Ein Konvergenzkriterium für Integrale.

Von

Gustav Doetsch in Göttingen.

§ 1.

Einleitung.

Der Abelsche Stetigkeitssatz über Potenzreihen:

„Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, so existiert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

wenn x durch die reellen Werte gegen 1 strebt, und ist gleich $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ “,

ist bekanntlich nicht allgemein umkehrbar, sondern nur unter gewissen Einschränkungen hinsichtlich der a_n . Als hinreichende Bedingung für die Richtigkeit des Satzes:

$$„Aus \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s \text{ folgt } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s“$$

ist erwiesen durch Tauber¹⁾:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

durch Herrn Littlewood²⁾:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

durch die Herren Hardy und Littlewood³⁾:

$$a_n = O_L\left(\frac{1}{n}\right), \text{ d. h. } a_n > -\frac{c}{n}.$$

¹⁾ A. Tauber, Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatshefte für Mathematik und Physik, 8 (1897), S. 273–277.

²⁾ J. E. Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series. Proceedings London Math. Soc., (2) 9 (1911), S. 434–448.

³⁾ G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Tauberian theorems concerning power

In Analogie des Tauberschen und des Littlewoodschen Satzes hat Herr Landau über Integrale, die den Dirichletschen Reihen nachgebildet sind, Folgendes bewiesen:

„Es sei für $x \rightarrow \infty$

$$\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x \lg x}\right)^4)$$

oder sogar nur

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x \lg x}\right)^5),$$

also

$$f(s) = \int_1^{\infty} \varphi(x) x^{-s} dx$$

für $s > 0$ konvergent. Für $s \rightarrow 0$ sei

$$f(s) \rightarrow l.$$

Dann ist

$$f(0) = \int_1^{\infty} \varphi(x) dx = l,$$

d. h. für $x \rightarrow \infty$

$$\int_1^x \varphi(y) dy \rightarrow l.$$

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, daß auch das *Analogon zu dem tiefliegenden Hardy-Littlewoodschen Satz* richtig ist. Der Beweis des letzteren basiert auf folgendem Satz über Potenzreihen mit positiven Koeffizienten:

„Wenn $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wo alle $a_n \geq 0$ sind, für $0 \leq x < 1$ konvergiert und wenn für $x \rightarrow 1$

$$f(x) \sim \frac{1}{1-x}$$

ist, so ist

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \sim n.$$

Ebenso wird sich der angekündigte Satz, den ich in § 3 formulieren und beweisen werde, aus einem Satz über Integrale der Form $\int_1^{\infty} \psi(x) x^{-s} dx$ mit durchweg positiver Funktion $\psi(x)$ ergeben, den ich in § 2 beweisen will und dessen Analogon im Gebiet der Dirichletschen Reihen von den

series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proceedings London Math. Soc., (2) **13** (1914), S. 174–191.

⁴⁾ E. Landau, Über die Konvergenz einiger Klassen von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. Monatshefte für Mathematik und Physik, **18** (1907), S. 8–28.

⁵⁾ E. Landau, Ein neues Konvergenzkriterium für Integrale. Sitzungsberichte der Kgl. Bayr. Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1913, S. 461–467.

Herren Hardy und Littlewood⁶⁾ bewiesen worden ist. Die wesentlichen Kunstgriffe der Beweise stammen aus den Arbeiten der Herren Hardy und Littlewood, die Form der Darstellung schließt sich an die Landausche⁷⁾ Wiedergabe des Hardy-Littlewoodschen Potenzreihensatzes an.

§ 2.

Ein Satz über Integrale der Form $\int_1^x \psi(x) x^{-s} dx$
mit positiver Funktion $\psi(x)$.

Hilfssatz 1. Wenn $g(x)$ für $0 < x < x_0$ reell und differenzierbar ist, $g'(x)$ für $x \rightarrow 0$ nie zunimmt und

$$g(x) \sim Ax^{-\alpha} \quad (A \text{ und } \alpha \text{ beliebig reell})$$

ist, so ist

$$g'(x) \sim -A\alpha x^{-\alpha-1}.$$

Bemerkung. $F(x) \sim AG(x)$ soll für $A=0$ bedeuten: $F(x) = o(G(x))$.

Beweis. Es sei $0 < x < x_0$ und $0 < \vartheta < 1$. Dann ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, wenn man beachtet, daß für $x_1 < x_2$

$$g'(x_1) \leq g'(x_2)$$

ist:

$$g'(\vartheta x) \leq \frac{g(x) - g(\vartheta x)}{x - \vartheta x} \leq g'(x),$$

also

$$x^{\alpha+1} g'(\vartheta x) \leq \frac{1}{1-\vartheta} (x^\alpha g(x) - x^\alpha g(\vartheta x)) \leq x^{\alpha+1} g'(x);$$

für $x \rightarrow 0$ ist

$$x^\alpha g(x) \rightarrow A, \quad x^\alpha g(\vartheta x) \rightarrow \frac{A}{\vartheta^\alpha},$$

also

$$\limsup_{x=0} x^{\alpha+1} g'(\vartheta x) \leq \frac{A}{1-\vartheta} \left(1 - \frac{1}{\vartheta^\alpha}\right) \leq \liminf_{x=0} x^{\alpha+1} g'(x).$$

Betrachten wir zunächst die Ungleichung

$$\frac{A}{1-\vartheta} \left(1 - \frac{1}{\vartheta^\alpha}\right) \leq \liminf_{x=0} x^{\alpha+1} g'(x).$$

Die rechte Seite ist von ϑ unabhängig, die linke hat für $\vartheta \rightarrow 1$ den Grenzwert $-A\alpha$, also ist

$$\liminf_{x=0} x^{\alpha+1} g'(x) \geq -A\alpha.$$

⁶⁾ G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some theorems concerning Dirichlet's series. Messenger of mathematics, 43 (1914), S. 134–147, Theorem D.

⁷⁾ E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1916, S. 45–56.

Die andere Ungleichung

$$\limsup_{x=0} x^{\alpha+1} g'(\vartheta x) \leq \frac{A}{1-\vartheta} \left(1 - \frac{1}{\vartheta^\alpha}\right)$$

multiplizieren wir mit $\vartheta^{\alpha+1}$:

$$\limsup_{x=0} (\vartheta x)^{\alpha+1} g'(\vartheta x) \leq \frac{A \vartheta}{1-\vartheta} (\vartheta^\alpha - 1).$$

Da ϑx mit x gegen 0 strebt, so ist

$$\limsup_{x=0} (\vartheta x)^{\alpha+1} g'(\vartheta x) = \limsup_{x=0} x^{\alpha+1} g'(x),$$

also

$$\limsup_{x=0} x^{\alpha+1} g'(x) \leq \frac{A \vartheta}{1-\vartheta} (\vartheta^\alpha - 1).$$

Die linke Seite ist von ϑ frei, die rechte hat für $\vartheta \rightarrow 1$ den Grenzwert $-A\alpha$, also ist

$$\limsup_{x=0} x^{\alpha+1} g'(x) \leq -A\alpha.$$

Daher ist

$$\lim_{x=0} x^{\alpha+1} g'(x) = -A\alpha,$$

d. h.

$$g'(x) \sim -A\alpha x^{-\alpha-1}.$$

Hilfssatz 2. $\chi(x)$ sei für $x \geq 1$ stetig oder auch nur in jedem endlichen Intervall $1 \leq x_1 \leq x \leq x_2$ eigentlich integrierbar, ferner

$$\chi(x) \geq 0 \quad \text{für } x \geq 1;$$

es sei

$$F(s) = \int_1^\infty \chi(x) x^{-s-1} dx$$

für $s > 0$ konvergent und für $s \rightarrow 0$

$$F(s) \sim Bs^{-\beta} \quad (B \geq 0, \beta \geq 0).$$

Dann ist für jedes ganze positive r ⁸⁾ bei $s \rightarrow 0$

$$(-1)^r F^{(r)}(s) = \int_1^\infty \chi(x) (\lg x)^r x^{-s-1} dx \sim B\beta(\beta+1)\dots(\beta+r-1)s^{-\beta-r}.$$

Beweis. Für $r = 1$ ist

$$F'(s) = - \int_1^\infty \chi(x) \lg x \cdot x^{-s-1} dx.$$

⁸⁾ Unter den über $\chi(x)$ gemachten Voraussetzungen ist $F(s)$ beliebig oft unter dem Integralzeichen differenzierbar; vgl. E. Landau, Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen. Sitzungsberichte der Kgl. Bayr. Akademie der Wissenschaften, 36 (1906), S. 151–218.

Wegen $\chi(x) \geq 0$ nimmt $F^*(s)$ für $s \rightarrow 0$ nie zu, also folgt aus Hilfssatz 1

$$F'(s) \sim -B\beta s^{-\beta-1},$$

d. h.

$$\int_1^\infty \chi(x) \lg x \cdot x^{-s-1} dx \sim B\beta s^{-\beta-1}.$$

Es sei nun $r > 1$ und die Behauptung schon für $r-1$ bewiesen:

$$\begin{aligned} & (-1)^{r-1} F^{(r-1)}(s) \\ &= \int_1^\infty \chi(x) (\lg x)^{r-1} x^{-s-1} dx \sim B\beta(\beta+1) \dots (\beta+r-2) s^{-\beta-r+1}. \end{aligned}$$

Die Ableitung von

$$\int_1^\infty \chi(x) (\lg x)^{r-1} x^{-s-1} dx,$$

nämlich

$$- \int_1^\infty \chi(x) (\lg x)^r x^{-s-1} dx,$$

nimmt für $s \rightarrow 0$ nicht zu, also ist nach Hilfssatz 1

$$- \int_1^\infty \chi(x) (\lg x)^r x^{-s-1} dx \sim -B\beta(\beta+1) \dots (\beta+r-1) s^{-\beta-r}.$$

Damit ist Hilfssatz 2 allgemein bewiesen.

Hilfssatz 3⁹⁾. Wenn ϱ gegen ∞ wächst und gleichzeitig ζ ($0 < \zeta < 1$) so gegen 0 abnimmt, daß $\zeta^2 \varrho$ noch gegen ∞ geht, so ist

$$\frac{1}{F(\varrho+1)} \int_0^{(\varrho+1)(1-\zeta)} e^{-u} u^\varrho du \rightarrow 0,$$

$$\frac{1}{F(\varrho+1)} \int_{\varrho(1+\zeta)}^\infty e^{-u} u^\varrho du \rightarrow 0.$$

Beweis. 1. Es ist

$$\frac{1}{F(\varrho+1)} \int_0^{(\varrho+1)(1-\zeta)} u^\varrho e^{-u} du = \frac{1}{F(\varrho+1)} \int_0^{(\varrho+1)(1-\zeta)} \left(u^\varrho e^{-\frac{u}{1-\zeta}} \right) e^{\frac{\zeta u}{1-\zeta}} du.$$

Der Faktor $u e^{-\frac{u}{1-\zeta}}$ erreicht sein Maximum bei $u = \varrho(1-\zeta)$, der Wurzel von

$$0 = \frac{d}{du} \left(u^\varrho e^{-\frac{u}{1-\zeta}} \right) = \varrho u^{\varrho-1} e^{-\frac{u}{1-\zeta}} - \frac{1}{1-\zeta} u^\varrho e^{-\frac{u}{1-\zeta}}.$$

⁹⁾ Vgl. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, l. c.⁸⁾, Lemma D2, S. 142, mit der oberen Grenze $\varrho(1-\zeta)$ im ersten Integral.

Also ist, wenn im Verlauf der Rechnung K eine Konstante, nicht immer dieselbe¹⁰⁾, bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(\varrho+1)} \int_0^{(\varrho+1)(1-\zeta)} u^\varrho e^{-u} du &\leq \frac{(\varrho(1-\zeta))^\varrho e^{-\varrho}}{\Gamma(\varrho+1)} \int_0^{\frac{\zeta u}{1-\zeta}} e^{\frac{\zeta u}{1-\zeta}} du \\
 &= \frac{\varrho^\varrho e^{-\varrho} (1-\zeta)^\varrho}{\Gamma(\varrho+1)} \frac{1-\zeta}{\zeta} (e^{\zeta(\varrho+1)} - 1) \\
 &< K \frac{\varrho^\varrho e^{-\varrho} (1-\zeta)^\varrho}{\varrho^\varrho e^{-\varrho} \sqrt{\varrho}} \frac{1-\zeta}{\zeta} e^{\zeta(\varrho+1)} \\
 &< \frac{K}{\zeta \sqrt{\varrho}} e^{\zeta(\varrho+1) + \varrho \lg(1-\zeta)} \\
 &< \frac{K}{\zeta \sqrt{\varrho}} e^{-\frac{\varrho \zeta^2}{2} - \frac{\varrho \zeta^3}{3} \dots},
 \end{aligned}$$

also, da $\varrho \zeta^2 \rightarrow \infty$, $\zeta \sqrt{\varrho} \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{\Gamma(\varrho+1)} \int_0^{(\varrho+1)(1-\zeta)} u^\varrho e^{-u} du \rightarrow 0.$$

2. Es ist

$$\frac{1}{\Gamma(\varrho+1)} \int_{\varrho(1+\zeta)}^\infty e^{-u} u^\varrho du = \frac{1}{\Gamma(\varrho+1)} \int_{\varrho(1+\zeta)}^\infty (u^\varrho e^{-\frac{u}{1+\zeta}}) e^{-\frac{\zeta u}{1+\zeta}} du.$$

Der Faktor $u^\varrho e^{-\frac{u}{1+\zeta}}$ erreicht sein Maximum bei $u = \varrho(1+\zeta)$, der Wurzel von

$$0 = \frac{d}{du} (u^\varrho e^{-\frac{u}{1+\zeta}}) = \varrho u^{\varrho-1} e^{-\frac{u}{1+\zeta}} - \frac{1}{1+\zeta} u^\varrho e^{-\frac{u}{1+\zeta}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(\varrho+1)} \int_{\varrho(1+\zeta)}^\infty e^{-u} u^\varrho du &\leq \frac{(\varrho(1+\zeta))^\varrho e^{-\varrho}}{\Gamma(\varrho+1)} \int_{\varrho(1+\zeta)}^\infty e^{-\frac{\zeta u}{1+\zeta}} du \\
 &= \frac{\varrho^\varrho (1+\zeta)^\varrho e^{-\varrho}}{\Gamma(\varrho+1)} \frac{1+\zeta}{\zeta} e^{-\zeta \varrho} \\
 &< K \frac{(1+\zeta)^\varrho}{\sqrt{\varrho}} \frac{1+\zeta}{\zeta} e^{-\zeta \varrho} \\
 &< \frac{K}{\zeta \sqrt{\varrho}} e^{-\zeta \varrho + \varrho \lg(1+\zeta)} \\
 &< \frac{K}{\zeta \sqrt{\varrho}} e^{-\frac{\varrho \zeta^2}{2} + \frac{\varrho \zeta^3}{3} \dots},
 \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Vgl. G. H. Hardy, Orders of infinity, Cambridge 1910 (Cambridge Tracts Nr. 12), S. 5.

folglich

$$\frac{1}{\Gamma(\varrho+1)} \int_{\varrho(1+\zeta)}^{\infty} e^{-u} u^{\varrho} du \rightarrow 0.$$

Hilfssatz 4a. r strebe ganzzahlig gegen ∞ , gleichzeitig ζ gegen 0, aber so, daß $\zeta^2 r$ noch gegen ∞ wächst. s bedeute eine Zahl des Intervalls $0 < s < 1$. Es werde zur Abkürzung

$$e^{\frac{(1-\zeta)r+1}{s}} = R_1(r, \zeta, s); \quad e^{\frac{(1+\zeta)r+1}{s}} = R_2(r, \zeta, s)$$

gesetzt. Dann ist bei $r \rightarrow \infty$ gleichmäßig für $0 < s < 1$

$$\frac{s^{r+1}}{r!} \int_1^{R_1} (\lg x)^r x^{-s-1} dx \rightarrow 0,$$

$$\frac{s^{r+1}}{r!} \int_{R_2}^{\infty} (\lg x)^r x^{-s-1} dx \rightarrow 0.$$

Beweis. 1. Durch die Substitution

$$\lg x = y, \quad dx = e^y dy$$

ergibt sich

$$\frac{s^{r+1}}{r!} \int_1^{R_1} (\lg x)^r x^{-s-1} dx = \frac{s^{r+1}}{r!} \int_0^{\frac{(1-\zeta)r+1}{s}} y^r e^{-ys} dy$$

oder, $ys = u$ gesetzt:

$$= \frac{1}{r!} \int_0^{\frac{(1-\zeta)(r+1)}{s}} u^r e^{-u} du,$$

unabhängig von s . Nach Hilfssatz 3 strebt die rechte Seite gegen 0 für $r \rightarrow \infty$.

2. Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{s^{r+1}}{r!} \int_{R_2}^{\infty} (\lg x)^r x^{-s-1} dx &= \frac{s^{r+1}}{r!} \int_{\frac{(1+\zeta)r+1}{s}}^{\infty} y^r e^{-ys} dy \\ &= \frac{1}{r!} \int_{\frac{(1+\zeta)(r+1)}{s}}^{\infty} u^r e^{-u} du \\ &< \frac{1}{r!} \int_{\frac{(1+\zeta)r}{s}}^{\infty} u^r e^{-u} du \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Hilfssatz 4b. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 4a ist bei $r \rightarrow \infty$ gleichmäßig für $0 < s < 1$*

$$\frac{s^{r+2}}{(r+1)!} \int_1^{R_1} (\lg x)^{r+1} x^{-s-1} dx \rightarrow 0,$$

$$\frac{s^{r+2}}{(r+1)!} \int_{R_2}^{\infty} (\lg x)^{r+1} x^{-s-1} dx \rightarrow 0.$$

Beweis. Indem wir wie bei Hilfssatz 4a verfahren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{s^{r+2}}{(r+1)!} \int_1^{R_1} (\lg x)^{r+1} x^{-s-1} dx &= \frac{s^{r+2}}{(r+1)!} \int_0^{\frac{(1-\zeta)^{\frac{r+1}{s}}}{s}} y^{r+1} e^{-ys} dy \\ &= \frac{1}{(r+1)!} \int_0^{(1-\zeta)^{(r+1)}} u^{r+1} e^{-u} du \\ &\leq \frac{1}{(r+1)!} \int_0^{(1-\zeta)^{(r+2)}} u^{r+1} e^{-u} du \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{s^{r+2}}{(r+1)!} \int_{R_2}^{\infty} (\lg x)^{r+1} x^{-s-1} dx &= \frac{s^{r+2}}{(r+1)!} \int_{\frac{(1+\zeta)^{\frac{r+1}{s}}}{s}}^{\infty} y^{r+1} e^{-ys} dy \\ &= \frac{1}{(r+1)!} \int_{(1+\zeta)^{(r+1)}}^{\infty} u^{r+1} e^{-u} du \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Satz über Integrale der Form $\int_1^{\infty} \psi(x) x^{-s} dx$
mit positiver Funktion $\psi(x)$.*

Es sei $\psi(x)$ in jedem endlichen Intervall $1 \leq x \leq \omega$ eigentlich integrierbar, $\psi(x) \geq 0$ für $x \geq 1$ und

$$f(s) = \int_1^{\infty} \psi(x) x^{-s} dx$$

für $s > 0$ konvergent. Für $s \rightarrow 0$ sei

$$f(s) \sim \frac{C}{s} \quad (C \geq 0).$$

Dann ist für $x \rightarrow \infty$:

$$S(x) = \int_1^x \psi(y) dy \sim C \lg x.$$

Beweis. Zunächst ist

$$S(x) = O(\lg x).$$

Denn weil $\psi(y)$ positiv ist, so ist

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_1^x \psi(y) dy \leq \int_1^x \psi(y) e^{\frac{\lg x - \lg y}{\lg x}} dy = e \int_1^x \psi(y) y^{-\frac{1}{\lg x}} dy \\ &\leq e \int_1^x \psi(y) y^{-\frac{1}{\lg x}} dy = e f\left(\frac{1}{\lg x}\right) \sim C e \lg x \end{aligned}$$

für $x \rightarrow \infty$. Also kann man D so wählen, daß für alle $x \geq 1$

$$S(x) < D \lg x$$

ist.

Vermittels der verallgemeinerten partiellen Integration¹¹⁾ ergibt sich also für $s > 0$:

$$\begin{aligned} f(s) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^{\omega} \psi(x) x^{-s} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ [S(x) x^{-s}]_1^{\omega} + s \int_1^{\omega} S(x) x^{-s-1} dx \right\} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ S(\omega) \omega^{-s} + s \int_1^{\omega} S(x) x^{-s-1} dx \right\} \\ &= s \int_1^{\infty} S(x) x^{-s-1} dx. \end{aligned}$$

Folglich ist für $s \rightarrow 0$

$$\int_1^{\infty} S(x) x^{-s-1} dx \sim \frac{C}{s^2}.$$

Für $x \geq 1$ ist $S(x)$ stetig und ≥ 0 , also ist nach Hilfssatz 2 für jedes ganzzahlige positive r

$$(1) \quad \int_1^{\infty} S(x) (\lg x)^r x^{-s-1} dx \sim C(r+1)! s^{-r-2}$$

für $s \rightarrow 0$. Es sei nun ζ eine Funktion von r , die gegen 0 geht, wenn r gegen ∞ strebt, aber so, daß $\zeta^2 r \rightarrow \infty$ für $r \rightarrow \infty$. s sei eine beliebige Zahl des Intervalls $0 < s < 1$. δ sei beliebig vorgegeben und $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Nach Hilfssatz 4b gibt es ein $r_1 = r_1(\delta)$, so daß für $r \geq r_1$ und alle $0 < s < 1$

$$(2) \quad 0 \leq \int_1^{R_1} S(x) (\lg x)^r x^{-s-1} dx < D \int_1^{R_1} (\lg x)^{r+1} x^{-s-1} dx < \delta(r+1)! s^{-r-2}$$

¹¹⁾ Vgl. G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, Leipzig und Berlin 1909, S. 227–229.

und

$$(3) \quad 0 \leq \int_{R_2}^{\infty} S(x) (\lg x) x^{-s-1} dx < D \int_{R_2}^{\infty} (\lg x)^{r+1} x^{-s-1} dx < \delta (r+1)! s^{-r-2}$$

ist. Wegen (1) gibt es zu jedem r ein $\sigma = \sigma(r, \delta)$, so daß für $0 < s < \sigma$

$$(C - \delta)(r+1)! s^{-r-2} < \int_1^{\infty} S(x) (\lg x)^r x^{-s-1} dx < (C + \delta)(r+1)! s^{-r-2}$$

ist. Nehmen wir hierzu (2) und (3), so folgt: Zu jedem $r \geq r_1$ gibt es ein σ , so daß für $0 < s < \sigma$

$$(4) \quad (C - 3\delta)(r+1)! s^{-r-2} < \int_{R_1}^{R_2} S(x) (\lg x)^r x^{-s-1} dx < (C + \delta)(r+1)! s^{-r-2}$$

ist. Da $S(x)$ mit x monoton wächst, so ist

$$(5) \quad S(R_1) \int_{R_1}^{R_2} (\lg x)^r x^{-s-1} dx \leq \int_{R_1}^{R_2} S(x) (\lg x)^r x^{-s-1} dx \leq S(R_2) \int_{R_1}^{R_2} (\lg x)^r x^{-s-1} dx.$$

Ich bestimme Schranken für den rechts und links auftretenden Faktor.

Es ist

$$\int_1^{\infty} (\lg x)^r x^{-s-1} dx = \int_0^{\infty} y^r e^{-sy} dy = s^{-r-1} \int_0^{\infty} u^r e^{-u} du = r! s^{-r-1};$$

ferner nach Hilfssatz 4a für $r \geq r_2 = r_2(\delta)$

$$\int_1^{R_1} (\lg x)^r x^{-s-1} dx < \delta r! s^{-r-1},$$

$$\int_{R_2}^{\infty} (\lg x)^r x^{-s-1} dx < \delta r! s^{-r-1}$$

gleichmäßig in $0 < s < 1$. Also ist für $r \geq r_2$ und $0 < s < 1$

$$(6) \quad (1 - 2\delta)r! s^{-r-1} < \int_{R_1}^{R_2} (\lg x)^r x^{-s-1} dx < r! s^{-r-1}.$$

Nun können wir aus (4), (5) und (6) folgern, daß es zu jedem $r \geq r_0 = \text{Max}(r_1, r_2)$ ein σ gibt, so daß für $0 < s < \sigma$

$$(7) \quad S(R_1) = S(e^{(1-\zeta)\frac{r+1}{s}}) < \frac{C+\delta}{1-2\delta} \frac{r+1}{s} = \frac{C+\delta}{1-2\delta} \frac{1}{1-\zeta} \lg R_1,$$

$$(8) \quad S(R_2) = S(e^{(1+\zeta)\frac{r+1}{s}}) > (C-3\delta) \frac{r+1}{s} = (C-3\delta) \frac{1}{1+\zeta} \lg R_2$$

ist. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so denke ich mir bei der obigen Betrachtung δ von vornherein so klein und jetzt noch ein festes $r \geq r_0$ so groß (d. h. ζ so klein) gewählt, daß

$$\frac{C+\delta}{1-2\delta} \frac{1}{1-\zeta} < C + \varepsilon, \quad (C-3\delta) \frac{1}{1+\zeta} > C - \varepsilon$$

ist. Für $0 < s < \sigma$ nehmen die Funktionen $R_1 = e^{(1-\zeta)\frac{r+1}{s}}$ und $R_2 = e^{(1+\zeta)\frac{r+1}{s}}$ alle reellen Werte x von einer Stelle x_0 aufwärts an. Nach (7) und (8) ist also für $x \geq x_0 = x_0(\varepsilon)$:

$$(C - \varepsilon) \lg x < S(x) < (C + \varepsilon) \lg x,$$

d. h.

$$C - \varepsilon < \frac{S(x)}{\lg x} < C + \varepsilon.$$

§ 3.

Ein Konvergenzkriterium für Integrale.

Hilfssatz 1. Es sei $g(x)$ für $0 < x < x_0$ reell und zweimal differenzierbar. Wenn x durch positive Werte gegen 0 strebt, sei

$$g(x) \rightarrow \lambda.$$

Ferner sei für $0 < x < x_0$

$$x^2 g''(x) > -c. \quad (c > 0).$$

Dann ist für $x \rightarrow 0$ von rechts

$$x g'(x) \rightarrow 0.$$

Beweis. Es sei $0 < x < x_0$ und $0 < \vartheta < 1$, also $0 < \vartheta x < x$.

1. Ich wende den Taylorschen Satz auf $g(x)$ mit ϑx als Mittelpunkt der Entwicklung an:

$$g(x) = g(\vartheta x) + x(1-\vartheta)g'(\vartheta x) + \frac{x^2(1-\vartheta)^2}{2} g''(\xi_1) \quad (\vartheta x < \xi_1 < x).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} (\vartheta x) g'(\vartheta x) &= \frac{\vartheta}{1-\vartheta} (g(x) - g(\vartheta x)) - \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{2} x^2 g''(\xi_1) \\ &< \frac{\vartheta}{1-\vartheta} (g(x) - g(\vartheta x)) + \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{2} x^2 \frac{c}{\xi_1^2} \\ &< \frac{\vartheta}{1-\vartheta} (g(x) - g(\vartheta x)) + \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{2} \frac{c}{\vartheta^2}. \end{aligned}$$

Bei festem ϑ lasse ich x gegen 0 wandern. Da $g(x)$ einen Grenzwert λ hat, so ist

$$g(x) - g(\vartheta x) \rightarrow 0,$$

also

$$\limsup_{x=0} (\vartheta x) g'(\vartheta x) \leq \frac{c(1-\vartheta)}{2\vartheta}.$$

Nun ist aber

$$\limsup_{x=0} (\vartheta x) g'(\vartheta x) = \limsup_{x=0} x g'(x),$$

also

$$\limsup_{x=0} x g'(x) \leq \frac{c(1-\vartheta)}{2\vartheta}.$$

Da die linke Seite von ϑ frei ist, so muß die Beziehung auch gelten, wenn wir rechts zum $\lim \vartheta = 1$ übergehen, woraus folgt:

$$\limsup x g'(x) \leq 0.$$

2. Ich wende den Taylorschen Satz auf $g(x)$ mit x als Mittelpunkt der Entwicklung an:

$$g(\vartheta x) = g(x) - x(1-\vartheta)g'(x) + \frac{x^2(1-\vartheta)^2}{2} g''(\xi_2) \quad (\vartheta x < \xi_2 < x).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x g'(x) &= \frac{g(x) - g(\vartheta x)}{1 - \vartheta} + \frac{x^2(1-\vartheta)}{2} g''(\xi_2) \\ &> \frac{g(x) - g(\vartheta x)}{1 - \vartheta} - \frac{x^2(1-\vartheta)}{2} \frac{c}{\xi_2^2} \\ &> \frac{g(x) - g(\vartheta x)}{1 - \vartheta} - \frac{x^2(1-\vartheta)}{2} \frac{c}{(\vartheta x)^2}. \end{aligned}$$

Wandert x bei festem ϑ gegen 0, so folgt:

$$\liminf_{x=0} x g'(x) \geq -\frac{c(1-\vartheta)}{2\vartheta^2}.$$

Da die linke Seite von ϑ frei ist, so ergibt sich für $\lim \vartheta = 1$:

$$\liminf_{x=0} x g'(x) \geq 0.$$

Aus den Ergebnissen unter 1. und 2. folgt die Behauptung.

Hilfssatz 2. $\varphi(x)$ sei für $x \geq 1$ reell und in jedem endlichen Intervall $1 \leq x \leq x_0$ eigentlich integrabel. Es sei

$$f(s) = \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s} dx$$

für $s > 0$ konvergent. Für $s \rightarrow 0$ sei

$$f(s) \rightarrow l.$$

Ferner sei bei $x \rightarrow \infty$

$$w(x) = \int_1^x \varphi(y) \lg y dy = o(\lg x).$$

Dann ist

$$\int_1^\infty \varphi(x) dx = l.$$

Beweis. Durch verallgemeinerte partielle Integration¹²⁾ folgt:

¹²⁾ Vgl. Anmerkung ¹¹⁾.

$$\begin{aligned}
 f(s) &= \int_1^{\infty} \varphi(x) \lg x \frac{x^{-s}}{\lg x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon=1 \\ \omega=\infty}} \left\{ \left[w(x) \frac{x^{-s}}{\lg x} \right]_{\varepsilon}^{\omega} + \int_{\varepsilon}^{\omega} w(x) \frac{x^{s-1} + s x^{s-1} \lg x}{\lg^2 x \cdot x^{s+1}} dx \right\} \\
 &= \int_1^{\infty} w(x) \frac{1+s \lg x}{\lg^2 x \cdot x^{s+1}} dx;
 \end{aligned}$$

denn für $x \rightarrow 1$ ist

$$\varphi(x) \lg x = o(1),$$

also

$$w(x) = \int_1^x \varphi(y) \lg y dy = o(x-1),$$

folglich

$$\frac{w(x)}{\lg x} = o(1).$$

In

$$f(s) = \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x \lg^2 x} x^{-s} dx + s \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^{s+1} \lg x} dx$$

strebt für $s \rightarrow 0$ der zweite Summand gegen 0. Denn für $x \geq \xi = \xi(\delta)$ ist bei beliebig kleinem δ

$$|w(x)| < \delta \lg x,$$

also

$$\begin{aligned}
 \left| s \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^{s+1} \lg x} dx \right| &\leq \left| s \int_1^{\xi} \frac{w(x)}{x^{s+1} \lg x} dx \right| + \left| s \int_{\xi}^{\infty} \frac{w(x)}{x^{s+1} \lg x} dx \right| \\
 &\leq s \int_1^{\xi} \frac{|w(x)|}{x^{s+1} \lg x} dx + \delta s \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{x^{s+1}} \\
 &\leq s \int_1^{\xi} \frac{|w(x)|}{x \lg x} dx + \delta \xi^{-s}.
 \end{aligned}$$

Für $s \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\limsup_{s=0} \left| s \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^{s+1} \lg x} dx \right| \leq \delta.$$

Da die linke Seite von δ unabhängig ist, so muß

$$\lim_{s=0} s \int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x^{s+1} \lg x} dx = 0$$

sein. So finden wir:

$$\int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x \lg^2 x} x^{-s} dx \rightarrow l$$

für $s \rightarrow 0$. Nun ist aber

$$\frac{w(x)}{x \lg^2 x} = o\left(\frac{1}{x \lg x}\right),$$

also nach dem S. 69 zitierten Landauschen Satz:

$$\int_1^{\infty} \frac{w(x)}{x \lg^2 x} dx = l,$$

woraus wegen

$$\frac{1}{x \lg^2 x} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\lg x} \right)$$

durch verallgemeinerte partielle Integration folgt:

$$l = \lim_{\substack{\varepsilon=1 \\ \omega=\infty}} \left\{ \left[-\frac{w(x)}{\lg x} \right]_{\varepsilon}^{\omega} + \int_{\varepsilon}^{\omega} \frac{\varphi(x) \lg x}{\lg x} dx \right\} = \int_1^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Ein Konvergenzkriterium für Integrale.

$\varphi(x)$ sei für $x \geq 1$ reell und in jedem endlichen Intervall $1 \leq x \leq x_0$ eigentlich integrabel; $\varphi(x)$ erfülle die Bedingung:

$$\varphi(x) = O_L\left(\frac{1}{x \lg x}\right),$$

d. h.

$$\varphi(x) > -\frac{c}{x \lg x} \quad (c > 0).$$

Es sei

$$f(s) = \int_1^{\infty} \varphi(x) x^{-s} dx$$

für $s > 0$ konvergent und für $s \rightarrow 0$

$$f(s) \rightarrow l.$$

Dann konvergiert

$$f(0) = \int_1^{\infty} \varphi(x) dx$$

und ist gleich l .

Beweis. Wegen der Voraussetzungen über $\varphi(x)$ ist $f(s)$ unter dem Integralzeichen differenzierbar¹³⁾, also

$$\begin{aligned} f''(s) &= \int_1^{\infty} \varphi(x) \lg^2 x \cdot x^{-s} dx \\ &> - \int_1^{\infty} \frac{c}{x \lg x} \lg^2 x \cdot x^{-s} dx = -c \int_1^{\infty} x^{-s-1} \lg x dx = -cs^{-2}, \end{aligned}$$

¹³⁾ Vgl. Anmerkung ⁸⁾.

mithin

$$s^2 f''(s) > -c.$$

Nach Hilfssatz 1 ist also für $s \rightarrow 0$:

$$s f'(s) \rightarrow 0,$$

d. h.

$$s \int_1^{\infty} \varphi(x) \lg x \cdot x^{-s} dx \rightarrow 0.$$

Nun ist aber

$$\int_1^{\infty} (c + \varphi(x) x \lg x) x^{-s-1} dx = c s^{-1} + \int_1^{\infty} \varphi(x) \lg x \cdot x^{-s} dx,$$

also

$$s \int_1^{\infty} \frac{c + \varphi(x) x \lg x}{x} x^{-s} dx \rightarrow c$$

für $s \rightarrow 0$, d. h.

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{c}{x} + \varphi(x) \lg x \right) x^{-s} dx \sim \frac{c}{s}.$$

Da

$$\varphi(x) > -\frac{c}{x \lg x},$$

also

$$\frac{c}{x} + \varphi(x) \lg x > 0,$$

ferner $\frac{c}{x} + \varphi(x) \lg x$ in jedem endlichen Intervall rechts von 1 eigentlich integrabel ist, so folgt nach dem Hauptsatz des § 2:

$$\int_1^x \left(\frac{c}{y} + \varphi(y) \lg y \right) dy \sim c \lg x,$$

also

$$\int_1^x \varphi(y) \lg y dy = o(\lg x).$$

Nach Hilfssatz 2 ist dann aber

$$\int_1^{\infty} \varphi(x) dx = l.$$

(Eingegangen am 28. Oktober 1919.)