, welche Jacobi benutzt hatte, die Periodicitätseigenschaften zu Grunde zu legen seien. Aber in diesem Versuch war er weniger glücklich. Er gelangt zwar (in dem Briefe von 1844) bis zu einer Form des Satzes für Vertauschung von Argument und Parameter und zu Additionstheoremen für die Integrale 3^{ter} Gattung der Functionen von zwei Argumenten; und dieses Vorgehen hat auch Jacobi angeregt, alte Untersuchungen darüber auf alle hyperelliptischen Classen auszudehnen (Cr. J. 32). Aber selbst auf inductivem Wege gelingt es Hermite nicht, zu den Thetafunctionen mehrerer Veränderlichen selbst vorzudringen. In der wirklichen analytischen Darstellung der neuen Umkehrfunctionen Jacobi's sollten ihm, für die erste Classe der hyperelliptischen Functionen, inzwischen andere zuvor kommen, angeregt durch die Preisfragen, welche schon vor 1840 von der Kopenhagener, 1840 durch Dirichlet von der Berliner, auf 1846 von der Pariser Akademie gestellt worden waren.

Göpel hatte, ganz in der Stille an analytischen Gedanken arbeitend, die ihm früh einen tiefen vorausschauenden Blick in die Functionsbegriffe thun liessen, schon etwa seit 1840 die Grundidee seines Werkes gefasst, auch von dem Ausgangspunkt der elliptischen Functionen her, mit Ideen, die mit den von Hermite in den beiden genannten, 1846 publicirten Briefen ausgesprochenen so verwandt waren, dass er gerade durch diesen Umstand bewogen wurde, mit seinen Entwicklungen hervorzutreten (Cr. J. 25, 1847). Die von Hermite gesuchte Function stellt er in der That inductiv aus den Periodenverhältnissen her: als eine doppelt unendliche Summe von Exponentialgrössen, deren Exponent ein quadratischer, nicht homogener, Ausdruck in zwei Indices ist; und er entwickelt, durch Bildung des Products je zweier solcher Reihen, das er als Thetafunction mit transformirtem Modul auffasst, und unter Benutzung der Periodicitätsverhältnisse, rechnend — wie Jacobi in Cr. J. 3 — Thetarelationen und daraus das Differentialproblem. In seiner Transformationsarbeit von 1855 hat dann Hermite den Weg Göpel's, insbesondere dessen Relation 4^{ten} Grades, seinem bei den elliptischen Functionen entwickelten Princip der linearen Zusammensetzung von Thetafunctionen höherer Ordnung eingeordnet.

Auch Rosenhain war schon 1844 auf die neuen Functionen durch Induction gekommen, wenn auch nicht durch eine scheinbar so unvermittelte Divination wie Göpel: er stieg von den 3-fach periodischen Functionen, die sich ihm bei der Umkehrung der Integralsummen 3^{ter} Gattung im elliptischen Falle ergeben hatten, zu den 4-fach periodischen Functionen

auf, wie man von der Exponentialfunction zur elliptischen Thetareihe weitergeht. Der weitere Weg war wieder ein rechnerischer, diesmal, wiederum nach dem Vorbild Jacobi's (Cr. J. 32), durch das Product von vier Thetafunctionen hindurch; und auch einige ganz specielle Fälle der allgemeinen linearen Transformation der Thetafunctionen kommen dabei vor. Dass die 1846 von der Pariser Akademie preisgekrönte Arbeit erst 1851 erschien, war für Hermite auch ein Hinderniss zu weiteren Versuchen in diesem Gebiete.

Wenn Hermite die Gabe einer kühn vorausnehmenden Induction, mit ihrem Gefolge von unabsehbaren Rechnungen, nicht eigen war, so zeigen die Arbeiten eines anderen Forschers, der um dieselbe Zeit von denselben Problemen angezogen worden war, voll die ausserordentlichen analytischen Schwierigkeiten, die in jener Zeit noch der directen Lösung entgegenstanden, und lassen verstehen, dass die Aufgabe zu früh an den jugendlichen Hermite herangetreten war. Der Jacobi'sche Weg der unbestimmten Wiederholung der Transformation der Integrale verbot sich ohne vorherige Kenntniss der höheren Thetafunctionen von selbst; es blieb nur, wie bei Abel, die fortgesetzte Multiplication, und eine Verallgemeinerung des ganzen Jacobi'schen Operationscyklus, der, von der elliptischen Function ausgehend, zum Integral 2^{ter} Gattung und zur Thetafunction gelangt und auf diese wieder die Integrale 3^{ter} Gattung und die Bruchdarstellung der elliptischen Functionen selbst zurückführte. Es bedurfte eines in allen Gebieten der Functionentheorie völlig neuen und sicheren Grund schaffenden Geistes, wie es Weierstrass war, um auf solchem Wege voran und zum Ziel zu kommen. Und auch ihm, der schon 1840 den Gang Abel's und Jacobi's nochmals selbständig an den elliptischen Functionen sich eröffnet und streng gemacht hatte, gelang es erst Ende der 40^{er} Jahre durchzudringen, um 1853 eine erste systematische Uebersicht zusammenzustellen, dann freilich gleich für die hyperelliptischen Classen von n Variabeln, zu denen der frühere Weg von den Theta's aus, wegen Unkenntniss der Modulbeziehungen für $n > 2$, nicht führen konnte. Was auch für Hermite das Haupthinderniss auf diesem Wege bilden sollte, hat Jacobi schon sehr früh (1846) erkannt*): den damaligen Mangel einer Betrachtung des Gesamtumfangs der Werthe der *algebraischen Function* und ihrer Integrale, auf allen Wegen durch das complexe Gebiet, und der darauf ruhenden Periodenrelationen. Hier eben musste erst, auf Cauchy gestützt, Puiseux und dann Weierstrass eingreifen, und nach ihnen Riemann seine Theorie der algebraischen Functionen aufbauen.

Einen kleineren Beitrag zu dieser Theorie hat auch Hermite geliefert,

*) S. dessen nachgelassenen Aufsatz in Ges. Werke, II, p. 516.

indem er in einer kurzen Note von 1851 (C. R. 32), gleich nach der ersten Abhandlung Puiseux', die Galois'sche Gruppentheorie auf die Gesamtheit der Substitutionen anwandte, welche die Wurzeln $u_1, \dots, u_n$ einer algebraischen Gleichung $f(u, z) = 0$ durch die verschiedenen Wege von z erleiden, und die so inducirte Gruppe, die später sogenannte „Monodromiegruppe“, in ihrer Bedeutung einführte: als Galois'sche Gruppe im Z -Bereich; so z. B. für die allgemeine n -Theilungsgleichung bei elliptischen Functionen.

Während das Hermite als weites Ziel vorschwebende Gebiet der Abel'schen Functionen von anderen Seiten in Angriff genommen war, war es ihm später (1855) doch vergönnt, einen der wichtigsten Zweige selbst zu schaffen: die Transformationstheorie. Zunächst aber drängte ihn seine Ideenfülle auf ein anderes Feld, das *arithmetische*, auf das wir ihm nun zu folgen haben.

Auf jene ersten beiden Briefe an Jacobi folgen drei Jahre stillen Arbeitens, um dann einer *arithmetisch-algebraischen Periode* Platz zu geben. Sie wird wiederum eingeleitet durch vier überreiche Briefe an Jacobi, die 1850 unter dem Titel „Sur différents objets de la théorie des nombres“ im Crelle'schen Journal (Bd. 40) erschienen und 1851 in den 2^{ten} Band von Jacobi's Werken aufgenommen sind. Man wird die fehlende Datirung, nach Einzelheiten des Inhalts, auf 1847 für die zwei ersten, auf 1848 für die zwei letzten Briefe (oder Anfang 1849 für den letzten) anzusetzen haben. Dazwischen fällt noch eine grössere Ausarbeitung von März 1848 in Crelle's J. 36, und es folgt eine zusammenfassende Darstellung im Juli 1850 (Cr. J. 41), mit weiteren Verallgemeinerungen 1853 (ib. 47) und 1856 (ib. 53).

Hermite wird zunächst von der arithmetischen Methode angezogen, wie sie Jacobi in jener mehrfach angeführten Abhandlung, Crelle J. 13, angewandt, um die Unmöglichkeit einer eindeutigen Function einer Variablen mit mehr als zwei Perioden nachzuweisen. Er fasst die Methode als Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus auf, benutzt sie, um nachzuweisen, dass ein Ausdruck $A\alpha + B\beta + \gamma$ bei beliebigen reellen Grössen A, B durch ganze Zahlen α, β, γ zu Null oder aber beliebig klein gemacht werden kann, und er stellt sich die Aufgabe, auch die aus Gleichungen dritten Grades stammenden algebraischen Zahlen analog zu charakterisiren, wie es seit Lagrange für die ganzzahligen Gleichungen 2^{ten} Grades geschehen ist. Hierbei bestätigt Hermite zunächst zwar den ersten Theil eines von Dirichlet gethanenen Ausspruches (1833; dessen Werke I, S. 197): „Es scheint eine Eigenthümlichkeit dieses Theils der Mathematik [der Theorie der Zahlen] zu sein, dass darin grosse Fort-

schritte fast immer durch die Bemühungen hervorgerufen werden, wodurch man sich von der Richtigkeit einzelner auf dem Wege der Induction gefundener Sätze zu überzeugen sucht“; aber wenn Dirichlet fortfährt: „während in allen anderen Zweigen der Analysis bedeutende Resultate eine Folge neuer Gesichtspunkte zu sein pflegen“, so war er bekanntlich kurz darauf durch Einführung seiner analytischen Gesichtspunkte selbst dazu gekommen, die Zahlentheorie aus der bisherigen isolirten Stellung zu erheben und sie auch bezüglich der Forschungsmethode den übrigen analytischen Zweigen gleichzustellen. Und auch Hermite gelingt es sehr bald, zu einem neuen einheitlichen Gesichtspunkte und einer festen Methode, und damit zur Erledigung neuer Probleme, vorzudringen.

Beim eifrigen Studium der *Disquisitiones Arithmeticae* wurde sein Geist vor Allem von dem rein *algebraischen* Charakter so vieler Definitionen und Entwicklungen berührt, der ganz unabhängig dasteht von der Annahme der Ganzzahligkeit der Coefficienten und Variabeln in den dort behandelten binären und ternären quadratischen Formen. „In diesem immensen Untersuchungsgebiet, das uns von Gauss eröffnet ist“, schreibt er im dritten der Briefe, „scheinen mir die Algebra und die Theorie der Zahlen zu einer und derselben Ordnung der analytischen Begriffe verschmelzen zu sollen“. Und dieses von Gauss vorbereitete mächtige Instrument der *quadratischen Formen* für seine allgemeinen Fragen zu verwerthen, war die neue Idee Hermite's. Dazu gesellte sich aber ein zweiter Gedanke, welcher diese Idee erst fruchtbar machte, indem er die Fragen der unbestimmten Analysis auf elementare Principien zurückführte: die *Einführung willkürlicher, continuirlicher Parameter* in die, seinen Problemen zu adjungirenden, wesentlich positiven quadratischen Formen.

So führt Hermite die gewöhnliche, aus der Kettenbruchentwicklung folgende Annäherung an eine Zahl A durch Brüche $\frac{m'}{m}$ zurück auf die Betrachtung der binären Form

$$(x' - Ax)^2 + \frac{x^2}{\Delta},$$

mit dem willkürlichen positiven Parameter Δ , und mit der Determinante $D = -\frac{1}{\Delta}$. Man weiss, dass man die Form, also auch jeden ihrer beiden

Theile, durch ganze Zahlen $x = m$, $x' = m'$ kleiner als $\sqrt{-\frac{4}{3}D} = \sqrt{\frac{4}{3\Delta}}$ machen kann, und hat somit $m < \sqrt{\frac{4\Delta}{3}}$, $\left| \frac{m'}{m} - A \right| < \frac{2}{m^2\sqrt{3}}$. Nimmt man

hier diejenigen Zahlen m, m' , welche die Form bei gegebenem Δ zu einem Minimum machen, so wird, für $x < m$, auch $(m' - Am)^2 < (x' - Ax)^2$; und man erhält so, wenn man Δ stetig von 0 bis $+\infty$ wachsen lässt,

als sprungweise sich ändernde zahlentheoretische Functionen der stetigen Grösse Δ eine Reihe von Brüchen $\frac{m'}{m}$, welche die nach Lagrange charakteristische Eigenschaft der successiven Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von A haben, also die Gesamtheit dieser Brüche gerade wiedergeben.

Analog wird die oben berührte erweiterte Frage nach der gleichzeitigen Annäherung von zwei Zahlen A, B durch zwei Brüche $\frac{m'}{m}$ und $\frac{m''}{m}$ behandelt, mittelst Untersuchung der Minima der definiten ternären Form

$$f = (x' - Ax)^2 + (x'' - Bx)^2 + \frac{x^2}{\Delta},$$

wo Δ wieder ein stetiger positiver Parameter; einer Form, die, nach den Disquis., immer unter $\frac{4}{3} |\sqrt[3]{D}| = \frac{4}{3\sqrt[3]{\Delta}}$ bleibt. Directer wird die Annäherung an Null von $A\alpha + B\beta + \gamma$ auf die successiven Minima der zu f im Gauss'schen Sinne „adjuncten“ Form

$$(Ax' + Bx'' + x)^2 + \frac{x'^2 + x''^2}{\Delta}$$

bei stetig wachsendem Δ zurückgeführt.

Zur Anwendung dieses Gedankengangs auf höhere Fragen hatte sich Hermite erst den Weg zu bereiten, indem er die definiten quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln, nach dem Vorbilde von Gauss für zwei und drei Variable, durch ganzzahlige lineare Transformationen von der Determinante 1 auf ihre einfachsten Formen zu reduciren, diese Formen also in nicht-äquivalente Classen einzutheilen hatte. Die algebraische Ausdehnung der Theorie der adjuncten Formen bildet hier das Hauptmittel der Untersuchung (2^{ter} und 3^{ter} Brief); sie dienen zur succesiven Aufstellung der Grenzbedingungen für die Coefficienten der Reducirten, die wenigstens so weit eingeschränkt werden, dass höchstens endlich viele Reducirte zu einer Classe gehören; und die Grenzbedingungen liefern das Minimum der Form bei gegebener Determinante. So ergibt sich also auch die *Endlichkeit* der Anzahl der nicht-äquivalenten Classen von definiten quadratischen ganzzahligen Formen.

Als erste grössere Anwendung erhält Hermite Fundamentalsätze der Theorie der allgemeinsten *algebraischen ganzen Zahlen* (1^{ter} Brief). Für eine ganzzahlige Gleichung n^{ten} Grades

$$F(x) = x^n + Ax^{n-1} + \dots + L = 0,$$

mit den reellen Wurzeln α_i , werden, mittelst n Unbestimmter $x_0, \dots, x_{n-1}$, die n Functionen

$$\varphi(\alpha_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i^k x_k$$

aufgestellt und danach das Product

$$f = \text{Norm} [\varphi(\alpha_i)]$$

und die definite quadratische Form

$$f' = \sum_{i=1}^n \Delta_i \varphi^2(\alpha_i)$$

mit den willkürlichen stetigen positiven Parametern Δ_i , mit einander verglichen. [Wenn die Wurzeln α_i nicht alle reell sind, so tritt nur je an Stelle zweier Quadrate ein auf zwei imaginär-conjugirte Wurzeln bezügliches Product.] Ganzzahlige Werthe der Grössen x_k , die f' bei gegebenen Δ_i zu einem Minimum machen, bewirken auch für f ein Minimum, das sich aber als unabhängig von den Δ_i , nur abhängig von der Discriminante D von $F(x)$ erweist. So ergeben die verschiedenen sprungweisen Minima von f' schon den Satz: dass eine durch f darzustellende ganze Zahl sich für eine unendliche Anzahl verschiedener Werthsysteme der x_k periodisch wiederholen muss. Indem später die lineare Substitution der x_k , welche f' bei gegebenen Δ_i , in seine Reducirte überführt, auch auf f angewandt wird, ergiebt sich, bei stetiger Variation der Δ_i , aus f nur eine begrenzte Zahl transformirter reducirter Formen, die sich gruppenweise wiederholen; aus den Begrenzungen der Reducirten von f' aber der Fundamentalsatz: *dass alle einem Werth der Discriminante D entsprechenden Normformen f nur eine begrenzte Anzahl von Classen bilden.*

In der Abhandlung in Crelle J. 36, bei der von vornherein in φ, f, f' die Grössen $x_2, \dots, x_{n-1}$ gleich 0 gesetzt sind, zeigt sich endlich, dass es, bei einer gegebenen Determinante D' — auf deren invariantentheoretische Definition wir noch zurückzukommen haben —, nur eine endliche Anzahl von Classen nicht-äquivalenter binärer Formen n^{ten} Grades, $F(x)$, giebt.

Hermite zog bei diesen Untersuchungen vor Allem das Ziel an, das sich ihm eröffnete: die Charakterisirung der aus allen ganzzahligen Gleichungen stammenden Irrationalitäten, der „algebraischen Zahlen“, und ihre Classificirung. Der periodische Charakter, welche das Wiederauftreten derselben Reducirten bei den successiven Aenderungen der Parameter Δ_i an sich trägt, war ja eine Verallgemeinerung derselben Erscheinung bei der Kettenbruchentwicklung einer Quadratwurzel. Und Hermite bescheidete sich, wenn es ihm nur vergönnt war, einem grossen Ziel einige Schritte entgegengegangen zu sein. Indessen gelangen ihm hier noch weitere wesentliche Schritte.

So sind mit den genannten Untersuchungen auf der einen Seite, für $n = 2$, auch die indefiniten binären quadratischen Formen, mit ihrer Periode reducirter Formen in jeder Classe, erledigt. Auf der andern Seite, bei beliebigem n , erhält man für die Gleichung $\text{Norm}[\varphi(\alpha_i)] = 1$ alle Lösungen, d. h. alle zu $F(x) = 0$ gehörigen *complexen Einheiten*. Und hierbei findet Hermite (3^{ter} Brief) den für diese Einheiten $\varphi(\alpha_i)$ grundlegenden Satz, dass sie sich, wie bei dem Specialfall der Pell'schen Gleichung, aus einer endlichen Anzahl solcher, und einer Einheitswurzel, als Producte von positiven und negativen Potenzen derselben, ergeben. Es war ihm damals von Arbeiten über complexe Zahlen nur die kurze Note Jacobi's von 1839 bekannt, aber unbekannt, dass Dirichlet nicht nur denselben Satz, den er seit 1840 in den Comptes Rendus vorbereitet hatte, schon 1846 gefunden, sondern auch die Anzahl der Einheiten eines solchen Fundamentalsystems, welche Hermite in seinem 4^{ten} Briefe angiebt, für alle Fälle genau zu $h - 1$ bestimmt hatte, wenn h die Anzahl der reellen und der Paare conjugirter Wurzeln von $F(x) = 0$ bedeutet; und unbekannt, dass auch Kronecker in seiner Dissertation von 1845 für die aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen, auf eine Untersuchung Kummer's gestützt, den Satz schon aus einer Minimumsbetrachtung abgeleitet hatte. Uebrigens liegt ein 1883 von Kronecker gegebener Beweis des Dirichlet'schen Satzes nicht weit von dem Hermite's ab, indem es sich hier, wie auch bei den Fragen von Hermite, Riemann und Weierstrass nach der möglichen Anzahl der Periodensysteme von Functionen, immer um die näherungsweise ganzzahlige Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, mit Angabe des Grades der Annäherung, handelt.

Dass Hermite auch das mit dem Normproblem engverwandte Problem der allgemeinen Formen, welche in lineare Factoren zerlegbar sind, analog erledigt (Brief 3), bedarf kaum der Erwähnung.

Die wichtigste Anwendung ist von Hermite 1853 ausgeführt worden (drei Abhandlungen in Crelle J. 47): es gelang ihm die Zurückführung auch der allgemeinen *indefiniten* quadratischen Formen mit beliebig vielen, insbesondere drei, Veränderlichen auf seine definiten Formen. Das Princip ist, dass aus einer indefiniten Form $F(x, y, z)$, deren Determinante D und deren adjuncte Form $\frac{\partial D}{\partial a} u^2 + \dots = G(u, v, w)$ ist, in

$$F' = F + 2(\dot{u}x + vy + wz)^2,$$

für $G(u, v, w) = -D$, definite Formen F' hergeleitet werden können, die noch von willkürlichen stetigen Parametern $u:v:w$ abhängen, und deren continuirliche Reduction zugleich die von F liefert. Die besonderen Schwierigkeiten, welche den indefiniten Formen innewohnen, zeigen sich beim Aequivalenzproblem: eine solche Form lässt sich durch unendlich-viele ganzzahlige

Substitutionen mit der Determinante 1, durch die sog. „ähnlichen“ Substitutionen, in sich selbst transformiren. Diese führt Hermite auf eine endliche Anzahl von erzeugenden Substitutionen zurück, aber — im Gegensatz zu dem, was in der sonst analogen Theorie der zerlegbaren Formen eintritt — von nicht vertauschbaren. Die Betrachtung der Formen F' ergibt dann auch hier den Satz, dass alle ganzzahligen quadratischen Formen, die zu derselben Discriminante und zu demselben „Typus“ — d. h. denselben Anzahlen positiver und negativer Quadrate in ihrer Normalform — gehören, in eine endliche Anzahl von Classen zerfallen. Hiermit waren die allgemeinen Umrisse dieses neuen Gebiets fixirt.

Ferner betrachtet Hermite auch bilineare Formen mit *conjugirt-imaginären Variabeln und Coefficienten*:

$$f = \sum a_{ik} x_i \bar{x}_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; \bar{x}_k \text{ conj. zu } x_k; a_{ki} \text{ conj. zu } a_{ik}),$$

bei linearer Transformation der x_i und conjugirt-imaginärer Transformation der $\bar{x}_k$. Diese speciellen („Hermite'schen“) quadratischen Formen von $2n$ Variabeln behandelt er arithmetisch genau in dem Sinne, wie seine quadratischen Formen von n Variabeln, indem er sie in Typen unterscheidet und reducirt (ibid.). So erhält er wieder, was sein eigentlicher Ausgangspunkt war: die Darstellung einer ungeraden Zahl durch vier Quadrate und die successiven Annäherungen an irgend eine imaginäre Zahl durch imaginäre Brüche (s. den 3^{ten} der früher angeführten vier Briefe). Aber er gelangt mit diesem Hilfsmittel auch dazu (Cr. J. 53 und C. R. 44), sein Theorem über die Gleichungen n^{ten} Grades, wie das über die zerlegbaren Formen, auf solche mit imaginären ganzen Coefficienten auszudehnen.

Wenn wir auf diese Ergebnisse zurücksehen, welche Hermite aus seiner neuen Methode der Adjunction quadratischer definirter Formen mit willkürlichen stetigen Parametern gewonnen hat, so drängt sich die Frage auf, warum diese Methode unter seinen Händen*) nicht auch weiterhin ihre ursprüngliche Fruchtbarkeit in demselben Masse bewährt hat. Heute ersieht man den Grund: während Hermite auch in der Zahlentheorie ganz *algebraisch* dachte, entstand in derselben Zeit, in der er in dieser Theorie zu arbeiten anfang, auf dem Boden der *arithmetischen* Begriffe der Theilbarkeits- und Congruenzbeziehungen, also an Dirichlet anschliessend und unter den Händen Kummer's (Cr. J. 35), zunächst der neue und wesentliche Begriff der idealen Primtheiler, und endlich, über die aus Perioden von Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen hinausgehend, durch Dedekind und

*) Die durch diese Methode angeregten und sie fortführenden Untersuchungen Minkowski's in dessen „Geometrie der Zahlen“ (1896) benutzen noch Dirichlet'sche und weitere Principien.

Kronecker die arithmetischen Begriffe und Theorien der algebraischen Zahlkörper und noch allgemeinerer algebraischer Körper. So blieb in Hermite's Auffassung der arithmetischen Grundbegriffe für seine höheren Zahlbereiche, die nur ganzzahlige Functionen einer ganzen algebraischen Zahl kannten, von vornherein eine Lücke, die ihn an der Erreichung der vollen Allgemeinheit für seine Theorien hinderte. Trotzdem hat er zu einer weiteren Grundlage einer Theorie solcher Körper im Kronecker'schen Sinne durch den auch von ihm gefundenen Satz über das endliche Fundamentalsystem für die complexen Einheiten, und für die zerlegbaren Formen überhaupt, einen Beitrag geliefert. Dass ihm damals aber die zukünftige Bedeutung dieser Dinge nicht fremd war, beweist sein Ausspruch (Cr. J. 40, 3^{ter} Brief): „C'est là un résultat qui ouvre la voie à un nouvel ordre de recherches destinées, si je ne m'abuse étrangement, à jeter un grand jour sur la nature si inconnue des irrationnelles algébriques.“

Den Umstand übrigens, dass die Adjunction der quadratischen Formen überhaupt, auch der Hermite'schen, in vielen Theorien eine grosse Rolle spielt, werden wir noch an einigen Stellen zu berühren haben.

Aus dem algebraischen Geiste Hermite's, wie er sich an diesen arithmetischen Untersuchungen entwickelte, ist eine Reihe von bedeutenden Errungenschaften für die *Algebra* hervorgegangen, darunter solche, die für einen Zweig dieser Wissenschaft, die *neuere Formentheorie*, grundlegend geworden sind.

Hierher gehört vor Allem die algebraische Theorie der *quadratischen Formen* überhaupt. In ihrer Behandlung giebt Hermite (Cr. J. 47) die unendlich vielen reellen Transformationen einer ternären Form in sich — in Erweiterung von Cayley's Untersuchung für Summen von Quadraten — in schon ziemlich vollkommener Gestalt, indem er die einzelne Substitution je einer linearen Form zuordnet, die zugleich mit der ternären Form unverändert bleibt. Zu bemerken ist nur*), dass Hermite hier noch nicht alle Transformationen erhält; aber er hat für die eigentlichen Transformationen (von Determinante $+1$) einer nicht-speciellen ternären Form 1874 (Cr. J. 78) die Lücke auf einfache Weise ausgefüllt. Ferner hat er 1856 (Cr. J. 53) einen Beweis des Trägheitsgesetzes gegeben, wenigstens bei nicht verschwindender Determinante der Form. Auf die Frage, wie weit etwa Hermite auch an der ersten Aufstellung dieses Gesetzes theiligt ist, braucht hier nicht weiter eingegangen zu werden, da sie in meinem Aufsatz über Sylvester**) ausreichend erörtert ist; nur möge

*) Cf. Bachmann in Cr. J. 76.

**) Diese Annalen, Bd. 50.

hinzugefügt sein, dass für ternäre Formen der Satz schon in Nr. 271 der *Disquisitiones arithmeticae* ziemlich deutlich enthalten ist*).

Auch über das erst von Jacobi, dann auch von Hermite angegebene Princip, die Sturm'schen Kriterien für die Realität der Wurzeln einer Gleichung aus Betrachtung an quadratischen Formen, welche der Gleichung adjungirt werden, zu erschliessen — ein Princip, das jenes Gesetz zur Voraussetzung hat —, wurde in dem eben angeführten Aufsatz Bericht erstattet. Hermite erhält nicht nur, durch Adjunction von Quadratsummen aus ähnlichen Functionen der Wurzeln, die unendlich vielen Gestalten, in welche die Sturm'schen Kriterien gefasst werden können (publicirt in C. R. t. 36, Febr. 1853), sondern auch (ib.) die Ausdehnung auf zwei simultane Gleichungen, nachdem er sie schon vorher (C. R. 35) auf dem Sylvester-Cayley'schen Wege gegeben hatte, sowie auch, mit Hülfe seiner Formen mit conjugirten Variablen, die Ausdehnung auf Gleichungen mit imaginären Coefficienten (Cr. J. 52). Es gelingt Hermite hierbei auch, durch rationale Transformation $u = \varphi(x)$ der Gleichung $f(x) = 0$, den Cauchy'schen Satz über die Zahl der Wurzeln innerhalb eines complexen Gebiets abzuleiten, wenn auch nur für den Fall einer Begrenzung durch rationale Curven: also diese Erweiterung des Sturm'schen Satzes ohne Stetigkeitsuntersuchung zu erhalten. Es führt diese Methode zu einem Theil von Kronecker's „Charakteristikentheorie von Functionen“. Auch Hermite's Satz (Cr. J. 41), dass die verallgemeinerte Säculargleichung, in welcher die Elemente a_{ki} conjugirt-imaginär zu a_{ik} sind, nur reelle Wurzeln hat, gehört in das hier besprochene Gebiet. —

Die Nothwendigkeit, zur arithmetischen Reduction der binären Formen n^{ten} Grades die Begriffe der „Determinante“ und der „adjuncten Form“, welche Gauss für binäre und ternäre quadratische Formen geliefert hatte, und den Classenbegriff der Zahlentheorie überhaupt, algebraisch zu erweitern, hat Hermite's Entdeckungskraft auf's höchste angeregt; es wirkte dieselbe Ursache und in derselben Richtung, wie einige Jahre vorher bei Eisenstein**). Aber Hermite's Resultate sind hier völlig original.

Hermite hatte (in der o. c. Abhandlung, Cr. J. 36, 1848) bei gleichzeitiger Reduction einer binären Form n^{ten} Grades

$$F(x, y) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \dots + A_n y^n$$

(mit n reellen Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$)

und einer zugeordneten definiten quadratischen Form

*) Dass Gauss das Gesetz gekannt und 1846/47 vorgetragen hat, ergibt sich auch aus einer Bemerkung Riemann's in einer Vorlesung, die demnächst publicirt werden soll.

**) S. Crelle's Journ., 27.

$$f = \sum_{i=1}^n \Delta_i (x - \alpha_i y)^2 \quad (\Delta_i > 0)$$

Begrenzungen für die Coefficienten der Reducirten von F erhalten, die nur von

$$D = A_0^2 \frac{\Delta^{\frac{n}{2}}}{\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_n}$$

abhängen, wo

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \Delta_i \Delta_j$$

die Determinante von f ist; so für das Product der äusseren Coefficienten A'_0, A'_n der Reducirten von F :

$$|A'_0 A'_n| < \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} D.$$

Der positive Ausdruck D nimmt aber, als Function der Parameter Δ_i , für gewisse Werthe Δ'_i der Δ_i einen Minimalwerth D' an, der für alle linear transformirte Aequivalente von $F(x, y)$ immer derselbe werden muss. So erkennt Hermite also in D' eine *Invariante der binären Form* $F(x, y)$, und aus demselben Grunde in

$$f' = \sum \Delta'_i (x - \alpha_i y)^2$$

eine *quadratische Covariante* von $F(x, y)$ (für letzteres s. die Abhandlung von 1850 in Crelle J. 41 über Einführung der continuirlichen Parameter). Nur sind D' und f' irrational, rational nur für $n = 3$, wobei D' die Discriminante von F ist; während schon für $n = 4$ $D' = A_0^2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_3 - \alpha_4)^2$ die Wurzel der cubischen Resolvente, f'^2 eines der drei in dem Büschel $F + \lambda H(F)$ [$H(F)$ die Hesse'sche von F] enthaltenen vollständigen Quadrate wird.

Die Bezeichnungsweise war im Anschluss an Cayley und Sylvester gewählt, die seit einigen Jahren mitten in der Entwicklung der Fundamentalprobleme der Theorie der binären Formen niedrigeren Grades begriffen waren und mit denen Hermite seit dieser Zeit (etwa 1851) in engen Verkehr getreten war. Die frühere Bezeichnung „*formes adjointes*“ deutet auf eine zweite Erzeugungsweise für invariante Bildungen hin, welche Hermite schon 1848 (Cr. J. 40, 3^{ter} Brief) ersann, und welche, gültig für Grundformen beliebigen Grades, unabhängig von der Realität der Wurzeln, und mit beliebig vielen Veränderlichen, weit über das beschränkte Feld der ersten Erzeugungsweise hinausging und sich überdies viel leichter handhaben liess.

Hermite hatte, in Verallgemeinerung der Theorie der quadratischen Grundformen, erkannt, dass aus der Discriminante einer Form n^{ten} Grades $F(x_1, \dots, x_m)$ eine Reihe von „adjungirten Formen“, nach späterem Sprachgebrauch von „Contravarianten“, dadurch zu erhalten ist, dass man die Coefficienten von F durch die entsprechenden Coefficienten von

$$F + \lambda(u_1 x_1 + \dots + u_m x_m)^n$$

ersetzt: die Factoren der Potenzen von λ bilden jene Reihe. Von diesem „Evectantenprocess“, wie ihn Sylvester nannte*), ersah Hermite (Cr. J. 40) noch einen andern, einige Jahre später von Sylvester wiedergefundenen, Fall: dass man in einer binären Form die Variabeln x_2, x_1 durch die ersten Differentialquotienten nach x_1, x_2 einer Covariante ersetzt. In der Abhandlung im Cambridge and Dublin Math. J. Bd. 9, 1854 dehnte er dann dieses Verfahren auf Ersetzen der Potenzen und Producte von x_2, x_1 durch die entsprechenden höheren Differentialquotienten einer Covariante aus, d. h. er erhielt den „Überschiebungsprocess“ Cayley's.

Während sich nun so die zu einer Form 3^{ten} Grades gehörigen Bildungen, die schon Eisenstein besass, direct ergaben, wurde Hermite bei der Ableitung der, ihm durch Cayley übrigens bereits bekannten, Relation zwischen den fünf Bildungen einer binären biquadratischen Form aus einer von ihm berechneten Resolventenrelation (Cr. J. 52, 1854) auf ein neues allgemeines Resultat geführt: die Ableitung von Covarianten, oder von Relationen zwischen solchen, aus dem ersten Coefficienten, dem „Quellgliede“. Hermite ersetzt diesen ersten Coefficienten durch seinen transformirten, nimmt zwei der Substitutionscoefficienten als die neuen Variabeln und hat damit unmittelbar die neue Covariante. Cayley freilich hatte um dieselbe Zeit (Cr. J. 47) schon sein aus der partiellen Differentialgleichung für die Covarianten gezogenes allgemeineres Verfahren veröffentlicht. Aber der einfache Gedanke Hermite's musste 1875 von Faà di Bruno, sogar in einer weniger allgemeinen Form, erst wieder entdeckt werden, um Eingang zu finden.

Die wichtigsten Entdeckungen Hermite's auf dem neuen Gebiete sind in seiner vorhin citirten, an neuen Gesichtspunkten und Resultaten ausserordentlich reichen, Abhandlung im Cambridge and Dublin Math. J. „Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées“ niedergelegt. Hier ist der Ausgangspunkt sein *Reciprocitätsgesetz*, dass jeder Covariante φ , r^{ten} Grades und von der Ordnung p in den Coefficienten einer binären Form m^{ten} Grades f , eine Covariante φ' , r^{ten} Grades und von der Ordnung m in den Coefficienten einer binären Form p^{ten} Grades f' entspricht. Dieses Gesetz wird von Hermite durch eine *symbolische* Darstellung α_x^m

*) Cambr. and Dubl. Math. J., Bd. 7.

einer Form m^{ten} Grades gewonnen, welche weniger mit der Cayley'schen, als mit der von Aronhold ausgehenden Symbolik völlig übereinstimmt; man mag kurz sagen, dass man φ' aus φ erhält, indem man φ zunächst durch die Wurzeln α von f ausdrückt (oder auch direct als Covariante einer in m Factoren zerfallenden Form f auffasst) und dann Aggregate wie $(\alpha_1 - \alpha_2)^i$, $(x_1 - \alpha_1 x_2)^k$ bezw. durch auf $f' = a'_x{}^p$ bezügliche Symbole $(a'b')^i$, $a'_x{}^k$ ersetzt.

In der abzählenden Richtung, welche späterhin Cayley und Sylvester eingeschlagen haben, kommt das Gesetz zur Geltung. Hermite, und Anderen, diente es, um von der bekannten Theorie der binären quadratischen Formen aus eine Menge neuer Invarianten und Covarianten zu entdecken, vor Allem eine in den Coefficienten und in den Variablen quadratische Covariante φ_2 der Form f von ungeradem Grade m . Diese Covariante, sowie die mit Hülfe seines Ueberschiebungsprocesses daraus abgeleiteten linearen Covarianten, bilden die Grundlage, welche Hermite erlaubte, an sein eigentliches Ziel heranzutreten: die Behandlung der Gleichungen 5^{ten} Grades.

Indess genügte die so erhaltene beschränkte Anzahl von zu f gehörigen Bildungen Hermite noch nicht. Er suchte eine Methode, welche ihm einen Einblick in das gesammte System bieten konnte, das sich aus einer Grundform ableiten liesse, und er fand sie in einer glücklichen Anwendung des oben berührten Processes der ersten Ueberschiebung: in seiner *Theorie der associirten Formen* (ibid. und Cr. J. 52). Hermite ersetzt hier die Variablen x_1, x_2 einer Covariante g von f bezw. durch

$$x_1 X_1 - \frac{1}{\nu} \frac{\partial h}{\partial x_2} X_2, \quad x_2 X_1 + \frac{1}{\nu} \frac{\partial h}{\partial x_1} X_2,$$

wo h irgend eine Covariante ν^{ten} Grades von f ist, und hat nun in den Coefficienten der so entstehenden Form $g'(X_1, X_2)$ eine Reihe von Covarianten von f , die, im Falle f selbst für g genommen wird, als „das zu h associirte System von f “ [Schwesterformen zu h] bezeichnet wird: alle die unendlich-vielen invarianten zu f gehörigen Bildungen werden, bis auf eine Potenz von h , ganze rationale Functionen dieser Formenreihe. Auch die einfache Herstellung dieses Ausdrucks, und die Berechnung des zu f associirten Systems, hat Hermite gezeigt.

In den *Anwendungen* auf die Formenzusammenhänge für die Grundformen niedrigeren Grades hat diese Theorie unter den Händen Hermite's, und dann Brioschi's*), eine entscheidende Rolle gespielt. Der Erstere hat insbesondere auf die gleichzeitige Benutzung der beiden, zu f oder zur Hesse'schen $H(f)$, associirten Systeme, seinen Beweis für die Endlichkeit des Formensystems einer binären biquadratischen Grundform gestützt

*) S. meinen Aufsatz über F. Brioschi, diese Annalen Bd. 50.

(Cr. J. 52), während der Satz selbst ohne Beweis schon von Cayley ausgesprochen war (Cr. J. 50).

Die *Theorie der binären Grundform 5^{ten} Grades*, f_5 , ist eines der umfassendsten Werke Hermite's. Für diese Form hat er, mit Hülfe der schon erwähnten quadratischen und linearen Covarianten, invariante Darstellungen erfunden (Cambr. and Dubl. Math. J. 9), welche er theilweise als *kanonische*, theilweise als *typische* bezeichnet; und unter letzterem Namen sind sie, unter Weiterführung der Theorien und Ausdehnung auch auf Grundformen geraden Grades*), in die neuere Algebra als wesentlicher Bestandtheil eingegangen. Sie unterscheiden sich von der in der Theorie der associirten Formen auftretenden Darstellung dadurch, dass nun die transformirte Gestalt von f nur Invarianten, statt Covarianten, als Coefficienten hat, hängen aber, wenn man dort h gleich der quadratischen Covariante φ_2 von f_5 setzt, eng mit jener zusammen. So werden einmal als neue Variable die beiden Factoren dieser Covariante φ_2 benutzt, wobei in die Coefficienten die Invarianten J_4, J_8, J_{12} der Ordnungen 4, 8, 12, sowie $\sqrt{J_4}$, rational eintreten, und zwar, von einer Potenz von J_4 als Factor abgesehen, in nur zwei absolut invarianten Combinationen. An diese Untersuchung knüpft sich eine unvermuthete Entdeckung Hermite's: die einer Invariante J_{18} , 18^{ter} Ordnung in den Coefficienten von f_5 , der ersten windschiefen Invariante, und mit der Eigenschaft, dass erst ihr Quadrat eine rationale ganze Function von J_4, J_8, J_{12} wird, während alle übrigen Invarianten, zunächst bis auf eine ganze Potenz von J_4 , rationale ganze Functionen dieser vier Invarianten werden. Zur typischen Darstellung von f_5 benutzt Hermite als neue Variable zwei lineare Covarianten von der 5^{ten} und 7^{ten} Ordnung, in welcher sich φ_2 als Summe zweier Quadrate ergibt; und auch hier folgt der eben angeführte Satz über den Ausdruck aller Invarianten von f_5 , nur dass eine Potenz von J_{12} als Nenner auftritt. Der Vergleich beider Ausdrücke führt Hermite endlich zum Schluss, dass sich alle Invarianten schon als *ganze* Functionen der vier Fundamentalinvarianten darstellen lassen; ein Satz, den er später (C. R. Bd. 61, 1865) auch aus dem functionentheoretisch ganzen Charakter der Invarianten abgeleitet hat.

Doch waren alle diese umfassenden Gedanken und Untersuchungen in der Formentheorie für Hermite nur Vorbereitungen für die *Gleichungstheorie*. Es handelt sich für ihn um Aufstellung von invarianten Kriterien für das Verhalten der Wurzeln einer Gleichung 5^{ten} Grades bezüglich *Realität*. Dass die typische Form von f_6 aus reellen Substitutionen resultirt, zeigt die Möglichkeit solcher Ausdrücke; aber bei der complicirten Gestalt jener Form stellte die wirkliche Herstellung noch grosse

*) Clebsch, Binäre Formen, 1872.

Anforderungen an den Forscher, die er durch continuirliches Variiren der Parameter J_4, J_8, J_{12} unter der Bedingung $J_{18} = 0$, und Untersuchen der dadurch bedingten Verzweigung von J_4 überwand. Zunächst freilich erhielt er nur hinreichende Bedingungen*); aber gerade dieser Umstand trieb ihn späterhin zu neuen grossen Anstrengungen auf dem Gebiet der Invariantentheorie, und nun in ganz directem Zusammenhang mit dem Ziel, das sich ihm inzwischen darbott: der *Lösung* der Gleichungen 4^{ten} und 5^{ten} Grades.

Er stellte sich die Aufgabe, möglichst einfache Resolventen einer Gleichung $f = 0$ [im uneigentlichen Sinne, nämlich unter Adjunction „accessorischer“ Irrationalitäten], mit invarianten Coefficienten und mit besonderen Invarianteneigenschaften, aufzustellen; und für diesen Zweck ersann er verschiedene neue Formen der *Tschirnhausen-Transformation*.

Die erste Gestalt, welche Hermite der Transformation giebt (C. R. Bd. 46, 1858), ist diejenige, welche aus

$$f_n(x) = 0, \quad z = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

hervorgeht, indem man die Potenzen t^i durch Parameter $t_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ ersetzt und die in den t_i lineare Relation hinzunimmt, welche das zweite Glied der transformirten Gleichung in z zu Null macht. Die übrigen Coefficienten werden dann Covarianten von f_n , aber in den $n-1$ Variabeln $t_0, \dots, t_{n-2}$, die sich wie die Potenzen von x transformiren. Die Theorie wird benutzt, um, den Gleichungen bei der Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen entsprechend, im Falle $n=4$ die Gleichung $f_4(x) = 0$ in eine solche zu transformiren, deren quadratische Invariante verschwindet. Und die invariantentheoretische Untersuchung solcher Formen in den t_i hat für $n=5$ späterhin unter den Händen von F. Klein, wenn auch von anderem Ausgangspunkte aus und das binäre Gebiet überschreitend, eine Grundlage von dessen Theorie einer Reduction der Gleichung 5^{ten} Grades gebildet.

Die zweite Gestalt (C. R. Bd. 61, 1865) erreicht den Zweck durch eine Transformation

$$f_n(x) = 0, \quad z = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wo P und Q Covarianten gleichen Grades von $f_n(x)$ sind.

Hierher gehört schon, dass er (Cr. J. 52), vermöge der Relation zwischen den Bildungen einer allgemeinen biquadratischen Form f_4 , das elliptische Integral mit $\sqrt{f_4}$ mittelst einer derartigen Transformation $z = \frac{H(f_4)}{f_4}$ in eine invariante (Weierstrass'sche) Gestalt übergeführt hätte;

*) S. meinen Aufsatz über J. J. Sylvester; diese Annalen Bd. 50, S. 150.

sowie die spätere Transformation dritter Ordnung $z = \frac{P}{Q}$, wo P, Q Polaren von f_4 sind (Cr. J. 60).

Nun wählt Hermite, an die Partialbrucheigenschaften von $\sum_i \frac{\varphi(x_i)}{f'(x_i)}$ anschliessend, für $n > 4$ die Transformationsformel [x_1, x_2 binäre Variable]:

$$f_n(x_1, x_2) = 0, \quad z = \frac{(a_1 x_2 - a_2 x_1) \sum_{k=1}^{n-1} t_k \varphi_{n-2}^{(k)}(x_1, x_2)}{\frac{\partial f}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2}.$$

ein von den a_1, a_2 unabhängiger Ausdruck, in dem die $\varphi_{n-2}^{(k)}$ $n-1$ Covarianten $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades der Grundform n^{ten} Grades, $f_n(x_1, x_2)$, sind, die t_k aber $n-1$ willkürliche Parameter, die etwa benutzt werden, um, neben dem zweiten, eine Reihe von weiteren Gliedern der transformierten Gleichung $F(z) = 0$, als Formen in den t_k , zu Null zu machen. In Bezug auf die allgemeine Gleichung 5^{ten} Grades dient Hermite diese Methode, um dieselbe in eine 3-gliedrige, und auch in andere Formen überzuführen; und dabei erlangt er auch, indem er die Invarianten als Functionen der Wurzeln discutirt, die Verbindung mit den Resolventenbetrachtungen Kronecker's. Endlich ergibt ihm dieser Weg die Revision seiner invarianten Realitätskriterien für die Wurzeln von $f_5(x) = 0$; nur gelingt ihm die Umsetzung der Sturm'schen Functionen in Covariantengestalt (er findet solche in zwei Reihen von Veränderlichen) nicht so einfach, als kurz darauf Schramm*).

Auch auf die *ternären cubischen Formen* hat Hermite seine Methode ausgedehnt. Diese Formen interessirten ihn schon wegen ihres Zusammenhangs mit den elliptischen Functionen und mit speciellen binären Formen und Gleichungen 4^{ten} Grades. Er hat zu diesem Zweck sie zuerst zwar in der Hesse'schen kanonischen Form betrachtet, zum Studium ihrer Contravarianten (Journ. de Math., ser. 2, Bd. 3, 1858); das auf die allgemeine Form bezügliche elliptische Integral jedoch ebenfalls (Cr. J. 63, 1863) in die binäre invariante Gestalt übergeführt. Die kurze Note „Sur le résultant de trois formes quadratiques ternaires“ (Cr. J. 57, 1860) ist aber durch methodische und sachliche Fortschritte wichtig: sie giebt die Benutzung der Quellglieder für das ternäre Gebiet und die Ausdehnung des Elvectantenprocesses auf dieses Gebiet; und ihr Inhalt geht weit über den an Aronhold, Sylvester und Cayley anknüpfenden Gegenstand des Titels hinaus, da eine zusammenhängende Invariantentheorie des Netzes von drei quadratischen ternären Formen φ_i geliefert wird. Indem sie drei lineare Contravarianten des Netzes aufstellt und zur typischen Darstellung der φ_i

*) Annali di Mat., ser. 2, t. 1, 3.

benutzt, führt sie direct zu einer cubischen Form U , deren Derivirte die φ_i werden. Zur Vollständigkeit der Theorie des Netzes fehlt nur noch der Beweis, dass nur *eine* derartige Form U existirt, und die Betrachtung des dem Netze zugehörigen Gewebes. Aber dafür giebt die Note noch einen Ausblick auf eine analoge Theorie für zwei binäre cubische Formen; und dauernd hat sich an sie die Bezeichnung der „Hermite'schen Curve des Netzes“ geknüpft. So kurz solche Noten Hermite's sind, sie pflegen, wie die vorliegende, wesentliche Gedanken in aphoristischer Weise auszusprechen und liefern dadurch oft Grundlagen von Theorien, deren Entwicklung der Forscher seinen Nachfolgern überlassen hat.

Es ist charakteristisch für Hermite, dass hinter diesen bedeutenden rein-algebraischen Zielen und Anwendungen der ursprüngliche Ausgangspunkt seiner invariantentheoretischen Betrachtungen: die Verwendung für die *Arithmetik*, ganz zurücktritt. Er ging, sogleich nachdem er die neuen Begriffe principiell entwickelt hatte, an den Versuch, sie ausgiebiger für die höhere („transcendente“) Zahlentheorie zu verwerthen (Cr. J. 52, 1854): für die wirkliche Aufstellung aller Reducirten der ganzzahligen binären Formen n^{ten} Grades, bei gegebenen Werthen ihres Invariantensystems, wie für das Aequivalenzproblem. Auch ihm war hierbei das Princip Eisenstein's, dass die nicht-äquivalenten Classen von Formen dritten Grades den nicht-äquivalenten Classen von quadratischen Formen (als Covarianten jener) eindeutig entsprechen müssen, das leitende; und es genügt ihm zur Untertheilung der cubischen und biquadratischen Classen in „Ordnungen“ (im Gauss'schen Sinne), und zum Vergleich der, je nach der zu Grunde gelegten Covariante verschiedenen, Untertheilungen. Für die Ableitung der cubischen Classen selbst werden aus diesem Princip sie bestimmende Ungleichungen aufgestellt (C. R. Bd. 48, 1859). Und wenn auch bei diesen Verfahrungsweisen wirkliche Classenzahlausdrücke nicht zu erhalten sind, so ist es doch bedauerlich, dass Hermite auf seine wiederholt ausgesprochene Absicht, von Seiten der Invariantentheorie aus auf diese und andere arithmetische Fragen, insbesondere die Aequivalenztheorien, weiter einzugehen, nicht zurückgekommen ist; und so hat er auch hier ein Untersuchungsfeld offen gelassen.

Auf dem weiten Umweg über die quadratischen und bilinearen Formen, und deren Transformationen in sich, wurde Hermite im Jahr 1855 zu den Bestrebungen der ersten Arbeitszeit zurückgeführt: zu den *Abel'schen Functionen von zwei Variabeln*, und zwar zum *Transformationsproblem*. Von zwei Seiten her waren zur Behandlung dieses Problems inzwischen die Vorbereitungen gefördert. Einmal waren die zugehörigen sechzehn Thetafunctionen von zwei Argumenten ermittelt, und es war auf dieselben

das Umkehrproblem gestützt worden. Auf der andern Seite konnte Hermite daran denken, auf Grund seiner Untersuchungen über bilineare Formen gerade an einem Punkt anzusetzen, in dem das Problem eine Schwierigkeit bot: nämlich dass, im Falle der periodischen Functionen von zwei Variabeln mit vier simultanen Periodensystemen, die Coefficienten in der linearen Substitution zwischen vier alten und vier neuen Periodicitätsmoduln eines Integrals erster Gattung nicht mehr willkürliche ganze Zahlen, von der Determinante k^2 für eine Transformation k^{ter} Ordnung, sind, sondern dass sie noch die linke Seite einer bilinearen alternirenden Relation, welche zwischen den zweimal vier Moduln der beiden hier existirenden Integrale erster Gattung von Rosenhain und Weierstrass nachgewiesen war, in sich transformiren müssen (bis auf den Factor k^2).

Jetzt definiert Hermite das Transformationsproblem so, dass die neuen Variabeln als solche rationale Functionen der ursprünglichen bestimmt werden sollen, welche die Integralsummen, aus denen die linke Seite des Jacobi'schen Umkehrproblems besteht, analog gebildeten in neuen Variabeln proportional machen. Die Noten: „Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes“ (C. R. t. 40), eine der geschlossensten Darstellungen, welche Hermite geliefert hat, sind der Lösung dieses Problems gewidmet.

Jacobi, und ihm selbst (s. oben, S. 344), war die Anzahl der Transformationen k^{ter} Ordnung der ultraelliptischen Functionen längst bekannt, nun aber war es ihm möglich, sie arithmetisch vollständiger zu discutiren. Er reducirt, für eine Primzahl k , die Gesammtheit der quaternären Transformationen k^{ter} Ordnung, indem er die vermöge einer einmaligen Transformation erster Ordnung in einander überführbaren als äquivalent betrachtet [„Eisenstein's Aequivalenz nach links“], auf vier Typen, aus welchen sich die Repräsentanten der nicht-äquivalenten Classen unmittelbar ergeben; auch trennt er nach dem Modul 2 die Transformationen erster Ordnung selbst noch von einander. Zu den Typen bildet er die „supplementären“, welche, mit jenen zusammengesetzt, zur Multiplication führen. Während sich Hermite selbst früher schon mit den binären Substitutionen und der Zusammensetzung der Determinante vom Werth 1 beschäftigt hatte (Journ. de Math. XIV), schliesst er also jetzt an die arithmetischen Reductionsbegriffe an, welche Eisenstein für die binären (Cr. J. 28) und ternären (Berliner Monatsber. 1852 und Journ. d. Math. XVII) Substitutionen gegeben hatte. Man weiss, dass Kronecker späterhin (Berliner Monatsber. 1866) auch für die Gesammtheit der hier in Betracht kommenden Transformationen von der Determinante 1 den Grundgedanken der Zusammensetzung aus einfacheren durch Aufstellung seiner „elementaren“ Transformationen weiter verfolgt hat, die nur aus Vertauschung oder

Addition zweier Variabeln bestehen; wie denn derselbe auch Hermite's Betrachtung auf nicht-symmetrische Zahlssysteme erweitert hat.

Hermite's Transformationstheorie geht von den *Thetafunctionen* aus, und gründet sich, unter Erweiterung der Periodicitätsgleichungen dieser Functionen, auf den Begriff allgemeiner höherer Thetafunctionen, auf welche der Satz von der linearen Zusammensetzung aus einer endlichen Anzahl analoger Functionen — sein Ausgangspunkt in der Theorie der elliptischen Functionen — ausgedehnt wird. Sein Princip ist: dass vermöge einer Transformation k^{ter} Ordnung eine Thetafunction $\Theta_\alpha(X, Y)$ mit den neuen Moduln G, G', H , in welcher die neuen Veränderlichen X, Y bestimmte lineare Functionen der alten Veränderlichen x, y sind, nach Multiplication mit einer Exponentialgrösse, deren Exponent eine einfache quadratische Function von x, y ist, zu einer Thetafunction k^{ter} Ordnung der alten Veränderlichen x, y , mit den alten Moduln g, g', h wird; denn sie erfüllt dieselben Periodicitätsrelationen, wie diese. Insbesondere zeigt Hermite, dass man jenes Product für ungerades k schon als ganze Function k^{ter} Dimension von solchen vier gewöhnlichen Thetafunctionen $\vartheta_{\beta_i}(x, y)$, mit den Moduln g, g', h , darstellen kann, deren vier Charakteristiken β_i ein „Göpel'sches“ System bilden (von der Summe 0 und zu je zweien „syzygetisch“); ja dass so durch dasselbe Göpel'sche System vier Functionen $\Theta_\alpha(X, Y)$ dargestellt werden können, welche selbst ein Göpel'sches System bilden. Zwischen solchen vier Functionen herrscht noch die von Göpel angegebene biquadratische Relation; und auch deren Existenz wird von Hermite aus seinem Princip bewiesen (für $k = 2$), wie auch die quadratischen Relationen. Da weiter der vorhin genannte Exponentialfactor von den vier Zahlen, welche nach dem Modul 2 genommen die Charakteristik α der Function $\Theta_\alpha(X, Y)$ unter den 16 gleichberechtigten bestimmen, unabhängig ist, so erhält man auch Quotienten der neuen Thetafunctionen durch Quotienten der alten ausgedrückt, d. h. den Ausdruck von neuen vierfach-periodischen Functionen durch die ursprünglichen, also die vollständige algebraische Lösung des Transformationsproblems.

Die Ausführungen Hermite's erstrecken sich auf die Angabe der Transformation der Moduln und der Charakteristikenzahlen, auf die Convergenz der neuen Thetareihe, auf die Form der Relationen. In Herstellung der Theta- und algebraischen Relationen, und der Modulargleichungen, blieb aber noch ein weites Feld offen, das sogleich von Brioschi (C. R. 1858) und weiterhin, nachdem Weierstrass die für die Nullwerthe der Argumente verschwindenden Thetafunctionen bestimmt hatte, für alle hyperelliptischen Classen zunächst von Königsberger bearbeitet worden ist (Cr. J.).

Als für Hermite's Denkweise bezeichnend sei dabei noch auf zwei Punkte besonders hingewiesen.

Der eine betrifft die Einführung einer gewissen speciellen quaternären quadratischen Form, deren Coefficienten reelle Functionen der reellen und imaginären Theile der Moduln der Thetafunction sind. Sie tritt bei Untersuchung der Convergenz der transformirten Thetafunction auf und hat die Eigenschaften, einmal: durch die speciellen Substitutionen, welche zu einer Transformation k^{ter} Ordnung gehören, in eine Form überzugehen, welche, bis auf einen Factor, aus den neuen vier Veränderlichen und den transformirten Moduln genau so zusammengesetzt ist, wie die ursprüngliche aus den alten Veränderlichen und Moduln; sodann: dass ihre adjunkte Form mit ihr, bis auf einfache Vertauschung je zweier Variabeln unter Zeichenänderung, zusammenfällt. Man hätte hier also eine Theorie specieller quadratischer Formen, unter einer Gruppe specieller Substitutionen, eine Theorie, die sich, wie früher bei den Formen mit conjugirt-imaginären Variabeln, derjenigen der binären Formen anschmiegt und zu einem vereinfachten arithmetischen Reduktionsverfahren Veranlassung gäbe. Diese hier nur angedeutete Theorie hat Brioschi (Cr. J. 52) durch Betrachtung windschiefer Determinanten gleich für $2n$ Variable aufgenommen, und nach ihm Laguerre.

In zweiter Linie sei hervorgehoben, dass Hermite aus der Transformation der Charakteristikenzahlen und aus Weierstrass' Indicesbezeichnung für die Abel'schen Functionen (Cr. J. 47) die Elemente eines Calculs für die 16 Charakteristikenzahlen ableitet. So kann er insbesondere die Charakteristiken eines Göpel'schen Quadrupels auf allgemeine und einfache Weise definiren. Dies war der Anfang einer combinatorischen und einer Gruppentheorie der Charakteristiken, und zugleich ein erster Versuch zu einer Zusammenfassung der grossen Formelcomplexe bei den Theta-Relationen.

Die in den Noten von 1855 niedergelegten Untersuchungen sind die dauernde Grundlage nicht nur der Transformationstheorie der Abel'schen Functionen aller Arten, sondern auch der Theorie der Thetafunctionen überhaupt geworden; ein ausgedehnter Theil der Theorie der Substitutionsgruppen, die der „Abel'schen Gruppen“ (C. Jordan), ist durch sie veranlasst; und die nun folgenden Arbeiten über Lösung der Gleichung 5^{ten} Grades und über die Modulargleichungen der elliptischen Functionen sind auf ihrem Boden erwachsen. Vorher sei noch angeführt, dass Hermite bei der directen Anwendung der Theorie auf die elliptischen Functionen noch ein weiteres Verdienst zukommt. Er hat (C. R. 46 und Journ. de Math. ser. 2, Bd. 3, 1858) die Transformation der vier Thetafunctionen mittelst allgemeinsten Transformation erster Ordnung (Theorie der „unendlich-vielen Formen der Thetafunction“) vollständig ausgeführt, und zwar in einem einzigen Ausdruck, der explicit ist in den Moduln und in den

Transformationszahlen: ein Problem, bei dem besonders die explicite Bestimmung des betreffenden Zahlenfactors, der eine 8^{te} Wurzel der Einheit ist, Schwierigkeiten bot, die aber durch Zurückführung auf Gauss'sche Summen bewältigt wurden.

In den Jahren 1858 und 1859 wandte sich Hermite *algebraischen* Untersuchungen im Transformationsgebiet der *elliptischen Functionen* zu. Es entstand die berühmte Note „*Sur la résolution de l'équation du cinquième degré*“ (C. R. t. 46, v. 15. März 1858), dann die beiden über die Auflösung der *Gleichung 4^{ten} Grades* durch elliptische Functionen (ibid.), und endlich die grosse Arbeit über die *Modulargleichungen* (ibid. t. 48, 49); 1859), Arbeiten, welche auch, pietätvoll dem Andenken Cauchy's gewidmet, vereint in Separatausgabe erschienen sind.

In dem Aufsatz über Brioschi*) wurde über den Inhalt der ersten Note, und über die weitere Geschichte des Gegenstandes so eingehend berichtet, dass an dieser Stelle nur kurz darauf verwiesen zu werden braucht. Auch über die invarianten Gedanken, welche Hermite bei Gelegenheit der Aufstellung von Resolventen der Gleichung 4^{ten} und 5^{ten} Grades in den genannten Noten von 1858, wie weiterhin in den C. R. t. 61, 62 (1865, 66) entwickelt hat, wurde schon oben (S. 361) berichtet.

Aber die, theoretisch betrachtet, grösste Förderung, welche der Forscher selbst, und in noch höherem Grade die spätere Wissenschaft aus diesen Untersuchungen gezogen hat, liegt weniger in Hermite's algebraischem Ziel der Aufstellung niedriger Resolventen, bei dem sich die Auflösung der Gleichung 5^{ten} Grades wie nebenher ergab, als in dem von ihm dabei eingeführten und der Methode zu Grunde gelegten transcendenten Begriffe: der *Modulfunction*. Es sind die transcendenten eindeutigen Functionen des Periodenverhältnisses ω , welche bei der Gesamtgruppe aller ganzzahligen gebrochen-linearen Substitutionen von ω , von der Determinante 1, nur eine endliche Anzahl von Werthen annehmen.

Die Einführung von ω , an Stelle des Jacobi'schen $q = e^{i\pi\omega}$, dient Hermite dazu, um auch eine Grösse, wie $u = \sqrt[4]{x} = \varphi(\omega)$, die noch von einer 8^{ten} Wurzel aus q abhängt, eindeutig zu definiren, und um die Wurzeln $v = \sqrt[4]{\lambda} = \varphi(\omega')$ der Modulargleichungen analytisch eindeutig von einander zu trennen, mit einfacheren Substitutionen zwischen ω' und ω , als dies bei q der Fall ist. Hermite liefert für die sechs mod. 2 verschiedenen Classen von linearen Transformationen die zugehörigen Transformationen von $\varphi(\omega)$ und von $\sqrt[4]{x} = \psi(\omega)$, ebenso des Jacobi entnommenen $\chi(\omega) = \sqrt[3]{\varphi(\omega) \cdot \psi(\omega)}$ (C. R. t. 46), und er hat später (C. R. t. 57, 1863) einen Beweis der Um-

*) Diese Annalen Bd. 50, S. 483—486.

formungen von $\varphi(\omega)$ mittelst Transformation 2^{ter} Ordnung der Thetafunction angedeutet. Die Tafeln sind dann von Königsberger („Die Transformation etc.“, Teubner 1868 und Math. Ann. Bd. 3) aus der allgemeinen Hermite'schen Transformationsformel, von Schläfli (Cr. J. 72) aus der Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln abgeleitet worden.

In der Arbeit über die Modulargleichungen findet Hermite, der sich schon 1847 (s. dessen zweiten Brief an Jacobi, Cr. J. 40) mit dem Beweis des Galois'schen Satzes von der Erniedrigung der Modulargleichungen für die Transformationsordnungen $n = 5, 7, 11$ beschäftigt hatte, zunächst dessen Gruppe, bei adjungirter Discriminante, wieder; und er zeigt dabei insbesondere, dass zu dieser Adjunction für eine Primzahl n nur die von $\sqrt[n-1]{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n}$ nöthig ist. Durch Aufstellung specieller Functionen s_i der Wurzeln (wie Kronecker 1858 und Betti 1859) zeigt er dann die Erniedrigung der drei Fälle auf den Grad n , und liefert auch allgemeine Ausdrücke für deren Substitutionssystem (für $n = 7$ noch einfachere in C. R. t. 57). Die Modulargleichungen für die s_i selbst werden nur der Form nach angedeutet, schon etwas ausführlicher in Annali di Mat. II, 1859; aber der Weg ist späterhin, zunächst von Königsberger, weiter verfolgt worden.

Den grundlegenden und wichtigsten Theil des Aufsatzes bildet eben die Untersuchung über die Zusammensetzung der *Discriminante* der Modulargleichung zwischen u und v , eine Untersuchung, die wieder tief in die Arithmetik der binären quadratischen Formen zurückführte. Hermite erkennt, dass die Discriminante D , abgesehen von Potenzen von u und $1 - u^8$, ein vollständiges Quadrat einer ganzen rationalen Function wird; und dass die Gesammtheit der Werthe von u , welche D zu Null machen, übereinstimmt mit der Gesammtheit der entsprechenden Doppelwurzeln v der Modulargleichung. Dieses Grössensystem führt daher zu linear gebrochenen Ueberführungen von ω in sich selbst, also zu dem Verschwinden von binären ganzzahligen quadratischen Formen $\Omega(\omega)$; wie übrigens schon daraus folgt, dass die zu zwei zusammenfallenden Wurzeln v gehörigen linearen Combinationen von ω einander äquivalent werden. Diese Formen $\Omega(\omega)$ sind definite, und zwar gehört zu jeder Transformationszahl n eine endliche Anzahl von Formendeterminanten $-\Delta$, nach arithmetischen, von der Theilung der Zahlen n und Δ in Factoren abhängigen, Gesetzen; jede der nicht-äquivalenten Classen von der Determinante $-\Delta$ zerfällt dann noch, mod. 2, in Typen von Formen von der Art, dass die Gesammtheit der Formen eines Typus die Grösse $u = \sqrt[n]{x}$ nicht mehr ändern. So ergeben sich aus den Repräsentanten $\Omega(\omega)$ der verschiedenen Typen, die den zu n gehörigen Determinanten $-\Delta$ entsprechen, in Zusammenord-

nung nach „Geschlechtern“ (Gauss), alle Factoren der Discriminante D . Es werden hierbei Summen von Classenanzahlen quadratischer Formen bei Primzahl n mit dem Grad von D — bei beliebigem ungeradem n , ohne quadratischen Theiler, mit höheren Theilerfunctionen von n — in Verbindung gesetzt.

Hermite stiess in diesen Untersuchungen mit Kronecker zusammen, der, den Spuren Abel's folgend, 1857 von Seiten der complexen Multiplication der elliptischen Functionen her auf dieselben beliebigen definiten quadratischen Formen $\Omega(\omega)$ gekommen war, deren Auflösung eben die speciellen Moduln $\wp(\omega)$ liefert, für welche eine solche Multiplication stattfindet: Weber's transcendente „Classeninvarianten“ für die ganze Classe äquivalenter Formen $\Omega(\omega)$ von der Determinante — Δ . Hermite gelingt es, durch Gegenüberstellung seiner und der Kronecker'schen Methode, neue Verbindungen der Classenzahl-Relationen Kronecker's zu erhalten; aber letzterer strebt einer tieferen Erfassung der speciellen Classeninvarianten als algebraischer Zahlen zu.

Wenn Hermite seinen Begriff der *Modulfunction* aus der allgemeinen Theorie der elliptischen Functionen ableitete, so war er sich doch bewusst, dass hier ein Grundbegriff einer neuen analytischen Function vorliege, der einer von jener Disciplin unabhängigen functionentheoretischen Definition und Durchbildung bedürfe, um unmittelbar die merkwürdigen analytischen und arithmetischen Eigenschaften der Function erkennen zu lassen und um seinerseits wieder auf die Theorie der elliptischen Functionen neugestaltend einwirken zu können. Er hat dies in seinen „Notes sur les fonctions elliptiques“ (Anhang zu Lacroix's Calcul) schon 1861 vollständig deutlich ausgesprochen; aber er selbst hat zunächst nur die angeführten gruppentheoretischen Gesichtspunkte in die keimende Theorie hereinge-
gezogen. Die Anregung wirkte jedoch um so tiefer.

In der That entstand schon 1865 unter den Händen von St. Smith die gruppentheoretische Grundlage der ganzen späteren Stufeneintheilung der Moduln: die Zugehörigkeit von Moduln wie $\sqrt[4]{\kappa}$, $\sqrt[3]{\kappa}$ zu einer Congruenz-Untergruppe der oben genannten Gesamtgruppe Γ von Substitutionen für ω (Reports of the British Association), mit dem Satze, dass *alle* Substitutionen von ω , welche $\wp(\omega)$ in sich transformiren, der Gruppe Γ angehören; ein Satz, mit welchem ein Jahrzehnt später auch Hermite selbst wieder in die oben entstehende Theorie eingriff (Anmerkung zu Fuchs' Abh. in Cr. J. 83) und der ebenfalls zur Definition der Modulfunctionen aus der Gruppe Γ und ihren Untergruppen drängen musste. Ein weiterer Schritt geschah wiederum durch St. Smith: die geometrische Versinnlichung dieser Gruppen in der Ebene durch die „Modultheilungen“, Dreieckstheilungen nach dem Vorbilde der schon von Schwarz für die Function

$\varphi^8(\omega)$ gegebenen (Cr. J. 74, 1872). In seiner Arbeit von 1874 (publ. 1877 in den Acc. dei Lincei) stellt ihm jeder Punkt ω der oberen Halbebene eine quadratische definite Form in x, y : Norm $(x - \omega y)$, vor, die entsprechenden Punkte der Theilung äquivalente Formen; und es genügen einfach anschauliche Verfahren, um die Reductionsbedingungen und für ganzzahlige Formen die Endlichkeit der Classenzahl festzustellen. Damit war auch Dedekind's „Hauptfeld“, das spätere „Fundamentalpolygon“ gewonnen. Zu gleicher Zeit hat auch Selling (Cr. J. 77, 1874) mit seiner Gebietstheilungs- und Gruppentheorie der indefiniten binären und ternären Formen hier wesentlichen Einfluss geübt. Die entscheidenden neuen Gesichtspunkte in die Theorie brachte einmal im Allgemeinen die Einführung der, in der Theorie der linearen Differentialgleichungen von Fuchs entwickelten Begriffe, insbesondere aber die Anwendung der Riemann'schen Begriffe auf die Definition von Functionen durch die neue Gebietstheilung. Und hierbei hat, angeregt durch Hermite's Bemerkung, Dedekind (Cr. J. 83, 1877) das grosse Verdienst, eine directe und systematische Begründung einer Theorie der Modulfunctionen gegeben zu haben. Dedekind hatte aber noch eine andere Anregung durch Beschäftigung mit dem von ihm gerade vorher (1876) bearbeiteten Fragmente Riemann's (dessen Werke XXV—XXVII); denn dort finden sich schon Grenzfälle der Modulfunctionen, wenn ω an eine reelle rationale Zahl heranrückt, mit Erläuterungen, welche in der That Hermite's Betrachtungen vor 1858 über die lineare Transformation der Thetafunctionen in einem schwierigen Punkte fortführen. Dass Gauss (nach seinem Nachlass, Bd. 8 von Gauss' Werken) gerade bezüglich der Modulfunctionen Jacobi und Abel dauernd vorausgeblieben und heute als der Vorläufer Riemann's anzusehen ist, hat in die Entwicklung nicht eingegriffen. An die von Dedekind explicit eingeführte einfachste Modulfunction, die absolute Invariante $J (= \text{val}(\omega))$ der binären biquadratischen Form des elliptischen Integrals, als Hauptmodul der Gesamtgruppe Γ — eine Function, die schon in den Rechnungen Hermite's eine Rolle spielte und die auch Klein aus der Schwarz'schen Arbeit ableitete —, knüpfte dann die von Klein ausgehende allseitige Entwicklung der Theorie an, die unter Anderen auch die einfachsten Formen der Modulargleichungen für $n = 7$ und 11 lieferte.

Dass auch die Modulfunctionen selbst nur das erste Glied einer Reihe von höheren Functionen, der „automorphen Functionen“, und damit eines wichtigen, noch in der Entstehung begriffenen Theiles der Nach-Hermite'schen Analysis, werden sollten, beweist die Tragweite der ersten Anregung Hermite's.

Wenn die heutige Weiterentwicklung der Transformationstheorie der elliptischen Functionen und der zahlentheoretischen Anwendungen haupt-

sächlich der Theorie der Modulfunctionen zu verdanken sind, so ist Hermite gleich nach den bis jetzt charakterisirten Arbeiten auf einen andern Weg der Verbindung der elliptischen Functionen mit der Zahlentheorie zurückgekommen, der zwar auch die genannten recurrirenden Classenzahl-Relationen liefert, aber bei Weitem nicht so ausgiebig ist, wie der erstere Weg. Er schliesst an die Jacobi'sche Methode an (Cr. J. 3 und „Fundamenta“), Zahlen in eine Summe von vier Quadraten zu zerlegen durch Verwandlung der vierten Potenz einer q -Reihe in eine andere q -Reihe. Angeregt durch Liouville, der aus einigen weiteren solchen Reihen analoge Schlüsse gezogen hatte, verallgemeinert Hermite 1861 (C. R. 53, 55; Journ. de Math. VII, 1862) die Methode: indem er elliptische Functionen, wie $\frac{H^2(u)}{\Theta(u)}$ (seine späteren „doppelt-periodischen Functionen dritter Art“), durch trigonometrische Reihen darstellt, und eine Anzahl solcher mit einander multiplicirt und integrirt, erhält er q -Reihen, die als Exponenten von q einerseits reducirte definite quadratische Formen, andererseits, bei Ordnen dieser Reihen, die Determinanten (absolut genommen) dieser Formen enthalten, wobei dann als Coefficient je eine Classenzahl der Determinante auftritt. In späterer Zeit (Cr. J. 99, 100 [1885] oder Acta Mathem. Bd. 5, 1884) ist Hermite in Fortsetzung dieser Betrachtungen zu allgemeineren Resultaten gelangt, so zu Relationen zwischen Anzahlen von Zerlegungen in drei oder fünf Quadrate und Theilersummen, und zu asymptotischen Werthen dieser Theilerfunctionen.

Während der Weg Kronecker's auf einer tieferen Beziehung zwischen zwei scheinbar entfernten Gebieten, wie Zahlentheorie und Theorie der elliptischen Functionen, die als Invarianten von quadratischen Formenclassen auftreten, beruht, und gerade dadurch ein unerwartetes Licht auf den Gang der Wissenschaft überhaupt und die Momente geworfen wird, welche sie im Verborgenen fördern*), so ist auch bei Hermite's Ausbildung des Jacobi'schen Weges beachtenswerth, wie methodisch er die Entwicklungen der elliptischen Functionen mit seiner Theorie der reducirten quadratischen Formen in Verbindung setzt und die Classenzahl-Relationen arithmetisch, wenn nicht entstehen, so doch in Evidenz treten lässt.

Schlag auf Schlag waren die grossen Arbeiten der 50^{er} Jahre auf einander gefolgt. In den 60^{er} Jahren nahm nun Hermite Gedankenverbindungen aus der frühesten Zeit auf, erst leise ansetzend, Jahre hindurch sogar scheinbar pausirend, bis er sich 1873 nochmals zu einem Höhepunkt erhob. Es sind die Probleme der *Näherungsausdrücke für Zahlen und Functionen*, die ihn nun beschäftigen.

*) Cf. Hermite's Nachruf auf Kronecker in C. R. von Jan. 1892.

Zunächst treten Fragen der *Interpolation* an den Forscher heran. Schon 1859 (C. R. t. 48) hatte er zur Beantwortung von Tschebyscheff's Frage nach der möglichst genauen Annäherung einer Function an mehr als n Stellen durch ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades nach der Methode der kleinsten Quadrate, bei gegebenen durch Werthe einer ganzen Function bestimmten Gewichten, die Lagrange'sche Interpolationsformel verallgemeinert, indem er wieder eine quadratische Form adjungirte. Auch jetzt trat ihm eine Frage Tschebyscheffs entgegen: wie man die von Gauss in der mechanischen Quadratur angestellten Interpolationsuntersuchungen auf Functionen von mehr als einer Variablen verallgemeinern könne.

Nach Gauss („Methodus nova“) wird der Werth eines Integrals $\int_{-1}^{+1} \psi(x) dx$ durch ein Integral $\int_{-1}^{+1} \varphi(x) dx$, wo $\varphi(x)$ ein zu bestimmendes Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, dadurch am vortheilhaftesten, bis auf Glieder der Dimension $2n-1$ incl., berechnet, dass man die Uebereinstimmung an solchen n Stellen x_i bewirkt, welche eine Gleichung $N_n(x) = 0$ erfüllen, deren linke Seite den n Bedingungen

$$\int_{-1}^{+1} x^\nu N_n(x) dx = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1)$$

genügt. Es ist dann $\frac{Z_n(x)}{N_n(x)}$ der n^{te} Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung für $\sigma = \log \frac{x+1}{x-1}$, in welcher die Theilnenner vom 1^{ten} Grade in x sind; und die Abweichung $R_n = N_n \sigma - Z_n$, nach fallenden Potenzen von x geordnet, beginnt mit der Potenz x^{-n-1} . Nach den Integralrelationen, oder nach den mit der Kettenbruchentwicklung verbundenen recurrirenden Relationen, stimmen die Näherungsnenner $N_n(x)$ mit den Laplace-Legendre'schen Polynomen (Kugelfunctionen) $P^{(n)}(x)$ überein; wie Jacobi (Cr. J. 2) und nach ihm Heine in seinem eben erschienenen „Handbuche der Kugelfunctionen“, das Hermite lebhaft anregte, gezeigt hatten.

Hermite's Versuch einer Verallgemeinerung auf Functionen von mehreren Variablen knüpft nur an die Entstehung der Kugelfunctionen $P^{(n)}(x)$ als Coefficienten einer Reihenentwicklung an. Die neuen Polynome werden durch Entwicklungen von Functionen der Art $e^{-\varphi(x+h, y+k)}$ nach Potenzen von h, k erhalten, wo $\varphi(x, y)$ eine definite positive quadratische Form bedeutet (C. R. t. 58); sodann (C. R. t. 60) von solchen der Art $(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von a, b . Die Eigenschaften dieser Polynome sind denen von $P^{(n)}(x)$ so analog, dass Entwicklungen von Functionen mehrerer Variablen nach denselben ebenfalls einfach und der Discussion zugänglich werden. Indessen deutet Hermite

keine Interpolationsanwendungen an; und auch die anschliessende Literatur (Appell etc.) hat nur die Erweiterung noch allgemeinerer hypergeometrischer Reihen im Auge.

Uebrigens ist Hermite späterhin (Cr. J. 84; 1877) nochmals auf die Interpolation für Functionen von einer Veränderlichen zurückgekommen. Er erweiterte Lagrange's Formel dahin, dass die gesuchte ganze Function $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades von x nicht an n Stellen einfach, sondern an weniger Stellen, aber zugleich mit einer Reihe von Differentialquotienten, mit den Werthen der gegebenen Function und ihren Ableitungen übereinstimmt. Insbesondere werden sehr einfache Formeln für genäherte Quadratur bei höherer Osculation an zwei Stellen aufgestellt.

Die Jahre von 1866 bis gegen 1873 hin bezeichnen eine Zeit stiller Sammlung. Aber die wenigen publicirten Seiten in diesem Zeitraum deuten doch auf Hermite's Beschäftigung hin: Reihenentwicklungen elliptischer und anderer Integrale, mit Bestimmung der Coefficienten als Näherungs-Zähler und -Nenner von Kettenbrüchen; Processe unbestimmter Integrationen, dann Grenzwerte und Unstetigkeiten von bestimmten Integralen. Das eine steht in Zusammenhang mit den damals vorbereiteten Cours an der École Polytechnique, das andere zeigt Hermite's Bemühungen an, sich auch die Errungenschaften der deutschen functionentheoretischen Richtungen anzueignen. Es war eine Vorbereitungszeit für die ganze weitere analytische Thätigkeit.

Die im Juni 1873 von Hermite aufgenommenen Näherungsbetrachtungen beschränken sich nun auf Functionen von einer Veränderlichen und knüpfen gerade an die bei der oben angeführten Verallgemeinerung des Polynoms $P^{(n)}(x)$ vernachlässigte Seite, an dessen Entstehung als Näherungsnenner einer Kettenbruchentwicklung. Wie nach seinen frühesten Untersuchungen ein Ausdruck $a\alpha + b\beta + \gamma$, bei gegebenen a, b , durch eine zweifach unendliche Reihe von ganzen Zahlen α, β, γ successive Minima erhalten konnte, die eine beliebige Annäherung an Null gestatteten, so sollen jetzt (Cr. J. 76) zweifach unendlich viele Annäherungen an Null eines Ausdrucks $X \sin x + Y \cos x + Z$ mittelst Polynome X, Y, Z in x , bis auf eine mit dem Grad dieser Polynome verträgliche, möglichst hohe Potenz in x , bestimmt werden. Für $Z = 0$ war die Aufgabe längst behandelt: sie führt auf Nenner und Zähler der Näherungsbrüche des Lambert'schen Kettenbruchs für $\operatorname{tg} x$; und die Restreihe A_n für $X \sin x + Y \cos x$ wird eine Bessel'sche Function. Hermite leitet das Resultat nochmals einfach her, durch partielle Integration von

$$A_n = \frac{x^{2n+1}}{n! 2^n} \int_0^1 (1-t^2)^n \cos xt \cdot dt;$$

das allgemeine Problem aber wird durch successive Integration der Gleichung dieses speciellen Problems erledigt.

Die für Hermite's weiteren Gedankengang wichtigsten Momente sind hier: einmal, dass er den Restausdruck bei der Annäherung an Null von Ausdrücken wie $X \sin x + Y \cos x + Z$ durch einen einfachen Integralausdruck wiedergibt, dessen Grössendimension sich leicht erforschen lässt; sodann, dass er aus zwei successiven Annäherungen rationale Näherungsbrüche für $\sin x$ und $\cos x$ selbst herleitet. Letzteres, oder auch die partielle Integration von Ausdrücken der Art

$$\int_0^1 t^p (1 - t^2)^n e^{-xt} dt,$$

gibt ihm zugleich eine Reihe von Näherungsbrüchen für die Exponentialfunction e^x . Auch drückt er die grösstmögliche Annäherung einer linearen

Function $\sum_{i=1}^n e^{a_i x} X_i$ durch Polynome X_i von x mittelst eines bestimmten n -fachen Integrals aus.

Diese Resultate konnten Hermite ermuthigen, dem grossen Ziele einer Untersuchung des Charakters von Zahlen, wie e und π , näher zu treten. Lambert hatte schon 1761 mittelst seiner Kettenbrüche die Irrationalität von π , π^2 und e^m (m rational) gezeigt; und über dessen Resultate war eigentlich nur Liouville hinausgekommen, als er 1840 (Journ. d. Math. V) an Reihen gezeigt hatte, dass e und e^2 keiner algebraischen Gleichung 2^{ten} Grades genügen und 1844 (C. R. t. 18) an der Hand der Kettenbruchentwicklungen von Wurzeln ganzzahliger algebraischer Gleichungen die Existenz von nicht-algebraischen Zahlen erwiesen hatte. Auf das Lambert'sche Resultat für e^m kam auch Hermite später (Cours an der Fac. des Sc., 9^{te} Vorlesung) nochmals auf einfache Weise, durch Differentiation der e^x -Reihe. Die bisherigen Resultate machten den Transcendenten Charakter der Zahlen e und π immer wahrscheinlicher; und in der That ergab nun Hermite's oben angedeutete Annäherung von $X \sin x + Y \cos y$, für $x = \frac{\pi}{2}$, ohne Weiteres wenigstens die Irrationalität von π^2 , aus dem bekannten Widerspruch, dass sonst eine ganze von Null verschiedene Zahl beliebig klein gemacht werden könnte. Aber die Erledigung der allgemeinen Frage, ob π eine transcendente Zahl sei, widerstand dem Versuch eines directen Angriffes (Cr. J. t. 76, Brief an Borchardt vom 31. Aug. 1873).

Und zur selben Zeit gelingt es Hermite, seine Analyse so weit durchzubilden, dass er für die Zahl e bis zur völligen Lösung der Frage vordringen kann („Sur la fonction exponentielle“, C. R. t. 77, Juli und August 1873).

Das leitende Princip ist die Frage nach den *gleichseitigen* Annäherungen, bis zu höchstmöglichen Potenzen von x , einer Reihe von Exponentialfunctionen $e^{a_i x}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) durch rationale Brüche $\frac{\Phi_i(x)}{\Phi(x)}$, mit demselben Nenner und bei gegebenen Graden der Polynome Φ, Φ_i . Zwar liessen sich solche Brüche aus der Betrachtung einer Reihe von Annäherungen an Null der oben erwähnten linearen Function der Grössen $e^{a_i x}$ ermitteln; aber zur Discussion der Näherung greift Hermite die Aufgabe direct an, und hierbei ist wieder ein wesentliches Mittel die Darstellung der Näherungen durch Potenzen der Variablen x mit bestimmten Integralen, deren asymptotische Werthe beliebig klein werden, und die sich überdies auch unbestimmt auswerthen lassen.

Dies sind Ausdrücke der Art

$$e^{a_i x} \int_{a_0}^{a_i} e^{-x t} F(t) dt,$$

wo $F(t)$ ein Product von Factoren $(t - a_x)^{\mu_x}$ [$x = 0, 1, \dots, n$] ist. Die Φ, Φ_i selbst entstehen dann aus dem Polynom $\mathfrak{F}(t)$, das bei der unbestimmten Integration des Integrals erscheint, dadurch dass man $t = a_0, a_1, \dots, a_n$ setzt. Eine ganzzahlige Gleichung für e

$$N + \sum_{i=1}^n e^{a_i} N_i = 0,$$

wo auch die a_i ganze Zahlen sind, würde dann, durch Einsetzen einer Anzahl genügend hoher Näherungssysteme für die e^{a_i} , nur zu einer Reihe von Relationen der Art

$$N P^{(x)} + \sum_{i=1}^n N_i P_i^{(x)} = 0$$

führen können, wo auch die $P^{(x)}, P_i^{(x)}$ ganze Zahlen sind, und aus $n+1$ solchen Gleichungen müsste immer die Determinante aus den $P^{(x)}, P_i^{(x)}$ verschwinden. Die Untersuchung ist also darauf zurückgeführt, die Unmöglichkeit dieses Verschwindens zu zeigen, wozu eben die besonderen Ausdrücke der Näherungen auf verschiedene Weisen, besonders auch durch recurrirende Beziehungen, benutzt werden.

Hermite's Untersuchung hat auch allen späteren Arbeiten über den Gegenstand die Anregung gegeben. Die 1885 von Weierstrass gelieferte Vereinfachung des Beweises der Transcendenz von e beruht wesentlich nur darauf, dass statt des Products $F(t)$ die Polynomausdrücke betrachtet werden, wobei sich die Integrale in übersichtlicherer Gestalt auswerthen lassen; während die weiteren, von Hilbert, Hurwitz, Gordan ausgegangenen

Modificationen das Product als solches bestehen lassen, aber die Betrachtung der Determinante durch eine Congruenzbetrachtung ersetzen und dabei noch, wie der Letztere mittelst Benutzung der e -Reihe, die Integrale vermeiden. Wie einfach 1882 Lindemann den Uebergang von e auf e^ξ , wo ξ algebraisch ist, und von da auf π geleistet, ist in Aller Erinnerung.

Das Interesse des Forschers an den Annäherungen war nicht durch seine grosse Anwendung von 1873 erschöpft; er wandte sich sogleich anderen damit in Verbindung stehenden Gedankenverbindungen zu: der Erweiterung der Eigenschaft der Kugelfunction $P^{(n)}(x)$, einer linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung zu genügen (Cr. J. 79; 1874). So hängen die gleichzeitigen Näherungen von n Functionen durch rationale Brüche mit linearen homogenen Differentialgleichungen $(n+1)$ ^{ter} Ordnung zusammen. Dies wird insbesondere für die Näherungen $\frac{\Phi_i(x)}{\Phi(x)}$ der n Functionen $\log \frac{x-a_0}{x-a_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$), diesmal bei Ordnen nach absteigenden Potenzen von x , durchgeführt, wobei die Differentialgleichung $(n+1)$ ^{ter} Ordnung nicht nur durch $\Phi(x)$, sondern auch durch die $\int_{a_0}^{a_i} \frac{\Phi(t)}{x-t} dt$, befriedigt wird; und die Annäherung an Null der linearen Function

$$x - \sum_{i=1}^n X_i \log \frac{x-a_i}{x-a_0}$$

durch Polynome X hängt mit der adjungirten Differentialgleichung zusammen.

Hermite geht dem Zusammenhang mit der Fuchs'schen Theorie, der hier zu Tage tritt und ihm wohlbekannt war, nicht näher nach. Dagegen ist er auch späterhin wiederholt auf die mehr arithmetische Seite der Annäherungen zurückgekommen. So 1879 (Cr. J. 88) auf gewisse annähernde Lösungen der Gleichung $x - ay - b = 0$, die er auf zwei successive Näherungen an a zurückführte, mit engerer Begrenzung für das Minimum von $x - ay - b$, als bei Tschebyscheff, eine Begrenzung, die von Hurwitz (diese Ann. Bd. 54) im allgemeinen Falle noch etwas weiter verengt wurde. So noch 1893 (Annali di Mat. t. 21) auf die An-

näherung an Null einer linearen Function $\sum_{i=1}^n S_i X_i$ von Potenzreihen

$S_i(x)$ durch Polynome $X_i(x)$, bei der die Function als Residuensumme eines Integrals erhalten und auf die recurrirende Berechnung der Polynomsysteme besonderer Werth gelegt wird, also auf Algorithmen, welche die Auflösung von Systemen linearer Gleichungen umgehen sollen. Durch

diese ganze Arbeitsthätigkeit Hermite's geht die Idee von der Bedeutung, welche die Annäherungstheorien in der Darstellung der Functionen einst für die Functionentheorie gewinnen könnten; und darin wurzelt auch seine hohe Verehrung für Tschebyscheff, als Anreger und Förderer der Richtung. Er hat auch selbst in seinen Schülern noch eine reiche Ernte aus diesen Betrachtungen aufgehen sehen. Hier sei nur darauf hingewiesen, dass Laguerre — hier, wie in anderen Gebieten ein Fortsetzer von Hermite, welcher auch der Herausgabe der Sammlung der Abhandlungen jenes sich mit unterzog — die Annäherungen mit Jacobi's (Cr. J. 53) Entwicklungen einer Function nach ganzen Potenzen eines Polynoms, in denen dieselben Integrale auftreten wie bei Hermite, in

Verbindung gesetzt hat, so die Annäherung an Null von $\sum_{i=1}^n e^{a_i x} X_i$ mit der Entwicklung von e^{tx} nach Potenzen des oben genannten Polynoms $F(t)$ (s. Cr. J. 88).

Aus der Beschäftigung mit der linearen Differentialgleichung für die Kugelfunction $P^{(n)}(x)$ entwickelte Hermite, sogleich nach seinen Forschungen in den Approximationstheorien, noch einen anderen fruchtbaren Gesichtspunkt, von dem aus er zugleich zu einer Erweiterung der Theorie der elliptischen Functionen gelangte. Ihn zog die *Lamé'sche lineare Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung* an, auf welche Lamé schon gegen 1840 durch physikalische Probleme, unter Einführung seiner elliptischen Coordinaten in die Potentialtheorie, gekommen war. Es ist eine Gleichung der Art

$$\frac{d^2 z}{du^2} = [n(n+1)x^2 \sin^2 am u + h] z,$$

wobei n eine ganze positive Zahl ist und h gewisse specielle, vom Modul x abhängige Werthe besitzt. Was Hermite interessiren musste, war einmal die Thatsache, dass sie für $x = x \sin am u$ und $\lim x = 1$ in die Gleichung für die Kugelfunction $P^{(n)}(x)$ ausartet; sodann, dass, für beliebigen Modul x , neben einer ersten Lösung $E^{(n)}(x)$, die ein Polynom in x ist, eine zweite Lösung $F^{(n)}(x)$ existirt, die, wie Liouville und Heine schon 1845 gezeigt hatten, in ihrem transcendenten Theile nur elliptische Integrale 1^{ter} und 2^{ter} Gattung, mit $E^{(n)}(x)$ multiplicirt, enthält — analog wie für $\lim x = 1$ eine Lösung $Q^{(n)}(x)$ den Ausdruck $P^{(n)}(x) \cdot \log \frac{x+1}{x-1}$ enthält; ja dass nach Heine, mit dem Hermite um diese Zeit in engerer Verbindung stand, auch eine Beziehung zwischen $E^{(n)}(x)$, bzw. $F^{(n)}(x)$, und dem Nenner, bzw. dem Reste, des Näherungsbruches der Kettenbruchentwicklung eines ganzen elliptischen Integrales 3^{ter} Gattung besteht (Cr. J. 60).

Hermite's Untersuchungen beziehen sich auf die *verallgemeinerte Lamé'sche Gleichung*, in der h eine beliebige Constante ist; und sein Hauptresultat besteht darin, dass hier, von jenen speciellen Werthen von h abgesehen, immer zwei eindeutige, durch elliptische Functionen als „periodische Functionen zweiter Art“ ausdrückbare Lösungen der Differentialgleichung existiren.

Als Ausgangspunkt, von dem aus Hermite zu diesem Resultate gelangt, erscheint ein doppelter. In einem Brief an Brioschi (Annali di Mat., ser. 2, t. 9, vom 17. Dec. 1877) theilt er einen Weg zur vollständigen Integration der Gleichung mit, welcher direct auf die beiden genannten Lösungen führt und welchen er schon in dem II^{ten} Theil seiner Cours an der École Polytechnique von 1872 (lithographirt 1873 verbreitet) gegeben hatte. Indem er die lineare Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung für das Product zweier Lösungen aufstellt*), erkennt er durch n -malige Differentiation dieser Gleichung, dass sie durch ein Polynom n ^{ten} Grades befriedigt wird, was in bekannter Weise die vollständige Lösung der gegebenen Gleichung liefert. Dieser Weg steht also schon in nächster Beziehung zu dem von Fuchs 1875 in seiner Untersuchung über die linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Integralen eingeschlagenen (Cr. J. t. 81).

Die hier erscheinenden Lösungen, $F(u)$ und $F(-u)$ — elliptische Thetaquotienten, multiplicirt mit einer Exponentialfunction, deren Exponent proportional u ist — sind dieselben Functionen, welche bei der Jacobi'schen Lösung des Problems der Rotation eines festen Körpers um einen Punkt, ohne äussere Kräfte, auftreten: von der constanten Winkelgeschwindigkeit um die zur invariablen Ebene senkrechte Axe herrührend, muss hier in die beweglichen Winkelgrössen ein der Zeit proportionales Glied eingehen. Dieser mechanische Umstand bildete den andern Ausgangspunkt Hermite's und führte ihn für den aus zwei der Winkelgrössen a, a' in bekannter Weise zusammengesetzten Ausdruck $a + ia'$ zu einer verallgemeinerten Lamé'schen Gleichung.

In welcher Ordnung die beiderseitigen Anregungen in Hermite's Geist durch einander wirkten, mag hier unentschieden bleiben. Neben dem Rotationsproblem war es bald auch das des sphärischen Pendels, welches ihn in ähnlichem Sinne wiederum zur Beschäftigung mit den elliptischen Functionen reizte (Cr. J. 85, 1877), wie auch der Umstand, dass Gylden in seinen astronomischen Bahnnäherungen auf die Lamé'sche Gleichung gekommen war. Während die mechanischen Fragen ihn zu Untersuchungen über Entwicklungen in Potenzreihen von Producten von elliptischen Func-

*) Cf. Liouville im Journ. de Math. t. 4, 1839.

tionen und über die asymptotischen Werthe der Coefficienten in diesen Reihen führten (Cr. J. 81 etc.), wandte er auch sein Theorem über Zerlegung in Elemente für doppelt-periodische Functionen erster Art auf geometrische Fragen über Curven 3^{ter} Ordnung an (Cr. J. 82, 84); und auch die functionentheoretischen Gesichtspunkte Cauchy's in Differentialgleichungen und Resduentheorie beschäftigten ihn um diese Zeit vielfach. In der Darstellung dieser erneuten weiten Thätigkeit in dem Felde der elliptischen Functionen („Sur quelques applications des fonctions elliptiques“, C. R. Bde. 85—93, Oct. 1877—1881; gesammelt erschienen 1885 in einem ersten, dem Andenken Borchardt's gewidmeten Hefte, während ein zweites Heft nicht erschienen ist) geht Hermite von einer Theorie der doppelt-periodischen Functionen 2^{ter} Art aus, d. h. von eindeutigen Functionen der Veränderlichen u , die im Periodenparallelogramm nur eine endliche Anzahl von Polen haben und die sich bei Vermehrung von u um die beiden Perioden je nur um einen constanten Factor ändern. Sie wächst zu einer vollständigen Theorie dieser Functionengattung aus. Es wird die Zerlegung auch dieser Functionen in *Elemente* gelehrt, nämlich in Ausdrücke der Art

$$\frac{d^{\alpha-1}}{du^{\alpha-1}} \left[\frac{H(u+\omega-a)}{H(u-a)} e^{\nu(u-a)} \right],$$

die im Parallelogramm nur je einen Pol α^{ter} Ordnung $u = a$ haben; für die einfachsten Functionen dieser Art werden lineare Differentialgleichungen durch das Zerlegungsprincip und Residuenrechnung hergeleitet — eben die erweiterten Lamé'schen Gleichungen für $n = 1, 2$, während die Lösungen der speciellen Gleichungen durch Grenzübergang in h erhalten werden. Eine symmetrische Behandlung des Rotationsproblems wird durch die gleichzeitige Betrachtung von vier einfachsten Functionen 2^{ter} Art, mit demselben Nenner und um halbe Perioden verschiedenen Argumenten der Zähler, geliefert. Die Bewegung des sphärischen Pendels wird auf eine unipolare Lösung einer verallgemeinerten Lamé'schen Gleichung zurückgeführt, während in dem Problem der Gleichgewichtsfigur einer elastischen Feder, bei beliebigen äusseren Kräften, nur Reihenentwicklungen geliefert werden. Den Abschluss der Untersuchungen bildet eine Ausdehnung der Theorie auf beliebige positive Zahlen $n > 2$, wobei ein Fundamentalsystem von zwei doppelt-periodischen Functionen 2^{ter} Art mit einem Pol höherer Ordnung existirt. Dem Uebergang auf den Fall $\lim n = 1$ hat Hermite noch ein besonderes Studium gewidmet (Cr. J. 89, 1879).

Wenn sich diese Untersuchungen auch den allgemeinen Betrachtungen der neueren Theorie der Differentialgleichungen unterordnen, so zeichnet sie doch ein besonderes Merkmal aus: dass die Entwicklungen, auch wenn die Ausführung auf complicirte Gleichungssysteme führt, durch

algebraische und analytische Hilfsmittel überall vollständig und explicit erledigt werden. Die allgemeineren Fragen aber nach solchen linearen Differentialgleichungen, welche eine eindeutige doppelt-periodische Function 2^{ter} Art als Lösung haben, und die analytischen Modificationen der Lösungen in speciellen Fällen, sind von Picard und Mittag-Leffler aus Hermite's Arbeit aufgenommen und aus dem Cauchy'schen Gebiet heraus auf den neueren Fuchs'schen Standpunkt, der von Hermite nur gelegentlich zur Rechnung betreten wird, erhoben worden. Immerhin sind die Untersuchungen Hermite's als ein Vorläufer von Poincaré's Integration aller linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten durch eindeutige Functionen anzusehen.

So schliessen sich diese Anwendungen mit denen der Näherungsbetrachtungen und denen der Modulfunctionen zu dem reichen Kranze von Untersuchungen zusammen, mit denen Hermite die Beziehungen der Theorie zu einer Reihe von speciellen Gebieten, so dem der elliptischen Functionen, auf wirksame Weise gefördert hat.

Um dieselbe Zeit beginnt Hermite auch einzelnen *functionentheoretischen Fragen* näher zu treten. Es sind in erster Linie *die bestimmten Integrale* überhaupt, im Besonderen die *Euler'schen Integrale*, die *Bernoulli'schen Polynome* und *Zahlen*, dann *die Unstetigkeiten von analytischen Ausdrücken längs Linien*, Betrachtungen, denen Hermite die letzten 25 Jahre seiner Lebensarbeit hauptsächlich widmete, in seinem Cours und in zahlreichen kürzeren Publicationen.

Hier ist zunächst ein zahlentheoretisches Resultat zu erwähnen: eine Recursionsformel für die ganzzahligen Bestandtheile der in der Staudt'schen Form geschriebenen Bernoulli'schen Zahlen (Cr. J. 84), eine später (ibid. 96) von Lipschitz fortgeführte Untersuchung. Die Theorie der Bernoulli'schen Polynome wird nach allen Richtungen seit 1874 (Cr. J. 79) erörtert, besonders aus dem Raabe'schen Integralausdruck heraus mit Integration durch das imaginäre Gebiet, oder durch Umformung der erzeugenden Function; es wird der Verlauf der Polynome im reellen Gebiet gefunden, und eine neue Restbestimmung bei Entwicklung einer Function nach solchen Polynomen vorgenommen (ibid. t. 84 etc.).

Von einem bedeutenden Teil der Untersuchungen dieser Periode, denen in der Theorie der Gammafunctionen bei complexem Argument, findet sich eine zusammenfassende Darstellung in den an der Sorbonne gehaltenen „Cours“. Hervorzuheben ist: eine genaue Bestimmung der Restglieder der semiconvergenten Reihen durch bestimmte Integrale; das Studium des Ganges von $\Gamma(x)$ für negative x und des asymptotischen Werthes von $\log \Gamma(x)$ für grosse x ; vielfach neue Umformungen bekannter

Integralausdrücke und Verallgemeinerung der bekannten semiconvergenten Reihen. Hermite verwendet neben der Residuentheorie auch die Weierstrass'schen und Mittag-Leffler'schen Theoreme, wie er denn zu dieser Zeit sich in die in der Wissenschaft neu auftretenden Gedanken noch frisch und rasch hineinfindet, um sich von ihnen zu eigenen kürzeren, aber in sich abgeschlossenen, Betrachtungen, zu feinen Anwendungen auf Convergenz-, Restbestimmungen und Aehnliches, inspiriren zu lassen.

Insbesondere sucht Hermite, sich noch in Weierstrass' Begriffsbildungen über *eindeutige analytische Functionen*, und dessen Darstellungen von solchen Functionen bei gegebenen Unstetigkeitsstellen verschiedener Arten einzuleben. Sein Ziel ist, diese Auffassung, mit Hülfe von Riemann's geometrischen Mitteln, seinem auf Cauchy ruhenden Standpunkt einzuordnen.

Die Unstetigkeiten bestimmter Integrale mit reellem Integrationsweg, als Functionen eines complexen Parameters betrachtet, hatten Hermite seit lange interessirt. Nun sucht er denselben, und damit den Unstetigkeiten längs Linien überhaupt, in seinen seit 1881/82 gehaltenen „Cours“ zu didaktischen Zwecken näher zu treten. So definirt er $\log(1+z)$ durch

das auf reellem Wege genommene Integral $\int_0^1 \frac{z dt}{1+zt}$, in der ganzen

Z-Ebene, bis auf die reellen Werthe von $z = -1$ bis $z = -\infty$, die das Integral unendlich machen und die durch einen geradlinigen Schnitt von -1 bis $-\infty$ („Coupure“) ausgeschlossen werden. Auf diese Weise erhält er also wohl eindeutig *einen* Zweig der unendlich vieldeutigen Function $\log(1+z)$, und somit das, was Riemann mit seinen Querschnitten bei mehrdeutigen Functionen bezweckt; aber da die Frage der analytischen Fortsetzbarkeit der Function über den Schnitt hinweg in dieser elementaren Betrachtung nicht untersucht wird, so tritt gerade dieser Riemann'sche Sinn noch nicht hervor, sondern nur die Bedeutung des Schnittes als einer Grenze für den definirenden *Ausdruck*. Man erkennt dies auch

daran, dass für den Cauchy'schen Integralausdruck $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z}$, genommen über eine einfach geschlossene Curve C , der im Inneren und Aeusseren der Curve zwei ganz verschiedene analytische Functionen darstellt, C als „Coupure“ bezeichnet wird; und wenn Hermite hier öfters von der „Function $F(z)$ “ spricht, so meint er eben nur den Integralausdruck.

Gelegentlich wird jedoch, so bei der Gammafunction $\Gamma(x)$, ein ~~nur~~ für Werthe des Parameters mit positivem reellem Theile gültiger Integralausdruck durch Zerlegung und Reihenentwicklung mit Prym ~~explcit~~ über die imaginäre Axe hinweg eindeutig analytisch fortgesetzt; und auch die

geradlinige Führung der Schnitte wird späterhin zu ihrer ganzen möglichen Mannigfaltigkeit erweitert. Immerhin treten noch Widersprüche auf, so bei dem Versuch einer Ausdehnung der Bestimmung von $\sin \frac{2K}{\pi} \xi$, mittelst der trigonometrischen Reihe, auf die ganze ω -Ebene (Cr. J. 92).

Hervorzuheben ist aber die reiche Fülle, in welcher Hermite seine Sprungtheorien anzuwenden weiss, um aus ganz anderen Theilen der Analysis bekannte Beziehungen wiederzufinden. Was sonst durch Residuentheorie geleistet wird, entwickelt er durch Ermittlung der Sprünge an den durch $G(t, z) = 0$ bestimmten Schnitten für den Integralausdruck

$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt$, wo F, G holomorphe Functionen von t, z sind; bekannte

Relationen zwischen Γ -Functionen werden aus den Unstetigkeiten der Integrale für $\log \Gamma(z)$ hergeleitet; und die Zerlegungssätze der doppelt-periodischen Functionen, das Verhalten der vollständigen elliptischen Integrale als Functionen des algebraischen Moduls, oder Jacobi'sche Modularrelationen werden ohne Integration durch das imaginäre Gebiet erhalten.

Für den Mittag-Leffler'schen Satz giebt Hermite (in Cr. J. 91 und in den „Cours“) eine Modification des Weierstrass'schen Beweises, aber unter beschränkenden Voraussetzungen; in Cr. J. 92 für die Zusatzglieder in den Reihen dieses Satzes, die mannigfach abänderbar sind, bequeme Formen.

Man erkennt, dass auch in dem allgemeinen Gebiet der analytischen Functionen immer specielle Darstellungsweisen solcher Functionen, welche sich allseitig im Einzelbilde discutiren liessen, das Medium waren, in dem sich Hermite bewegte. Noch ganz am Ende seines Lebens (Briefe an Pincherle, *Annali di Mat.*, ser. 3, t. 5) sehen wir ihn mit der Verallgemeinerung der Riemann'schen ξ -Function, ihrer Ausdehnung auf die ganze Ebene, und mit interpolatorischen Darstellungen dieser und anderer Functionen beschäftigt; die Arbeit an den elliptischen Functionen, an neuen Additionsformeln, Reihen- und Partialbruchentwicklungen und Moduleigenschaften, hat ihn mitten in allen übrigen Betrachtungen unablässig bis zu Ende begleitet. Seine letzte Note, „Sur une équation transcendante“, vom 17. Dec. 1900 (*Archiv der Math. u. Phys.*, 3^{te} Reihe, 1^{ter} Band) behandelt ein bei Kugelfunctionen und anderen Functionen öfters von ihm berührtes Gebiet: die Bestimmung der reellen Wurzeln transcender Gleichungen.

Nachdem wir hier über den Inhalt des „Cours, professé à la Faculté des Sciences“, der seit 1882 wiederholt lithographirt erschienen ist, berichtet, erübrigt noch eine eingehendere Charakterisirung dieser und der anderen zusammenfassenden Schriften, als es bereits in der Einleitung geschehen ist. Diese Vorlesungen, sowie die elementareren an der École Poly-

technique, von denen ein Band, „Cours d'Analyse“, 1873 durch den Druck veröffentlicht ist, stellen nicht in der Art der Lehrbücher ein systematisches Ganzes vor, das Vollständigkeit oder eine umfassende Einführung in die gewöhnlichen Methoden bezweckte. Hermite wählt einzelne Capitel aus und durchtränkt sie, so elementar sie scheinen mögen, mit den hohen Methoden, an denen er schöpferisch gewirkt, und mit dem Geiste der vielseitigen Fülle in Beispielen und analytischen Umformungen und der allseitigen Ausblicke, der ihn belebt. So tritt der Gesamtplan gegenüber den ingeniosen Einzelheiten zunächst zurück. Aber die Einheit dieses Ganges liegt eben darin, dass die leitenden Gedanken schon in die Anfänge der Infinitesimalbetrachtungen eingeführt werden, um die Mannigfaltigkeit der gewöhnlichen Methoden in höherem Sinne zusammenzufassen. So wird im „Cours d'Analyse“ die Zerlegung von einfach-periodischen Functionen in Elemente ganz in dem Sinne seiner früheren höheren Arbeiten vorgetragen, und es wird der *rationalen* Reduction von Integralen aller Arten auf einfachere, mittelst Kettenbruch-Verfahren, viel Aufmerksamkeit gewidmet. Gerade in der Betrachtung eines grossen Kreises specieller Probleme von einem modernen Standpunkt aus liegt der Einfluss begründet, welchen die höheren, stetig weiter bearbeiteten Vorlesungen auf die Cultur der Mathematik ausgeübt haben.

Zu den Vorlesungen treten, von didaktischen Schriften, noch die „Notes sur la théorie des fonctions elliptiques“; zuerst 1861 in Lacroix's *Traité*, 6^{te} Auflage, veröffentlicht, dann immer wieder abgedruckt. Sie liefern einen zwar knappen, aber übersichtlichen Ueberblick über die Theorie, von Hermite's ursprünglichem Standpunkt der doppelten Periodicität aus bis zu neueren Auffassungen hin. Es wäre zu wünschen, dass diese Schrift, welche schon in der Uebertragung durch Natani seit 1863 Jahre hindurch Anregung gegeben hat, in ihrer jetzigen Gestalt, in welcher sie noch einige einleitende Theile der Transformationstheorie mit mannigfachen Ausblicken in sich aufgenommen hat, durch eine neue Uebertragung auch in Deutschland wiederum zur Wirkung gebracht würde.

Rückblickend sehen wir ein wissenschaftliches Lebenswerk vor unseren Augen liegen, so reich und vielseitig, wie es nur Wenige vollbracht haben. Durch alle Gebiete der Analysis bewegt es sich hindurch, immer weitere Kreise werden gezogen, immer neue Anschauungen und Methoden werden gestaltet, und überall entstehen Leistungen, welche bleibende Errungenschaften der Analysis, theilweise grundlegend für ganze Zweige, geworden sind. So drängt sich denn die Frage auf, ob sich in dieser vielgestaltigen Gedankenthätigkeit ein *Mittelpunkt* auffinden lässt, von dem sie ausstrahlt und der sie beherrscht.

In der einleitenden Uebersicht wurden der Gang der Arbeitsreihen des Forschers und deren Zwischenstellungen hinsichtlich der gewohnten Eintheilungen in Gebiete gezeichnet. Was am meisten auffällt, ist, dass die algebraische Seite die ganze Hauptarbeitsepoche, die bis in den Anfang der 60^{er} Jahre reicht, durchdringt und leitet, auch bei arithmetischer oder functionentheoretischer Richtung. Sicher ist Hermite's vorherrschender Zug sein *algebraischer Sinn*. Aber derselbe nimmt nie eine einseitig formalistische Gestaltung an, wie man sie bei Cayley, Sylvester, Brioschi öfters beobachten kann. Symbolische Processe hat er, obwohl er ihre Kraft kannte, nie als solche verfolgt, seine algebraischen Methoden waren ihm nie Selbstzweck, sondern nur Mittel, in dunkle Gebiete vorzudringen. Immer steht ein grosses Problem als Richtstern vor ihm, es regt ihm neue Fragestellungen an, und von hier aus erst werden algebraische Methoden neu geschaffen oder umgeschaffen, die dann weit über ihren speciellen Zweck zu wirken berufen sind. Interessiren ihn auch alle Fragen der Zahlentheorie und der Analysis, so trägt er doch überall seine algebraischen Gedanken hinein: in die Arithmetik seine definiten Formen und continuirlichen Parameter, in die elliptischen Functionen neue Gleichungsfragen und seine Transformationskunst; erst in der *Invariantentheorie* der Formen und Gleichungen selbst aber offenbart er die volle Mächtigkeit seiner geistigen Kraft.

Wenn man den Functionentheoretiker daran erkennt, dass im Mittelpunkt seines Gedankenkreises die Grundbegriffe der analytischen Abhängigkeit stehen, dass er auf die Grundlagen der Analysis zurückgreift und sie vertieft oder festigt, so war Hermite kein solcher. Sein Feld war nicht die principielle Grundlegung von allgemeinen Begriffen, und am wenigsten von solchen, die von der analytischen Ausdrucksweise absehen: er arbeitete mit bekannten Functionsausdrücken. Hier freilich hat er Erfolge zu verzeichnen, die um so bedeutender erscheinen müssen, als sie *vor* der deutschen functionentheoretischen Entwicklung errungen sind; es sei nur an die Zerlegung der doppelt-periodischen Functionen und der höheren Thetafunctionen in Elemente, oder an die Grundlegung der Transformationstheorie der Abel'schen Functionen erinnert.

Ja auch die systematische Ausgestaltung einer umfassenden Theorie lag nicht in seiner Art: so hat sich Hermite in der letztgenannten Theorie auf die Aufstellung der principiellen Punkte beschränkt, die aber, wie früher gesagt, den Ausgangspunkt aller Entwicklungen in diesem Gebiete bilden. In der Aufstellung solcher principieller Gesichtspunkte und in der Herleitung jeweils entsprechender Methoden war Hermite Meister. Und zwar sind es durchaus *Transformationsprincipien*, in welchen man das tiefste Wesen der Hermite'schen Analyse zusammenfassen kann, und

deren Herrschaft die innere Einheit seines ganzen Schaffens bildet. Nur muss man die Schaffung und Handhabung algorithmischer Methoden, des eigentlichen Werkzeugs Hermite's, diesem Begriffe unterordnen.

Nicht als ob Hermite, wie Lie, diese Principien selbst zum Gegenstand seines Forschens gemacht hätte; oder als ob er, wie eine Reihe von Algebraikern und Geometern, von vornherein von einigen bestimmten Transformationsgruppen ausgegangen wäre: eine solche Systematik lag ihm ganz fern. Aber seine algebraisch-arithmetische Reductionstheorie ist ein Transformationsproblem; seine Formen- und Gleichungstheorien führen zu der Invariantentheorie der linearen Transformationen; die Gruppe der linear-gebrochenen Substitutionen und die Transformationstheorie bilden Ausgangspunkt und Gegenstand seiner Forschungen in den elliptischen und Abel'schen Functionen; seine Annäherungsmethoden sind explicite specielle Darstellungen von Functionen; und seine Integration der erweiterten Lamé'schen Gleichung beruht ebenfalls ausschliesslich auf expliziten Umformungen. Seine analytische Kunst der Umformungen zeigt sich dabei würdig der seines Meisters Jacobi; und die immer neuen Methoden, und die daraus gezogene unbegrenzte Menge von Einzelresultaten — darunter einige, wie die Lösung der Gleichung 5^{ten} Grades und der Beweis der Transcendenz von e , von leuchtender Bedeutung —, scheinen wie von selbst dieser Kunst zu entspringen. Aber gerade bei dieser Fülle von Einzelbildern ist es nur zu leicht zu übersehen, dass Hermite immer von grossen methodischen Gesichtspunkten geleitet war und dass bei der Weiterentwicklung der Wissenschaft gerade diese vorzugsweise ihren stillen, aber befruchtenden Einfluss gezeitigt haben.

Mittenwald, September 1901.