

Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

Von

R. Courant in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

- § 1. Die klassischen Minimaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen.
 - § 2. Ein Hilfssatz. Ein allgemeiner Satz über den wesentlich positiven Charakter der Eigenwerte.
 - § 3. Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen.
 - § 4. Folgerungen. Allgemeine Sätze über die Verteilung der Eigenwerte. Anwendungen auf Schwingungsvorgänge.
 - § 5. Weitere Folgerungen. Stetigkeitseigenschaften.
 - § 6. Die asymptotische Eigenwertverteilung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bei Gebieten, welche aus endlich vielen Quadraten oder Würfeln bestehen.
 - § 7. Ausdehnung des Resultates auf die allgemeine sich selbst adjungierte elliptische Differentialgleichung.
 - § 8. Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für einen beliebigen Bereich.
 - § 9. Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung in verschärfter Form.
 - § 10. Vektorielle Eigenwertprobleme. Das Gesetz der asymptotischen Eigenwertverteilung für die elektrischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes.
- Anhang. Über einige Approximationsätze.

Einleitung.

Die wichtigsten Randwertaufgaben der mathematischen Physik führen, wie bekannt, auf das Problem der Eigenwerte, welches sich in dem typischen Falle der gewöhnlichen Schwingungsgleichung folgendermaßen formulieren läßt: Es sei im zwei- bzw. im dreidimensionalen Raume mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y bzw. x, y, z ein Gebiet G mit stetig gekrümmter Begrenzung gegeben; gesucht sind diejenigen Konstanten λ , für welche die Differentialgleichung

$$(1) \quad \Delta u + \lambda u = 0$$

eine nicht identisch verschwindende, im Inneren und auf dem Rande von G stetige Lösung u besitzt, die am Rande des Gebietes einer homogenen Randbedingung, etwa

$$(2) \quad u = 0$$

oder

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

oder allgemeiner

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$$

oder schließlich auf einem Teil R' des Randes der Bedingung (3) oder (4), auf dem übrigen Teil R'' des Randes der Bedingung (2) genügt. Hierbei bedeutet Δu den Differentialausdruck

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

ν die nach innen gerichtete Normale, σ eine stetige oder stückweise stetige Funktion auf dem Rande. Die Konstanten λ sind die „Eigenwerte“ des Problems, die zugehörigen Lösungen u die „Eigenfunktionen“. Jeder Eigenwert ist so oft zu rechnen, als es zu ihm gehörige linear unabhängige Eigenfunktionen gibt. Physikalisch sind die Eigenwerte bei den Schwingungsproblemen im wesentlichen die *Quadrate der Eigenschwingungszahlen* und daher positiv. Wir werden im folgenden jedoch solche Fälle nicht ausschließen, wo auch negative Eigenwerte auftreten können.

An Stelle der Differentialgleichung (1) kann man eine allgemeinere Differentialgleichung

$$(5) \quad L(u) + \lambda ku = 0$$

in Betracht ziehen, wobei $L(u)$ ein sich selbst adjungierter elliptischer Differentialausdruck der Form

$$L(u) = p \Delta u + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + qu$$

ist. Hierin sind p , $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, q , k in G mit stetigen Ableitungen versehene Funktionen, die obendrein noch den Bedingungen

$$(6) \quad p > 0, \quad k > 0$$

genügen sollen.

Man kann ferner analoge Eigenwertprobleme untersuchen, bei denen an Stelle der gesuchten Funktion u ein Vektor u steht, welcher ebenfalls am Rande gewissen homogenen Randbedingungen unterworfen ist.

Durch die klassischen Untersuchungen von H. A. Schwarz, H. Poincaré und ihren Nachfolgern, vor allem aber durch die Theorie der Integralgleichungen sind die genannten Eigenwertprobleme in dem Sinne vollständig gelöst, daß die Existenz einer abzählbar unendlichen, sich im Endlichen nirgends häufenden Menge von Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$, des „Spektrums“, und eines zugehörigen vollständigen Systems von Eigenfunktionen u_1, u_2, u_3, \dots erwiesen ist, welche die Gesamtheit aller linear voneinander unabhängigen Lösungen des Problems darstellen. Die „normierten“ Eigenfunktionen erfüllen die Orthogonalitätsbedingungen

$$(7) \quad \iint_G k u_i u_l dx dy = 0 \quad (i \neq l)$$

$$(8) \quad \iint_G k u_i^2 dx dy = 1,$$

und jede den betreffenden Randbedingungen genügende mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich im Innern und auf dem Rande von G stetige Funktion f läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln:

$$f = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots,$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten nach Fourierscher Art durch die Gleichung

$$(9) \quad c_i = \iint_G k u_i f dx dy$$

gegeben sind.

Allgemein kann man für irgend zwei in G definierte Funktionen f, φ , deren Quadrate über G integrierbar sind, die Fourierschen Koeffizienten c_i, γ_i gemäß der Definition (9) bilden. Es gilt dann stets die sogenannte Vollständigkeitsrelation

$$(10) \quad \iint_G k f \varphi dx dy = c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + c_3 \gamma_3 + \dots$$

Nachdem diese Resultate gesichert sind, erscheint als die nächste Aufgabe die Untersuchung der *Abhängigkeit der Eigenwerte von den Bedingungen des Problems*, d. h. von dem zugrunde gelegten Gebiet G , von den Randbedingungen sowie von den in der Differentialgleichung auftretenden

den Ortsfunktionen. Auch vom Standpunkt des Physikers aus bieten diese Fragen hohes Interesse. Für fundamentale Theorien der modernen theoretischen Physik, wie die Theorie der *Hohlraumstrahlung* und der *spezifischen Wärmen* ist insbesondere die *asymptotische Verteilung der Eigenwerte*, d. h. das Verhalten des n -ten Eigenwertes bei wachsendem n , von entscheidender Bedeutung; die hier positiv angenommenen Eigenwerte sind dabei in eine aufsteigende Reihe geordnet zu denken. A. Sommerfeld und H. A. Lorentz¹⁾ haben auf Grund physikalischer Erwägungen das *Postulat* aufgestellt, daß die *Eigenwerte der klassischen mit der Gleichung (1) verknüpften Schwingungsprobleme asymptotisch, d. h. bis auf einen mit wachsendem n gegen 1 konvergierenden Faktor, von der Gestalt des Gebietes unabhängig sind und sich lediglich durch dessen Flächeninhalt bzw. Volumen bestimmen.*

Bezeichnet man z. B. für ein räumliches Gebiet mit dem Volumen V mit $A(\lambda)$ die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung (1), so drückt sich das asymptotische Eigenwertgesetz durch die Formel

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{V}{6\pi^2}$$

aus.

Die zuletzt genannte Frage nach der asymptotischen Eigenwertverteilung wurde von H. Weyl²⁾ in einer Folge scharfsinniger Arbeiten aufgenommen und in weitgehendem Umfange gelöst, so daß das Postulat von Sommerfeld und Lorentz für eine Reihe der wichtigsten Schwingungsprobleme mathematisch bewiesen ist.

Die Untersuchungen von Weyl beruhen auf der Äquivalenz des Eigenwertproblems für die Differentialgleichung mit einem solchen für eine Integralgleichung und auf der Anwendung von allgemeinen Sätzen der Integralgleichungstheorie. Wirft man jedoch die Frage nach der Abhängigkeit der Eigenwerte von den Daten des Problems in ihrer vollen Allgemeinheit auf, so findet man, daß die Benutzung der Integralgleichungen einen Umweg bedeutet, der keinen vollen Einblick in die vorliegenden Zusammenhänge gewährt und nicht gleichmäßig zum Ziele führt.

Ich möchte nun in der vorliegenden Abhandlung zeigen, daß man von einem andern Gesichtspunkte aus einen direkten Zugang zu dem

¹⁾ A. Sommerfeld, *Phys. Zeitschrift* **11**, 1910, S. 1061; H. A. Lorentz Vortrag auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Rom 1908; *Phys. Zeitschr.* **11** (1910), S. 1248. — Zur Frage der spezifischen Wärmen siehe P. Debye, *Ann. d. Physik*, **39** (1912), S. 789 ff.

²⁾ H. Weyl, *Math. Annalen*, **71**, S. 441–479, zitiert mit A., *Crelles Journal*, **141**, S. 1–11, zitiert mit C. 1, daselbst S. 163–181, zitiert mit C. 2; dasselbe Journal, **143**, S. 177–202, zitiert mit C. 3.

ganzen Komplex der gestellten Fragen erhält und in überraschend einfacher und einheitlicher Weise zu einer *vollständigen Beherrschung der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von den Koeffizienten der Differentialgleichung, den Randbedingungen und dem Gebiete* gelangt. Die Sätze über asymptotische Eigenwertverteilung ergeben sich dabei aus den allgemeinen Resultaten und Überlegungen ganz von selbst und zwar für sämtliche betrachteten Randbedingungen und eine beliebige Anzahl von unabhängigen Variablen; gleichzeitig erhält man für den bei Ersetzung des n -ten Eigenwertes durch seinen asymptotischen Wert gemachten Fehler eine Abschätzung, welche die Weylsche an Genauigkeit wesentlich übertrifft und theoretisch befriedigend erscheint.

Der leitende Gedanke bei unserer Methode wird sein, die Eigenwerte und Eigenfunktionen durch *Extremaleigenschaften* zu charakterisieren, wie dies auch dem Wesen der Schwingungsgleichungen entspricht, welche ja aus Variationsproblemen entspringen.

Die seit langem bekannten *Minimaleigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte* sind jedoch in ihrer klassischen Form³⁾ ungeeignet, als Grundlage der beabsichtigten Untersuchung zu dienen, da sie eine *rekurrenente Definition der Eigenwerte* liefern, bei der man zur Charakterisierung des n -ten Eigenwertes die Kenntnis der zu den vorangehenden Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen voraussetzt. Von diesem Übelstande kann man sich nun durch eine einfache Bemerkung befreien, welche dazu führt, den n -ten Eigenwert für sich nicht durch ein gewöhnliches isoperimetrisches Minimum-Problem zu charakterisieren, wie dies bisher üblich war, sondern durch ein *neuartiges Maximum-Minimum-Problem*. Diese an sich schon fruchtbare Bemerkung werden wir mit folgendem *allgemeinen Prinzip der Variationsrechnung* in Verbindung bringen: *Wenn in einem Minimum-Problem der Bereich der zur Konkurrenz zugelassenen Vergleichsfunktionen durch Verschärfung der Bedingungen verengert wird, so nimmt der Wert des Minimums nicht ab; wenn umgekehrt der Bereich der zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen durch Milderung der Bedingungen erweitert wird, so nimmt das Minimum nicht zu.* Durch singemäße Anwendung dieses Gedankens werden wir fast ohne jede Rechnung zu allen Resultaten dieser Abhandlung gelangen.

Die independente Definition des n -ten Eigenwertes durch ein Maximum-Minimum-Problem bietet überdies, wie in § 3 gezeigt werden soll, die methodisch bedeutsame Möglichkeit, die Theorie der Eigenwerte von der Theorie der Eigenfunktionen vollständig loszulösen, so daß die Resultate

³⁾ Vgl. H. Weber, *Math. Annalen* 1, S. 1ff.

dieser Arbeit begründet bleiben, auch wenn man von der Existenz der Eigenfunktionen keinen Gebrauch macht⁴⁾).

In § 1 werde ich die Formulierung und Begründung der klassischen Minimaleigenschaften geben. Diese Auseinandersetzung ist wünschenswert, weil sich in der Literatur die betreffenden Tatsachen nirgends zusammenhängend in der nötigen Allgemeinheit dargestellt finden.

Der § 2 enthält einen Hilfssatz und einen sich daraus ergebenden allgemeinen Satz über den wesentlich positiven Charakter der Eigenwerte elliptischer Differentialgleichungen. In § 3 wird die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen bewiesen. In § 4 werden eine Reihe grundlegender Sätze über die Verteilung der Eigenwerte gefolgert; dabei ergeben sich durch *physikalische Deutung der gewonnenen Resultate allgemeine Sätze über die Schwingungszahlen schwingender Systeme*, die sich als Erweiterungen bzw. Ergänzungen berühmter Untersuchungen erweisen, wie sie Lord Rayleigh in seiner *theorie of sound* über schwingende Systeme von endlich vielen Freiheitsgeraden angestellt hat. In § 5 werden als weitere Folgerungen der allgemeinen Grundgedanken vor allem die Stetigkeitseigenschaften der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von den Daten des Problems erörtert. Die §§ 6, 7, 8, 9 enthalten Untersuchungen über die asymptotischen Eigenwertgesetze für die sämtlichen oben angeführten Eigenwertprobleme, und darüber hinausgehend eine möglichst scharfe Abschätzung der durch die asymptotische Formel gelieferten Genauigkeit. In § 10 endlich werden die Grundgedanken dieser Arbeit auf ein vektorielles Eigenwertproblem, nämlich das *Problem der Hohlraumstrahlung* angewandt. Hier ergibt sich das Spektralgesetz der Hohlraumstrahlung mit befriedigender Schärfe fast mühelos ohne jede Rechnung oder Abschätzung aus unseren allgemeinen Resultaten.

Die Methoden dieser Abhandlung sind in völlig unveränderter Form für eine *beliebige Anzahl von unabhängigen Variablen* anwendbar. Es wird daher genügen, der Betrachtung im allgemeinen zwei unabhängige Variable zugrunde zu legen. Wo Modifikationen in den Beweisen oder den Resultaten bei Übergang zu mehr unabhängigen Veränderlichen auftreten, wird dies ausdrücklich bemerkt und ausgeführt werden.

Im übrigen sind die allgemeinen Überlegungen dieser Arbeit auch von der Ordnung der Differentialgleichung unabhängig, so daß Resultate wie z. B. die in § 4 entsprechend auch für solche Schwingungsvorgänge gelten, welche von einer Differentialgleichung vierter Ordnung beherrscht werden, etwa für die *Schwingungen von Platten*, die ja durch die Differentialgleichung $\Delta \Delta u + \lambda u = 0$ gekennzeichnet sind.

⁴⁾ Auf diesen Gedanken werde ich in einer folgenden Arbeit näher eingehen.

Vom prinzipiellen Standpunkt aus scheint mir die hier entwickelte Methode insofern Interesse zu verdienen, als sie einen Beitrag zur Lösung der seit Riemann und Dirichlet immer deutlicher hervortretenden Aufgabe darstellt, die Tatsachen der Analysis unter dem Gesichtspunkte der Variationsrechnung zu ordnen und zu verstehen^{4a)}.

§ 1.

Die klassischen Minimaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Um die Minimaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen, der allgemeinen sich selbst adjungierten Differentialgleichung (5) zu entwickeln, benutzen wir folgende abkürzende Bezeichnungen:

$$D[\varphi] = \iint_G \left\{ p \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + q \varphi^2 \right\} dx dy,$$

$$D[\varphi, \psi] = \iint_G \left\{ p \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + q \varphi \psi \right\} dx dy.$$

Hierbei sind φ, ψ Funktionen in G , für welche die betreffenden Integrale einen Sinn haben; $D[\varphi]$ soll das *Dirichletsche Integral* der Funktion φ heißen.

Ferner werden wir uns der *Greenschen Formel*

$$(11) \quad D[\varphi, f] = - \iint_G f L(\varphi) dx dy - \int_R p f \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds$$

bedienen. In dieser bedeuten φ, f zwei in $G^{(5)}$ stetige Funktionen, von denen die erste in G stetige Ableitungen erster und im Innern stückweise stetige⁶⁾ Ableitungen zweiter Ordnung besitzt, während für die Funktion f nur stückweise Stetigkeit der ersten Ableitungen in G vorausgesetzt zu werden

^{4a)} Den Grundgedanken der hier entwickelten Methode habe ich an dem Beispiel der Differentialgleichung (1) und der Randbedingung (2) in einer Note in den Göttinger Nachrichten, 1919, S. 255ff. dargelegt.

⁵⁾ Mit der Bezeichnung „stetig in G “ soll hier, wie im folgenden stets Stetigkeit mit Einschluß des Randes gemeint sein.

⁶⁾ Stückweise stetig soll eine Funktion in G heißen, wenn sie bis auf endliche Sprünge an endlich vielen analytischen (oder allgemeiner stetig gekrümmten) Kurvenstücken und bis auf endlich viele isolierte Punkte in G stetig ist. Gelegentlich werden wir auch die abgekürzte Bezeichnung „stetig differenzierbar“, „stückweise stetig differenzierbar“ usw. gebrauchen, wenn wir Funktionen meinen, welche selbst stetig sind und stetige bzw. stückweise stetige Ableitungen besitzen. — Wir bemerken, daß bei einer stetigen Funktion mit stückweise stetigen Ableitungen diese letzteren tangential zu jeder der betrachteten analytischen Linien stetig sein müssen.

braucht. Mit ds ist das Linienelement des Randes R von G bezeichnet; $\frac{\partial}{\partial \nu}$ bedeutet die Ableitung nach der ins Innere von G gerichteten Normale.

Das Gebiet G sei zunächst als von endlich vielen geschlossenen stetig gekrümmten Kurven begrenzt vorausgesetzt.

Wenn auch die Funktion f die für φ gemachten Voraussetzungen erfüllt, so folgt unmittelbar die *zweite Greensche Formel*

$$(11a) \quad \iint_G [fL(\varphi) - \varphi L(f)] dx dy = - \int_R p \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) ds.$$

Wir wollen die Randbedingungen (2) oder (3) oder (4) betrachten, wobei jedoch zunächst für die in der Bedingung (4) auftretende Funktion σ vorausgesetzt sei, daß

$$(12) \quad \sigma \geq 0$$

gelte, wie dies übrigens bei den meisten Problemen der mathematischen Physik der Fall ist (z. B. bei Problemen der Wärmeleitung). Dann ergibt sich aus der Formel (11) sofort, daß *alle Eigenwerte oberhalb einer endlichen Schranke liegen*. Denn es folgt, wenn wir $f = \varphi = u$ setzen, wobei u eine zum Eigenwert λ gehörige Eigenfunktion des Eigenwertproblems ist, mit Rücksicht auf (8)

$$D[u] = \iint_G u \lambda k u dx dy - \int_R p u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \lambda - \int_R p u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

Da aber wegen der für die Eigenfunktion geltenden Relation (8) und der Beschränktheit der Funktion q in G das Integral $\iint_G q u^2 dx dy$ oberhalb einer nur von q und k abhängigen Schranke liegt⁷⁾, so liegt auch $D[u]$ oberhalb dieser Schranke, und da ferner wegen der Vorzeichenbedingungen $p > 0$, $\sigma \geq 0$ das Randintegral jedenfalls nicht negativ ist, so folgt die behauptete Eigenschaft der Eigenwerte unmittelbar. *Wir dürfen uns die Eigenwerte also in eine ansteigende Reihe geordnet denken:*

$$(13) \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

wobei jeder Eigenwert so oft zu schreiben ist, wie seine Vielfachheit angibt. In entsprechender Weise werden die Eigenfunktionen durch u_1, u_2, \dots bezeichnet.

⁷⁾ Es ist nämlich $\left| \iint_G q u^2 dx dy \right| \leq \frac{|q|_{\text{Max}}}{k_{\text{Min}}}$, wobei $|q|_{\text{Max}}$ und k_{Min} die Extremwerte der betreffenden Funktionen in G bedeuten. (Vgl. auch S. 36.)

Nunmehr lassen sich die klassischen Minimaleigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte für die Randbedingungen $u = 0$ folgendermaßen aussprechen:

Satz 1. *Der n -te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für das Gebiet G bei der Randbedingung $u = 0$ ist der kleinste Wert, welchen das Integral $D[\varphi]$ annehmen kann, wenn zum Vergleich alle in G stetigen und mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehenen, der Randbedingung $\varphi = 0$ genügenden Funktionen φ zugelassen werden, welche die weiteren Bedingungen*

$$(14) \quad \int_G k \varphi u_i dx dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$(15) \quad \int_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

befriedigen. Das Minimum wird angenommen für die n -te Eigenfunktion $\varphi = u_n$.

Zum Beweise nehmen wir zunächst an, φ besitze in G stetige erste und im Innern stückweise stetige zweite Ableitungen, derart, daß das Integral von $L(\varphi)^2$ über G existiert. Dann folgt aus der Greenschen Formel (11) wegen der Randbedingung $\varphi = 0$ für $f = \varphi$

$$D[\varphi] = - \int_G \varphi L(\varphi) dx dy.$$

Wenden wir hierauf die Vollständigkeitsrelation (10) an, indem wir an Stelle der dort stehenden Funktion f den Ausdruck $\frac{L(\varphi)}{k}$ setzen, so ergibt sich

$$D[\varphi] = - \sum_{i=1}^{i=\infty} \gamma_i \int_G u_i L(\varphi) dx dy, \quad \text{wo } \gamma_i = \int_G k \varphi u_i dx dy,$$

und hieraus durch Anwendung der Formel (11a) auf jedes Glied der Summe und Berücksichtigung von $L(u_i) = -\lambda_i k u_i$:

$$D[\varphi] = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \gamma_i^2.$$

Da nun aus (14) und (15) ebenfalls vermöge der Vollständigkeitsrelation die Gleichungen

$$\begin{aligned} \gamma_i &= 0, & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 &= 1 \end{aligned}$$

folgen, so ergibt sich unmittelbar wegen (13)

$$D[\varphi] \geq \lambda_n$$

wie behauptet wurde.

Um die zunächst über die Ableitungen von φ gemachten Voraussetzungen abzustreifen, brauchen wir einige im *wesentlichen bekannte Approximationssätze*, deren Beweis im Anhang dieser Abhandlung angefügt ist, um den Gedankengang hier nicht zu unterbrechen. Man kann nämlich, wie im Anhang ausgeführt werden soll, jede den Bedingungen von Satz 1 genügende Funktion φ durch eine ebensolche Funktion φ' beliebig genau approximieren, welche überdies in G durchweg stetige erste und im Inneren stückweise stetige zweite Ableitungen besitzt, für welche $L(\varphi')^2$ über G integrierbar ist, und deren Dirichletsches Integral sich von demjenigen der Funktion φ um beliebig wenig unterscheidet. Aus dieser Bemerkung folgt unmittelbar, daß die in Satz 1 ausgesprochene Minimaleigenschaft von u_n auch gilt, wenn für φ außer der Stetigkeit nur stückweise Stetigkeit der ersten Ableitungen vorausgesetzt wird.

Ganz ebenso wie Satz 1 ergibt sich die entsprechende Minimaleigenschaft für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.

Satz 2. *Der n -te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für das Gebiet G bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ ist der kleinste Wert, den das Integral $D[\varphi]$ annehmen kann, wenn zum Vergleich alle in G stetigen, mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehenen, der Randbedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ genügenden Funktionen φ zugelassen werden, welche die weiteren Bedingungen*

$$(14) \quad \iint_G k \varphi u_i dx dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$(15) \quad \iint_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

befriedigen. Das Minimum wird angenommen für die n -te Eigenfunktion $\varphi = u_n$ ⁸⁾.

Die Aussagen dieses Satzes lassen sich noch erweitern durch folgenden Zusatz:

Wenn in dem Variationsproblem des Satzes 2 der Funktion φ auf dem Rande B keinerlei Bedingung auferlegt wird, so bleibt die Aussage von Satz 2 bestehen. D. h. die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ stellt sich bei dem Minimum-Problem von selbst ein, wenn die zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen φ am Rande überhaupt keiner Bedingung unterworfen werden.

Diese Tatsache folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß man jede den Bedingungen des Zusatzes genügende Funktion nebst ihrem Dirichlet-

⁸⁾ Hierbei ist natürlich $\lambda_1 = 0$, $u_1 = \text{const.}$ als erster Eigenwert, bzw. erste Eigenfunktion zu rechnen.

schen Integral durch eine den Bedingungen des Satzes 2 genügende Funktion nebst deren Dirichletschem Integral beliebig genau approximieren kann. Die nähere Begründung dieser Bemerkung wird ebenfalls in den Anhang verwiesen.

Für die allgemeinere Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$, wobei σ eine stetige Funktion auf dem Rande sei, erhält das charakteristische Variationsproblem eine etwas andere Gestalt dadurch, daß zu dem Integral über das Gebiet G noch ein *Integral über den Rand R* hinzutritt. Es gilt nämlich

Satz 3. *Der n -te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ ist der kleinste Wert, welchen der Ausdruck*

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_R p \sigma \varphi^2 ds$$

annehmen kann, wenn zum Vergleich alle in G stetigen mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehenen Funktionen φ zugelassen werden, welche der Randbedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \sigma \varphi$ genügen und außerdem die Bedingungen

$$\iint_G k \varphi u_i dx dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\iint_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

erfüllen. Das Minimum wird angenommen für die n -te Eigenfunktion $\varphi = u_n$.

Auch hier gilt entsprechend wie bei Satz 2 folgender

Zusatz: Die Aussage von Satz 3 bleibt bestehen, wenn der Funktion φ keine Randbedingung auferlegt wird.

Der Beweis verläuft ganz ebenso wie bei den entsprechenden Tatsachen für die anderen Randbedingungen. Besitzt zunächst wieder φ in G stetige zweite Ableitungen und existiert das Integral von $L(\varphi)^2$ über G , so folgt aus der Greenschen Formel (11) wenn man $f = \varphi$ setzt,

$$\mathfrak{D}[\varphi] = - \iint \varphi L(\varphi) dx dy.$$

Auf die rechte Seite wenden wir die Vollständigkeitsrelation an und schließen sodann wörtlich wie oben, indem wir berücksichtigen, daß wegen der Randbedingungen am Rande

$$p \left(u_i \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right) = 0$$

gilt.

Der Zusatz folgt aus der Bemerkung, daß wir jede den Bedingungen des Zusatzes genügende Funktion durch eine den Bedingungen des Satzes 3

genügende Funktion derart approximieren können, daß dabei auch der Wert von $D[\varphi]$ und $\mathfrak{D}[\varphi]$ beliebig genau approximiert wird. Auch dieser Approximationssatz wird im Anhang bewiesen werden.

Die oben ausgesprochenen Sätze lassen sich in zwei Richtungen erweitern. Erstens kann man, anstatt auf dem Rande R durchweg die Bedingung $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ zu betrachten, die letztere Bedingung auf einem aus endlich vielen Stücken bestehenden Teile R' des Randes, die erste — übrigens aus der zweiten als Grenzfall für $\sigma = \infty$ sich ergebende — Bedingung auf dem übrigen Teil R'' des Randes stellen, und obendrein der Funktion σ noch eine endliche Anzahl von Sprüngen gestatten. Zweitens kann man die Voraussetzung, daß der Rand durchweg stetig gekrümmt ist, aufgeben, und statt dessen zulassen, daß der Rand aus endlich vielen durchweg stetig gekrümmten — oder, was keine wesentliche Einschränkung für uns ist⁹⁾, aus endlich vielen analytischen — Teilen besteht, die miteinander Ecken, oder im Raume Kanten bilden dürfen, ohne sich zu berühren. Die in den Sätzen 1—3 gekennzeichneten Minimaleigenschaften der Eigenwerte und die Begründungen dieser Sätze bleiben dann bestehen. Dabei sind in den Eckpunkten des Randes, bzw. an den Punkten, wo die Randbedingung unstetig wird, die Stetigkeitsvoraussetzungen über die ersten Ableitungen durch die erweiterte Voraussetzung zu ersetzen, daß diese Randpunkte kein Hindernis für die Anwendung der Greenschen Formel auf das ganze Gebiet G bilden, daß also etwa das Integral $\int \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right| ds$ gegen Null erstrebt, wenn es über den in G liegenden Teil eines um den betreffenden Punkt geschlagenen Kreises vom Radius ε erstreckt wird, und wenn ε gegen Null rückt. In der Tat genügen die Eigenfunktionen u des Problems dieser Voraussetzung¹⁰⁾.

⁹⁾ Wie aus den später in § 5 bewiesenen Stetigkeitseigenschaften der Eigenwerte folgt, ergeben sich alle Resultate der vorliegenden Arbeit unmittelbar für stetig gekrümmte, sogar noch allgemeinere Randstücke, wenn sie für analytische Randstücke gelten.

¹⁰⁾ Das Eigenwertproblem der Differentialgleichung (1) bzw. (5) für Gebiete mit Ecken usw. ist in einer Reihe neuerer Arbeiten behandelt: S. Zarembka, *Journal d. Math.* 10 (1904), S. 395—444; L. Lichtenstein, *Journal für Mathematik* 140 (1910), S. 100—119; *Acta math.* 36 (1913), S. 345—386; T. Carleman, Über das Neumann-Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken, *Dissertation Upsala* 1916; Bär, Über Greensche Randwertaufgaben bei der Schwingungsgleichung, *Dissertation Würzburg* 1915. Man vergleiche auch den soeben erschienenen Enzyklopädieartikel von L. Lichtenstein. II C 3. „Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.“ Die genannten Untersuchungen sind nicht ohne Weitläufigkeiten, sie beziehen sich ferner explizite nur auf das Problem in der Ebene (vgl. indessen Carleman, S. 31—38). Ich werde daher im folgenden, wenn es sich um Gebiete mit Ecken bzw. Kanten oder um Randbedingungen mit Unstetigkeiten handelt, zeigen,

Der Satz 3 und sein Zusatz sind zunächst nur unter der Voraussetzung $\sigma \geq 0$ bewiesen. Wenn auch diese Voraussetzung bei zahlreichen Problemen der mathematischen Physik erfüllt ist, so gibt es doch Fälle, für welche dies nicht zutrifft, so z. B. die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie für einen Hohlraum, der nicht von einer einzigen konvexen Fläche begrenzt ist (siehe § 10). Um die Voraussetzung $\sigma \geq 0$ beseitigen zu können, beweisen wir einen Hilfssatz, welcher zudem noch ein selbständiges Interesse besitzt.

§ 2.

Ein Hilfssatz. Ein allgemeiner Satz über den wesentlich positiven Charakter der Eigenwerte.

Der hier zu beweisende Hilfssatz, welcher später lediglich verwandt werden wird, wenn es sich um die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ mit nicht durchweg positiven oder verschwindendem σ handelt, lehrt, daß gegenüber dem Dirichletschen Integral $D[\varphi]$ das Randintegral $\int_R p \sigma \varphi^2 ds$ relativ beliebig klein wird, wenn der Wert des Dirichletschen Integrales hinreichend groß ist und die Bedingung (15) gilt.

Hilfssatz. Ist φ eine in G stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion mit beliebig großem Dirichletschen Integral, welche der Bedingung

$$(15) \quad \iint_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

genügt, sind ferner σ und p beschränkte, stückweise stetige Funktionen der Bogenlänge s auf dem Rande R von G , dann ist das Randintegral

$$\int_R p \sigma \varphi^2 ds$$

höchstens von der Größenordnung

$$\sqrt{D[\varphi]},$$

d. h. es gilt stets eine Beziehung der Form

$$\left| \int_R p \sigma \varphi^2 ds \right| < C \sqrt{D[\varphi]} + C',$$

wobei C, C' zwei von φ unabhängige Konstanten sind.

wie man direkt und unabhängig von der genannten Literatur die Resultate der vorliegenden Arbeit sichern kann. — Übrigens werden wir später an Gebieten mit Ecken bzw. Kanten im wesentlichen nur Quadrate bzw. Würfel zu betrachten haben; hier aber kennen wir die Eigenfunktionen explizite und stellen fest, daß sie noch in den Ecken bzw. Kanten stetige Ableitungen besitzen.

Der Beweis dieses Hilfssatzes beruht auf der Anwendung der Schwarzischen Ungleichung

$$\left(\int \psi \cdot \chi dt\right)^2 \leq \int \psi^2 dt \cdot \int \chi^2 dt,$$

welche für irgend zwei Funktionen ψ, χ von t gilt, wenn die betreffenden Integrale existieren.

Es sei zunächst $L(u) = \Delta u$, $k = 1$. Wir betrachten vorab ein Gebiet T von folgender Gestalt (vgl. Fig. 1). Die Begrenzung wird gebildet

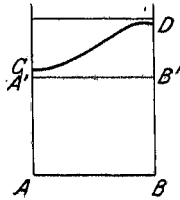


Fig. 1.

von drei sich rechtwinklig schneidenden geraden Strecken CA, AB, BD und einem mit stetiger Tangente versehenen Kurvenstück CD , welches ganz in dem durch AC und BD definierten Parallelstreifen liegt. Der Höchstwert des Abstandes eines Punktes auf CD von AB sei kleiner als eine positive Größe $2h$; andererseits möge die Kurve CD die im Abstande h zu AB durch das Gebiet T gelegte Parallele $A'B'$ nicht treffen. Schließlich soll der Winkel, den die Tangente in einem beliebigen Punkte von CD mit der Richtung AB einschließt, absolut genommen, einen festen, unterhalb 90° gelegenen Wert, etwa 60° nicht übersteigen; AB falle in die x -Achse, AC sei parallel zur y -Achse.

Es sei φ eine im Bereiche T stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktion, deren Dirichletsches Integral

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = D_T$$

existiert. Wir setzen ferner

$$(16) \quad \iint_T \varphi^2 dx dy = a^2.$$

Die Werte von φ auf dem Kurvenstück CD bezeichnen wir mit $\varphi(s)$, indem wir die Abhängigkeit von der Bogenlänge s zum Ausdruck bringen.

Vermöge der Schwarzischen Ungleichung folgt aus der Identität

$$\varphi(x, y_1) - \varphi(x, y_0) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$$

für die Differenz zwischen einem Werte $\varphi(s)$ und einem Werte φ_0 , der zu einem Punkte mit derselben x -Koordinate wie der durch den Wert von s definierte Randpunkt und einer zwischen 0 und h liegenden y -Koordinate y_0 gehört,

$$[\varphi(s) - \varphi_0]^2 \leq |y(s) - y_0| \int_{y_0}^{y(s)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 dy < 2h \int_{y_0}^{y(s)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 dy$$

Integrieren wir diese Beziehung über alle Werte von x zwischen den Abszissen x_0 und x_1 der Punkte A und B , wobei φ_0 bei festem y_0 ebenso wie $\varphi(s)$ als Funktion von s oder als Funktion von x angesehen werden kann, so folgt

$$\int_{x_0}^{x_1} [\varphi(s) - \varphi_0]^2 dx < 2h D_T.$$

Wegen $\left| \frac{ds}{dx} \right| < 2$ ergibt sich, wenn wir links als Integrationsvariable s einführen,

$$(17) \quad \int_{s_0}^{s_1} [\varphi(s) - \varphi_0]^2 ds < 4h D_T.$$

Schließlich bemerken wir, daß aus der Beziehung (16) die Existenz eines Wertes y_0 folgt, für den

$$(18) \quad \int_{s_0}^{s_1} \varphi_0^2 ds \leq 2 \int_{x_0}^{x_1} \varphi_0^2 dx \leq 2 \frac{a^2}{h}$$

ist. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man das über das Rechteck $ABA'B'$ erstreckte Integral von φ^2 als Sukzession zweier einfacher Integrale, erst nach x , dann nach y , auffaßt und beachtet, daß dieses Integral sicher kleiner oder gleich a^2 ist.

Nach diesen Vorbereitungen zerlegen wir den Rand R unseres Gebietes G in eine endliche Anzahl m von Stücken mit stetiger Tangente, derart, daß in jedem Stück die Tangente sich um weniger als 60 Grad dreht, und schließen an jedes dieser Randstücke ein Teilgebiet von G an, welches den soeben betrachteten Typus T zeigt. Wir denken uns dabei die Zahl h so klein gewählt, daß diese Teilgebiete, die wir mit T_1, T_2, \dots, T_m bezeichnen wollen, keinen Punkt von G mehr als dreimal bedecken, behalten uns aber im übrigen die Verfügung über die Kleinheit von h vor.

Ist φ eine der Bedingung (15) für $h = 1$ genügende Funktion, und bezeichnet α_i^2 den Wert des über T_i erstreckten Integrales von φ^2 , so folgt jedenfalls

$$(19) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \leq 3.$$

Addiert man ferner sämtliche durch die Beziehung (17) für die Gebiete T gegebenen m Ungleichungen, so ergibt sich

$$(20) \quad \int_R [\varphi(s) - \varphi_0]^2 ds < 4h(D_{T_1} + D_{T_2} + \dots + D_{T_m}) < 12hD[\varphi],$$

wobei die Werte $\varphi_0 = \varphi_0(s)$ für jedes Stück des Randes durch die oben getroffene Festsetzung definiert sind.

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$\int_R \varphi(s)^2 ds = r^2, \quad \int_R \varphi_0^2 ds = r_0^2, \quad r \geq 0, \quad r_0 \geq 0,$$

und beachten, daß aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int_R \varphi \cdot \varphi_0 ds \right)^2 \leq r^2 r_0^2$$

folgt, so ergibt sich aus (20)

$$12 h D[\varphi] > r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 = (r - r_0)^2.$$

Andererseits liefert die Addition der Ungleichungen (18) für die Bereiche T_i unter Berücksichtigung von (19)

$$\int_R \varphi_0^2 ds = r_0^2 < \frac{6}{h}.$$

Mithin ist

$$(21) \quad r^2 = \int_R \varphi^2 ds < \left(\sqrt{12} \sqrt{h} \sqrt{D[\varphi]} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{h}} \right)^2.$$

Die Zahl h in dieser Ungleichheit ist — von einem gewissen Kleinheitsgrad an — frei verfügbar und kann mit $D[\varphi]$ verändert werden. Setzen wir, was erlaubt ist, sobald $D[\varphi]$ eine gewisse Grenze überschritten hat,

$$h = \{D[\varphi]\}^{-\frac{1}{2}},$$

so folgt aus (21)

$$(22) \quad \int_R \varphi^2 ds < C \sqrt{D[\varphi]},$$

und somit für *alle* Funktionen φ

$$\int_R \varphi^2 ds < C \sqrt{D[\varphi]} + C'.$$

wobei C und C' numerische positive Konstanten sind.

Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen, vorausgesetzt, daß $p = k = 1$, $q = 0$, $\sigma = 1$ ist. Für den allgemeinen Fall folgt er hieraus unmittelbar wegen der Beschränktheit von p , q , k , σ , und wegen der durchweg geltenden Beziehungen $p > 0$, $k > 0$. Denn einerseits ergibt sich aus (15) und aus der Beziehung $k > c$, wo c eine positive Konstante ist, die Beschränktheit von $\int_G \int \varphi^2 dx dy$, andererseits ist

$$\left| \int_R p \sigma \varphi^2 ds \right| < c' \int_R \varphi^2 ds,$$

wo c' eine andere positive Konstante ist, und schließlich erkennt man, daß die Ausdrücke $D[\varphi]$ und der spezielle Ausdruck für $D[\varphi]$ im Falle $p = k = 1$, $q = 0$ gleichzeitig und von derselben Ordnung ins Unendliche wachsen. Damit aber ist der allgemeine Fall auf den besonderen zurückgeführt.

Als erste Folgerung aus dem Hilfssatz ergibt sich die Tatsache, daß der Satz 3 des § 1 auch dann noch gilt, wenn die Funktion σ auf R negative Werte annehmen kann. Die Schlüsse von § 1 beruhten darauf, daß unterhalb einer festen Schranke nur endlich viele Eigenwerte liegen, so daß man die Eigenwerte in eine ansteigende Reihe ordnen kann. Dies ist auch der Fall, wenn nicht durchweg $\sigma \geq 0$. Denn aus dem Hilfssatz folgt

Satz 4. *Die Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ kann auch bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ nur endlich viele negative Eigenwerte haben.*

In der Tat, da sicher nur endlich viele Eigenwerte absolut genommen unterhalb einer endlichen Schranke liegen, muß, von endlich vielen Eigenwerten und Eigenfunktionen abgesehen, der Ausdruck

$$\lambda = D[u] + \int_R p \sigma u^2 ds$$

für eine Eigenfunktion u absolut genommen größer als eine beliebig vorgegebene Zahl d sein. Wenn d über alle Grenzen wächst, kann $D[u]$ nicht beschränkt bleiben, weil sonst dem Hilfssatz zufolge auch das Randintegral mithin der Betrag von λ beschränkt bliebe. Wenn aber $D[u]$ hinreichend groß ist, so beträgt nach dem Hilfssatz das Randintegral absolut genommen nur einen beliebig kleinen Bruchteil von $D[u]$, mithin ist dann der Eigenwert λ positiv, da $D[u]$ positiv ist. — Satz 4 erscheint an sich bemerkenswert, weil er besagt, daß der wesentlich positive Charakter der Eigenwerte durch die Randbedingung nicht beeinflusst wird, sondern lediglich auf der elliptischen Natur der Differentialgleichung beruht.

§ 3.

Die Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Die oben entwickelten klassischen Minimaleigenschaften stellen eine rekurrente Definition der Eigenwerte und Eigenfunktionen dar und sind deshalb ungeeignet, die Grundlage einer Untersuchung zu bilden, welche sich direkt auf den n -ten Eigenwert bezieht. Der gekennzeichnete Übelstand läßt sich jedoch durch folgende Bemerkung beseitigen:

Wir betrachten irgendeines der in § 1 untersuchten Variationsprobleme, etwa das allgemeinste aus Satz 3, und modifizieren es dadurch, daß wir der Funktion φ statt der Bedingungen (14) die $n - 1$ veränderten Bedingungen

$$(23) \quad \iint_G k \varphi v_i dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, (n - 1))$$

aufzulegen, wobei v_1, v_2, \dots, v_{n-1} irgendwie gewählte in G stückweise

stetige Funktionen sind. Ob und wann das so entstehende Variationsproblem eine Lösung besitzt, bleibe dahingestellt. Jedenfalls aber werden die Dirichletschen Integrale $D[\varphi]$ oder allgemeiner die Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ unter den gestellten Bedingungen eine *untere Grenze* besitzen, welche von den Funktionen v_1, v_2, \dots, v_{n-1} abhängig ist und mit $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ bezeichnet werden soll. Wir können nun leicht folgende Tatsache beweisen: *Die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ des modifizierten Variationsproblems ist stets kleiner oder gleich dem Minimum λ_n bei dem ursprünglichen Variationsproblem, d. h. es gilt*

$$(24) \quad d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} \leq \lambda_n = d\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}.$$

Zum Beweise¹¹⁾ bilden wir aus den ersten n Eigenfunktionen u_1, u_2, \dots, u_n des Randwertproblems mit n Konstanten c_1, c_2, \dots, c_n eine lineare Kombination

$$\varphi = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n,$$

welche den n Bedingungen (23) und der Bedingung

$$(15) \quad \iint_G k \varphi^2 dx dy = 1$$

genügt. Die Bedingungen (23) stellen $n - 1$ homogene lineare Gleichungen für die n Größen c_i dar, während die Relation (15) wegen der Orthogonalität der Funktionen u_i gleichbedeutend ist mit

$$(25) \quad c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = 1.$$

Die Bestimmung der c_i ist somit stets mindestens auf eine Art möglich. Die so gebildete Funktion φ genügt überall auf dem Rande R von G ebenso wie die Eigenfunktionen den gestellten Randbedingungen. Sie ist also im Variationsproblem konkurrenzfähig.

Aus der Greenschen Formel (11) folgt, wenn wir für f, φ zwei verschiedene Eigenfunktionen u_i, u_k einsetzen

$$D[u_i, u_k] + \int_R p \sigma u_i u_k ds = 0. \quad \text{f. Randbed.}$$

Mithin wird

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_R p \sigma \varphi^2 ds = c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots + c_n^2 \lambda_n,$$

also ist wegen (25) und wegen $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$

$$\mathfrak{D}[\varphi] \leq \lambda_n.$$

Damit ist bewiesen, daß bei vorgegebenen Funktionen v_1, v_2, \dots, v_{n-1} der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ Werte annehmen kann, die jedenfalls nicht größer als λ_n sind, und daß somit auch die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ dieser

¹¹⁾ Vgl. eine analoge, auch sonst in der Literatur ähnlich vorkommende Schlußweise bei Weyl loc. cit.²⁾ A, S. 445.

Werte nicht größer als λ_n ist. Da für $v_1 = u_1, \dots, v_{n-1} = u_{n-1}$ diese untere Grenze gerade gleich λ_n wird, wie der § 1 lehrt, so erhalten wir folgendes grundlegende Resultat, welches die gesuchte independente Definition des n -ten Eigenwertes darstellt:

Satz 3a. *Es seien v_1, v_2, \dots, v_{n-1} in G $n-1$ stückweise stetige Funktionen, es sei ferner $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ das Minimum bzw. die untere Grenze aller Werte, welche der Ausdruck*

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_R p \sigma \varphi^2 ds$$

annehmen kann, wenn φ irgendeine in G stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion ist, welche den Bedingungen

$$\begin{aligned} \iint k \varphi v_i dx dy &= 0, & (i = 1, \dots, n-1) \\ \iint k \varphi^2 dx dy &= 1, \end{aligned}$$

sowie einer der betrachteten Randbedingungen genügt. Dann ist der n -te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für das Gebiet G und die betreffende Randbedingung gleich dem größten Wert, den diese untere Grenze annehmen kann, wenn für die v_1, v_2, \dots, v_{n-1} alle zulässigen Funktionensysteme in Betracht gezogen werden. Dieses Maximum-Minimum wird erreicht für $v_1 = u_1, \dots, v_{n-1} = u_{n-1}; \varphi = u_n$.

Von der Randbedingung $\varphi = 0$ abgesehen, dürfen die Randbedingungen in dem Variationsproblem fortgelassen werden.

Der algebraische Sinn dieser Maximum-Minimum-Eigenschaft erhellt aus dem Vergleich mit der folgenden, ganz ebenso zu beweisenden Eigenschaft der Hauptachsen eines m -dimensionalen Ellipsoides:

Ordnet man die Längen der Hauptachsen eines m -dimensionalen Ellipsoides in eine fallende Reihe, so ist die n -te dieser Zahlen gleich dem kleinsten Wert, welchen die Länge der größten Hauptachse eines $m - n + 1$ -dimensionalen auf dem ursprünglichen gelegenen Schnittellipsoides annehmen kann, wenn die $m - n + 1$ -dimensionale Schnittebene alle möglichen Lagen durchläuft.

Das Resultat dieses Paragraphen ist unabhängig davon, ob das Gebiet G aus einem einzigen in sich zusammenhängenden Stück besteht. *Es darf auch G aus einer Reihe von getrennten Gebieten G', G'', G''', \dots gebildet sein, welche ihrerseits keine inneren Punkte gemein haben, aber wohl gemeinsame Randpunkte besitzen dürfen. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von G sind dann einfach die entsprechenden Eigenwerte und Eigenfunktionen der Teilgebiete G', G'', G''', \dots zusammengenommen, wobei jede dieser Eigenfunktionen immer nur in ihrem zugehörigen Gebiet*

$G^{(4)}$ von Null verschieden ist, und außerhalb als identisch Null fortgesetzt wird.

Physikalisch bedeutet dies die selbstverständliche Tatsache, daß bei einem Schwingungsvorgang, der mehrere voneinander getrennte Gebilde erfaßt, diese Gebilde unabhängig voneinander schwingen.

Ferner sei noch bemerkt, daß die hier dargelegte Maximum-Minimum-Eigenschaft, genau analog für *sich selbst adjungierte Differentialgleichungen höherer Ordnung*, z. B. die *Differentialgleichung der schwingenden Platte*

$$\Delta \Delta u - \lambda u = 0$$

herleiten läßt.

Man kann, worauf zum Schluß hingewiesen werden soll, die bewiesene Maximum-Minimum-Eigenschaft der Eigenwerte geradezu als Ausgangspunkt der Theorie der Eigenwerte wählen, indem man das Variationsproblem dieses Paragraphen an die Spitze stellt und den n -ten Eigenwert einfach als den Wert des Maximum-Minimums definiert. Man hat dabei unter dem Maximum-Minimum die obere Grenze der Werte $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ zu verstehen. Wie sich aus den Betrachtungen des nächsten Paragraphen unmittelbar ergibt, ist die Existenz des so definierten n -ten Eigenwertes einleuchtend¹²⁾, und zwar ganz gleich, ob der Rand Ecken bzw. Kanten und die Randbedingung Unstetigkeiten aufweisen oder nicht. Ferner gelten alle Betrachtungen und Sätze der folgenden Paragraphen ohne weiteres für diesen neuen Eigenwertbegriff. Man ist also durch die gegebene Definition in der Lage, die Theorie der Eigenwerte von der Theorie der Eigenfunktionen und den damit verbundenen Existenzschwierigkeiten vollständig unabhängig zu entwickeln und auf eine elementare Grundlage zu stellen¹³⁾.

¹²⁾ Man erhält nämlich auf Grund der Überlegungen des § 4 als obere Schranke für diesen Wert den n -ten Eigenwert irgendeines im Innern von G liegenden Quadrates für die Randbedingung $u = 0$, also eine wohlbekannte feste Zahl.

¹³⁾ Der hier ausgesprochene Gedanke wäre nichts als eine wenig interessante Abstraktion, wenn der neue Eigenwertbegriff nicht etwas Ähnliches besagte wie der übliche, mit dem er ja, den oben gewonnenen Resultaten zufolge, im allgemeinen gleichbedeutend ist. Ganz unabhängig aber von den vorangehenden Entwicklungen dieser Arbeit und für den allgemeinsten hier in Betracht gezogenen Fall ergibt sich, wie ich in einer folgenden Arbeit ausführlich zeigen werde, aus der Maximum-Minimum-Definition unschwer die Tatsache, daß man zu jedem Eigenwert λ Funktionen φ finden kann, welche den Randbedingungen genügen und für welche das Integral $\int_G [L(\varphi) + \lambda k \varphi]^2 dx dy$ so klein wird wie man will. Diese „genäherten Eigenfunktionen“ genügen mit beliebig großer Genauigkeit denselben Relationen wie die exakten Eigenfunktionen, insbesondere der Orthogonalitätsrelation. Sie können, also in gewisser Weise die Rolle der gewöhnlichen Eigenfunktionen übernehmen.

§ 4.

Folgerungen. Allgemeine Sätze über die Verteilung der Eigenwerte. Anwendung auf Schwingungsvorgänge.

Die Fruchtbarkeit der Resultate des vorangehenden Paragraphen beruht darauf, daß man die Maximum-Minimum-Eigenschaft in Zusammenhang bringen kann mit dem in der Einleitung erwähnten *Grundprinzip der Variationsrechnung*, wonach durch Verschärfung der Bedingungen in einem Minimumproblem der Wert des Minimums vergrößert, jedenfalls nicht verkleinert wird, und wonach umgekehrt bei Milderung der Bedingungen das Minimum fällt, jedenfalls nicht wächst.

Für die Schwingungsvorgänge der Physik können wir aus diesem Prinzip unmittelbar eine bedeutsame Folgerung ziehen. Wir betrachten irgendein schwingungsfähiges System, dessen Eigenschwingungen durch ein Eigenwertproblem der hier behandelten Art charakterisiert werden, wobei an Stelle der sich selbst adjungierten partiellen elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung auch eine solche höherer Ordnung oder ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen treten darf. Dann beachten wir, daß irgendwelche Zwangsbedingungen, unter denen das System seine Schwingungen auszuführen genötigt wird, sich mathematisch als Nebenbedingungen für die in dem Variationsproblem auftretenden Konkurrenzfunktionen φ aussprechen. Werden in dem Maximum-Minimumproblem die Bedingungen für φ verschärft, so wird jedesmal bei festgehaltenem System der Funktionen v_1, v_2, \dots, v_{n-1} die untere Grenze $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ vergrößert oder jedenfalls nicht verkleinert, mithin gilt dasselbe für das Maximum dieser unteren Grenzen, den n -ten Eigenwert. Entsprechend wird der Wert des Maximum-Minimums, d. h. der n -te Eigenwert verkleinert oder jedenfalls nicht vergrößert, wenn die Bedingungen für die Funktionen φ gemildert werden.

Physikalisch besagt dies:

Satz 5. *Wird ein schwingungsfähiges System gezwungen, unter Zwangsbedingungen zu schwingen, so ändern sich der Grundton und jeder Oberton nie anders als in wachsendem Sinne. Werden umgekehrt Bedingungen, unter denen ein System schwingt, aufgehoben, so ändern sich der Grundton und jeder Oberton nie anders als in abnehmendem Sinne. Dabei können als Zwangsbedingungen auch innere Bedingungen des Problems angesehen werden.*

Beispielsweise muß sich bei einer *ingespannten schwingenden elastischen Membran* der Grundton und sämtliche Obertöne in dem angegebenen wachsenden Sinne ändern, wenn die Membran außer am Rande noch sonst an Linien- oder Flächenstücken festgehalten wird. Dagegen wird sich der

Grundton und alle Obertöne bei einer Membran in fallendem Sinne ändern, wenn sie einen *Riß* erhält, oder bei einer *schwingenden Platte* wenn das Material einen „*Sprung*“ bekommt. Im letzteren Falle werden nämlich für die Konkurrenzfunktionen φ bzw. für deren Ableitungen an der Stelle des Risses oder Sprunges die Bedingungen der Stetigkeit aufgehoben¹⁴).

Mathematisch ergeben sich aus unserem Prinzip eine Reihe von wichtigen *allgemeinen Sätzen über die Eigenwertverteilung* bei den betrachteten Randwertaufgaben. Der erste Satz bezieht sich auf die Randbedingung $u = 0$ und vergleicht die Eigenwertverteilung für ein Gebiet G mit der für Teilgebiete desselben. Der zweite Satz leistet das entsprechende für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Die weiteren Sätze beziehen sich auf die allgemeineren Randbedingungen und vergleichen die Spektren der Differentialgleichung für verschiedene Formen dieser Randbedingungen.

Satz 6. *Es seien G', G'', G''', \dots eine Anzahl von Teilgebieten des Gebietes G , welche keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Dann ist die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für das Gebiet G bei der Randbedingung $u = 0$ mindestens so groß wie die gesamte Anzahl der unter derselben Grenze entsprechenden gelegenen Eigenwerte der Teilgebiete $G^{(i)}$ bei derselben Randbedingung¹⁵).*

Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen: *Bei der Randbedingung $u = 0$ ist der n -te Eigenwert λ_n des Gebietes G kleiner oder gleich der n -ten Zahl λ_n^* aus der Gesamtmenge der nach steigender Größe geordneten, in ihrer richtigen Vielfachheit gezählten Eigenwerte der Teilgebiete $G^{(i)}$.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus folgender Überlegung. Legt man in dem Maximum-Minimum-Problem, welches den Eigenwert λ_n definiert, den Funktionen φ die neue Bedingung auf, an allen Rändern der Teilgebiete $G^{(i)}$ und in dem ganzen, zu keinem der $G^{(i)}$ gehörigen Teile von G zu verschwinden, so wird einerseits dem oben formulierten Grundprinzip zufolge der Wert des Maximum-Minimums vergrößert, jedenfalls nicht verkleinert. Andererseits ist das neuentstehende Maximum-Minimum-Problem gerade dasjenige, welches den n -ten Eigenwert des aus den getrennten Gebieten G', G'', \dots bestehenden Gebietes definiert, d. h. der neue Wert des Maximum-Minimums ist gleich λ_n^* , und somit gilt $\lambda_n \leq \lambda_n^*$, wie behauptet wurde.

¹⁴) Hiermit scheint die bekannte Tatsache zusammenzuhängen, daß ein Porzellanteller, welcher einen „Sprung“ erhält, seinen ursprünglichen Klang verliert und dumpf klingt.

¹⁵) Vgl. den entsprechenden Satz für die Differentialgleichung (1) bei Weyl C. Desgl. die oben zitierte Note des Verfassers.

Insbesondere ergibt sich aus dem bewiesenen Satze eine wichtige Eigenschaft der zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen Eigenwerte λ_n , die man zweckmäßig als die *Eigenschaft der Monotonität* bezeichnen kann.

Satz 7. *Der zur Randbedingung $u = 0$ gehörige n -te Eigenwert eines Gebietes G ist nie größer als der zur selben Randbedingung gehörige n -te Eigenwert eines Teilgebietes.*

Der in Satz 6 ausgesprochenen Tatsache steht für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ eine entsprechende gegenüber:

Satz 8. *Es seien $G', G'', G''' \dots$, eine endliche Anzahl von Teilgebieten, welche das Gebiet G lückenlos ausfüllen. Dann ist die Anzahl $B(\kappa)$ der unterhalb einer Grenze κ gelegenen, zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte der Differentialgleichung $L(u) + \lambda \kappa u = 0$ für das Gebiet G kleiner oder höchstens gleich der gesamten Anzahl der zur selben Randbedingung gehörigen, unter derselben Grenze κ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung für die Teilgebiete $G^{(i)}$.*

Man kann diesen Satz auch folgendermaßen aussprechen: *Es sei κ_n^* die n -te der nach wachsender Größe geordneten Zahlen aus der Gesamtmenge der zu den Teilgebieten $G^{(i)}$ und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte, wobei jeder mit der richtigen Vielfachheit zu zählen ist, dann ist der n -te Eigenwert κ_n des Gebietes G für dieselbe Randbedingung größer oder gleich der Zahl κ_n^* .*

Auch hierfür folgt der Beweis fast unmittelbar durch Anwendung unseres allgemeinen Prinzips auf das Maximum-Minimum-Problem, welches den n -ten Eigenwert κ_n von G charakterisiert. Denn wenn wir in diesem Problem den zur Konkurrenz zuzulassenden Funktionen φ gestatten, auf den in G verlaufenden Randlinien der Gebiete $G^{(i)}$ derart unstetig zu sein, daß sie beim Überschreiten dieser Linien endliche Sprünge machen, so wird durch diese Milderung der Bedingungen der Wert des Maximum-Minimums verkleinert oder jedenfalls nicht vergrößert. Andererseits definiert das modifizierte Maximum-Minimum-Problem nach § 3 gerade den n -ten zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwert des Gebietes, welches aus den getrennten Gebieten $G^{(i)}$ besteht, d. h. den Wert κ_n^* . Hiermit ist die Relation $\kappa_n \geq \kappa_n^*$ bewiesen¹⁶⁾.

¹⁶⁾ Die obigen Sätze 6, 7, 8 gelten, gleichviel ob die Teilgebiete Ecken haben oder nicht. Will man im Falle des Auftretens von Ecken den Beweis, von der Kenntnis der Existenz und der Eigenschaften der Eigenfunktionen unabhängig machen und auf die Maximum-Minimum-Definition der Eigenwerte stützen, so verfährt man in diesem Zusammenhange am kürzesten folgendermaßen: Zum Beweise von Satz 6 betrachte man statt der Gebiete $G^{(i)}$ zunächst Gebiete $G_m^{(i)}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), wobei

Die nachfolgenden Sätze geben Aufschluß über das gegenseitige Verhältnis der Spektren der Differentialgleichung bei den verschiedenen Arten der vorkommenden Randbedingungen.

Satz 9. Es sei λ_n für das Gebiet G der n -te zur Randbedingung $u = 0$ gehörige Eigenwert der Differentialgleichung $L(u) + \lambda k u = 0$, α_n der n -te Eigenwert für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, schließlich μ_n der n -te Eigenwert für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ oder allgemeiner $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ auf einem Teile R' des Randes R , $u = 0$ auf dem übrigen Teile R'' des Randes. Dann ist stets

$$(26) \quad \mu_n \leq \lambda_n,$$

und bei nicht negativem σ

$$(26a) \quad \alpha_n \leq \mu_n.$$

Mit andern Worten besagt der Satz, daß unter den betrachteten Randbedingungen $u = 0$ die schärfste, und wenn σ nicht negativ wird, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ die mildeste ist.

$G_m^{(6)}$ in $G^{(6)}$ liegt, keine Ecken mehr besitzt und mit wachsendem m gegen $G^{(6)}$ konvergiert. Für die $G_m^{(6)}$ gilt der Beweis des Textes. Andererseits konvergieren die Eigenwerte der $G_m^{(6)}$ gegen die der $G^{(6)}$, wie die lediglich auf der Maximum-Minimum-Eigenschaft beruhenden Ausführungen am Schluß des folgenden Paragraphen zeigen. Hieraus aber folgt unmittelbar der Satz 6 für die Gebiete $G^{(6)}$.

Zum Beweise von Satz 8 modifizieren wir das ursprüngliche Maximum-Minimum-Problem, welches den n -ten Eigenwert von G definiert, dadurch, daß wir wie oben im Text den Funktionen φ auf den in G liegenden Randstücken der $G^{(6)}$ endliche Sprünge gestatten, und daß wir darüber hinaus von jeder der Funktionen v_i identisches Verschwinden in allen Gebieten $G^{(6)}$ mit Ausnahme je eines verlangen. Der Wert des Maximum-Minimums bei dem so modifizierten Variationsproblem ist der n -te unter den zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen nach der Größe geordneten Eigenwerten der sämtlichen $G^{(6)}$. Andererseits wurde durch Erweiterung der Zulassungsbedingungen für die Funktion φ jeder Wert $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ verringert oder nicht vergrößert und desgleichen durch die Verringerung des Variabilitätsbereiches der Funktionen v_i die obere Grenze dieser Werte $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ wiederum verringert oder nicht vergrößert. Hieraus folgt der Satz unmittelbar wie im Text.

Es bedürfte dieser Überlegungen gar nicht, wenn man sich auf den Satz stützen würde, daß auch bei Zugrundelegung der Maximum-Minimum-Definition des n -ten Eigenwertes die Eigenwerte eines aus getrennten Gebieten bestehenden Gebietes mit denen der Teilgebiete identisch sind. Dann bleiben einfach die Überlegungen des Textes unverändert bestehen. Der genannte Satz ist jedoch hier nicht, wie bei der klassischen Eigenwertdefinition, trivial, und sein Beweis würde nicht kürzer sein als die hier gemachten Ausführungen.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß uns diese Betrachtungen von allen durch Ecken bzw. Kanten entstehenden Schwierigkeiten befreien.

Der eine Teil des Satzes, nämlich die Beziehung $\kappa_n \leq \mu_n$ folgt aus der Tatsache, daß für $\sigma \geq 0$ stets das im Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ auftretende Randintegral größer, wenigstens aber gleich Null wird, daß also hier stets

$$\mathfrak{D}[\varphi] \geq D[\varphi]$$

ist. Daher aber ist auch die untere Grenze der linken Seite bei gegebenen Funktionen v_1, v_2, \dots, v_{n-1} größer oder gleich der unteren Grenze der rechten Seite, also stehen auch die Maxima dieser unteren Grenzen in derselben Beziehung, d. h. es gilt eben $\mu_n \leq \kappa_n$.

Um den zweiten Teil der Behauptung, d. h. die Ungleichung $\mu_n \leq \lambda_n$ einzusehen, betrachten wir ein Teilgebiet G' von G und dessen zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen n -ten Eigenwert λ'_n . Wenn wir in dem Maximum-Minimum-Problem, welches den n -ten Eigenwert μ_n von G charakterisiert, der Funktion φ die weitere Bedingung auferlegen, überall in G außerhalb G' zu verschwinden, so wird sicher der Wert des Maximum-Minimums ~~verkleinert oder nicht vergrößert~~. Andererseits ist dieser neue Maximum-Minimum-Wert offenbar mit λ'_n identisch. Es gilt also $\mu_n \leq \lambda'_n$. Nun ist aber, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, der n -te, zur Randbedingung $u = 0$ gehörige Eigenwert λ'_n eine stetige Funktion des Gebietes. Wenn also das Gebiet G' so gewählt wird, daß es das Gebiet G hinreichend genau approximiert, so unterscheidet sich λ'_n von λ_n um beliebig wenig. Also gilt auch $\mu_n \leq \lambda_n$, wie behauptet wurde.

Bei den Anwendungen des Satzes 9 müssen wir beachten, daß die Anzahlen der betreffenden Eigenwerte unterhalb einer gegebenen Grenze in der umgekehrten Größenbeziehung stehen wie die Eigenwerte selbst.

Zusatz zu Satz 9. Die Aussage von Satz 9 bleibt bestehen, wenn man die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ nicht überall, sondern nur auf einem Teile des Randes R oder des Randstückes R' durch die Bedingungen $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ bzw. $u = 0$ ersetzt.

Der Beweis folgt genau so wie der des Satzes 9 selbst.

Satz 10. Wenn in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ auf R die Funktion σ entweder an jeder Stelle vergrößert oder verkleinert wird¹⁷⁾, so kann sich jeder einzelne Eigenwert nur im selben Sinne ändern.

Auch diese sehr bemerkenswerte Tatsache ist eine unmittelbare Folge der Maximum-Minimum-Eigenschaft. Denn der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ ändert sich bei gleichsinniger Änderung der Funktion σ für jedes φ im selben Sinne wie σ , also auch seine untere Grenze bei gegebenen v , und damit das Maximum dieser unteren Grenze.

¹⁷⁾ Dabei ist natürlich auch eine Änderung um Null zugelassen.

Wir erkennen aus den letzten Sätzen, daß die Eigenwerte für die verschiedenen Randbedingungen in charakteristischen Beziehungen zueinander stehen. Ändert man die Funktion σ an jeder Stelle monoton von 0 bis ∞ , so wächst jeder einzelne Eigenwert monoton von dem Werte, den er bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ hat, bis zu dem Werte, den er bei der Randbedingung $u = 0$ erhält.

Wir werden im nächsten Paragraphen erkennen, daß dieses *Wachstum stetig vor sich geht*. Weiter wird die Untersuchung der asymptotischen Eigenwertverteilung zeigen, daß trotz des gekennzeichneten Verhaltens der Eigenwerte doch der asymptotische Wert des n -ten Eigenwertes unabhängig von der Randbedingung bleibt, daß sich also das Wachstum des Eigenwertes bei Wachsen der Funktion σ nur in einem zur Größe des Eigenwertes unvergleichlich geringen Spielraum vollzieht.

Auch die hier zuletzt entwickelten Tatsachen haben sämtlich eine einfache *physikalische Bedeutung*. Wir erkennen nämlich in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ die eines sogenannten „freien Randes“, d. h. eines solchen, wo bei dem Schwingungsvorgang keinerlei Randbedingung gestellt ist, wo z. B. im Falle der Akustik die schwingenden Massen am Rande in keiner Weise festgehalten werden. Die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u$ entspricht einem mit elastischen Kräften gehaltenen Rande, wobei die Größe der festhaltenden Kraft durch die Funktion σ bestimmt ist. Die Bedingung $u = 0$ stellt den Fall dar, wo diese Kraft unendlich groß geworden ist, d. h. der Rand absolut festgehalten wird.

§ 5.

Weitere Folgerungen. Stetigkeitseigenschaften.

Die Maximum-Minimum-Eigenschaft des n -ten Eigenwertes gestattet uns, ohne Schwierigkeiten die Abhängigkeit der Eigenwerte von den Koeffizienten der Differentialgleichung, den Randbedingungen und dem Gebiet G zu untersuchen.

Satz 11. *Wenn in der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ der Koeffizient k an jeder Stelle im selben Sinne verändert wird, so ändert sich bei jeder Randbedingung der n -te Eigenwert im entgegengesetzten Sinne; wird der Koeffizient p überall gleichsinnig verändert, so ändert sich jeder Eigenwert im selben Sinne; im Falle der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u$ ist hierbei $\sigma \geq 0$ vorzusetzen.*

In der Tat, es werde zunächst p überall gleichsinnig verändert. Dann ändert sich für jede konkurrenzfähige Funktion φ der Wert des Ausdruckes $\mathfrak{D}[\varphi]$ monoton im selben Sinne, mithin auch die untere Grenze dieser Werte

bei festen v_i , also auch das Maximum dieser unteren Grenzen, der n -te Eigenwert. Wird k monoton verändert, etwa in k' , so wird eine Funktion φ , welche vorher den Konkurrenzbedingungen genügte, dies nicht mehr tun, vielmehr muß sie, um nunmehr der Bedingung

$$\iint_G k' \varphi^2 dx dy = 1$$

zu genügen, mit einem gewissen konstanten Faktor multipliziert werden; der kleiner als 1 resp. größer als 1 wird, je nachdem k wachsend oder fallend sich geändert hat. Die mit diesem Faktor multiplizierte Funktion φ werde φ' genannt. Da dieser Faktor quadratisch in $\mathfrak{D}[\varphi]$ eingeht, so erkennt man, daß je nach der Art der Änderung von k die untere Grenze der Werte $\mathfrak{D}[\varphi]$ bei festgehaltenen Funktionen v_i nicht kleiner bzw. nicht größer wird, als die untere Grenze der Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi']$, wobei hier aber an Stelle der Funktionen v_i entsprechend der Verwandlung von k in k' die Funktionen $v_i' = v_i \frac{k}{k'}$ getreten sind. Da das System der Funktionen v_i zugleich mit dem der Funktionen v_i' den ganzen Bereich der zulässigen Funktionssysteme erschöpft, so folgt ebenso wie oben, daß das Maximum der unteren Grenzen von $D[\varphi]$ und $D[\varphi']$ in der umgekehrten Größenbeziehung zueinander stehen wie die Funktionen k und k' .

Aus der so bewiesenen Tatsache ergibt sich die *Stetigkeit der Eigenwerte* in ihrer Abhängigkeit von p und k . Wenn nämlich zunächst die Funktion k in k' geändert wird und dabei $0 < (1 - \varepsilon)k \leq k' \leq (1 + \varepsilon)k$, ist, unter ε eine positive Zahl verstanden, so muß infolge des Satzes 11 der n -te Eigenwert der Differentialgleichung für die Funktion k' zwischen den n -ten Eigenwerten liegen, die wir erhalten, wenn wir in der Differentialgleichung k durch $k(1 - \varepsilon)$ bzw. $k(1 + \varepsilon)$ ersetzen. Das aber sind offenbar der mit den Faktoren $(1 - \varepsilon)^{-1}$ bzw. $(1 + \varepsilon)^{-1}$ multiplizierte n -te Eigenwert der ursprünglichen Differentialgleichung. Wenn ε hinreichend klein genommen wird, so liegen diese beiden Zahlen beliebig nahe beieinander, und damit ist die behauptete Stetigkeitseigenschaft bewiesen.

Genau so verläuft der Beweis, wenn p geändert wird, vorausgesetzt, daß die in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ auftretende Funktion σ nirgends negativ wird. Ist dies nicht der Fall, so beachte man, daß nach dem Hilfssatz in § 2 jedenfalls das Randintegral $\int_R p \sigma \varphi^2 ds$ mit $D[\varphi]$ und $\mathfrak{D}[\varphi]$ zugleich beschränkt bleibt. Da man nun in dem Maximum-Minimum-Problem, welches den n -ten Eigenwert definiert, für die Werte von $\mathfrak{D}[\varphi]$

von vornherein eine geeignete obere Schranke festsetzen darf¹⁸⁾, ohne die Lösung des Variationsproblems zu ändern, so folgt, daß eine hinreichend kleine Änderung der Funktion p das Randintegral für alle bei Innehaltung dieser Schranke zulässigen Funktionen φ um beliebig wenig verändert, woraus sich wiederum die Stetigkeit des n -ten Eigenwertes als Funktion von p ergibt.

Ebenso hängt der n -te Eigenwert stetig von q ab. Es folgt nämlich aus der Relation $k \geq k_m$, wo k_m eine positive Konstante ist,

$$1 = \int_G \int k \varphi^2 dx dy \geq k_m \int_G \int \varphi^2 dx dy.$$

Somit ist für alle zulässigen Funktionen φ das Integral $\int_G \int \varphi^2 dx dy$ beschränkt. Daraus ergibt sich, daß bei hinreichend kleiner Änderung der Funktion q sich der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ um beliebig wenig ändert, und zwar um gleichmäßig wenig für alle zulässigen Funktionen φ . Also gilt dasselbe für das Maximum-Minimum von $\mathfrak{D}[\varphi]$.

Zusammenfassend erhalten wir das Resultat:

Satz 12. Der n -te Eigenwert der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ ändert sich für alle betrachteten Randbedingungen stetig mit den Koeffizienten der Differentialgleichung.

In ähnlicher Weise erkennt man die Stetigkeit der Eigenwerte in ihrer Abhängigkeit von der in der Randbedingung auftretenden Funktion σ . Wir dürfen wiederum von vornherein in dem Variationsproblem voraussetzen, daß die Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ unterhalb einer festen Schranke liegen. Dann liegt auch das Randintegral $\int_R \varphi^2 ds$ unterhalb einer festen Schranke. Ändern wir also in dem Randintegral $\int_R p \sigma \varphi^2 ds$ die Funktion σ um hinreichend wenig, so ändert sich auch dieses Randintegral um gleichmäßig beliebig wenig, somit gilt dasselbe für $\mathfrak{D}[\varphi]$ und daher auch für das Maximum-Minimum von $\mathfrak{D}[\varphi]$. Wir haben also das Resultat:

Satz 12a. Der n -te Eigenwert ändert sich stetig mit der in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u$ auftretenden Funktion σ .

Wir untersuchen schließlich die Stetigkeitseigenschaften des n -ten Eigenwertes als Funktion des Gebietes G und wollen dabei zeigen, daß der n -te Eigenwert eines Gebietes G' den n -ten Eigenwert des Gebietes G

¹⁸⁾ Etwa den zur Randbedingung $u = 0$ gehörigen n -ten Eigenwert eines beliebigen im Innern von G liegenden Quadrates. Denn zufolge der Sätze 9 und 7 ist der betrachtete n -te Eigenwert von G sicher kleiner als der eines solchen Quadrates. Die Festsetzung dieser oberen Schranke für $\mathfrak{D}[\varphi]$ kann also an der Lösung des Maximum-Minimum-Problems nichts ändern.

bei entsprechenden Randbedingungen beliebig genau approximiert, wenn das Gebiet G durch das Gebiet G' hinreichend genau approximiert wird. Dabei müssen wir jedoch den Begriff der *Approximation eines Gebietes G durch ein anderes G' genügend scharf fassen*. Sobald in den Randbedingungen normale Ableitungen auftreten, werden wir uns nicht mehr, wie es in der Analysis situs üblich ist, damit begnügen können, daß der Rand von G' den Rand von G approximiert, wir werden vielmehr verlangen müssen, daß auch die *Normalen* des Randes von G' die des Randes von G *approximieren*. In der Tat kann man zeigen, daß bei der milderer Auffassung der Approximation der n -te Eigenwert nicht eine stetige Funktion des Gebietes zu sein braucht¹⁹⁾.

Analytisch können wir die Approximation des Gebietes G durch das Gebiet G' im schärferen Sinne folgendermaßen kennzeichnen.

Das Gebiet G' geht mit Einschluß des Randes punktweise in das Gebiet G mit Einschluß des Randes über durch Transformationsgleichungen der Form

$$(27) \quad x' = x + g(x, y), \quad y' = y + h(x, y),$$

wobei die Funktionen g, h im ganzen Gebiet stetig und mit stückweise

¹⁹⁾ Als einfachstes Beispiel für dieses Vorkommnis diene folgendes: Es sei $L(\varphi) = \Delta \varphi$, $k = 1$. G sei ein Quadrat von der Seite 1. Außerhalb G , zu G parallel orientiert und der Mitte einer der Seiten q von G gegenüber werde ein zweites Quadrat G_s von der Seitenlänge s im Abstände s angebracht und sodann sein Inneres mit dem von G durch einen schmalen, senkrecht zur Mitte von q verlaufenden Streif S verbunden, welcher von zwei im Abstand η parallelen Geraden der Länge s begrenzt wird. Das Gebiet G' möge aus den beiden Quadraten G und G_s sowie dem Streife S bestehen. Der erste Eigenwert von G' bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ ist $\alpha_1 = 0$, die zugehörige Eigenfunktion ist $u_1 = \text{const}$. Wenn nun zu jedem s die Breite η des Streifens S hinreichend klein gewählt wird, so kann auch der zweite Eigenwert von G' beliebig klein gemacht werden. Betrachten wir nämlich eine Funktion φ in G' , welche in G_s gleich $-\frac{1}{s}$, in G gleich einer Konstanten c ist und in S linear von c nach $-\frac{1}{s}$ abfällt. Die Konstante c sei so bestimmt, daß das über G' erstreckte Integral von φ verschwindet. Wenn η hinreichend klein ist, wird sich c von 0 um beliebig wenig unterscheiden. Das Dirichletsche Integral von φ über G' wird also von der Größenordnung $\frac{\eta}{s^3}$. Wenn daher η als ein hinreichend kleiner Bruchteil von s gewählt wird, so ist dieses Integral beliebig klein, während das Integral von φ^2 über G' sich beliebig wenig von 1 unterscheidet. Daher ist der klassischen Minimaleigenschaft der Eigenwerte und Eigenfunktionen zufolge erst recht der zweite Eigenwert von G' beliebig klein. Läßt man also s gegen Null konvergieren, so konvergiert der zweite Eigenwert von G' sicherlich gegen Null, wenn $\frac{\eta}{s^3}$ gegen Null konvergiert. Der zweite Eigenwert von G ist jedoch positiv; also ist er nicht der Grenzwert des zweiten Eigenwertes von G' , obwohl der Rand von G' gegen den von G konvergiert.

stetigen ersten Ableitungen versehen sind, und wobei diese Funktionen ebenso wie ihre ersten Ableitungen absolut genommen unterhalb einer hinreichend kleinen positiven Schranke ε liegen. Wenn dies der Fall ist, so sagen wir, daß das Gebiet G durch das Gebiet G' mit der Genauigkeit ε approximiert wird.

Konvergiert ε gegen Null und ändert sich G' entsprechend, so sagen wir, daß G' stetig in G übergeht. Nunmehr gilt, wie wir zeigen wollen, der folgende Satz.

Satz 13. *Der n -te Eigenwert der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ bei irgendeiner der betrachteten Randbedingungen ändert sich stetig, wenn das Gebiet G in dem gekennzeichneten Sinne stetig deformiert wird.*

Zum Beweise betrachten wir eine Folge von Gebieten G' , für welche die oben eingeführte Zahl ε gegen Null konvergiert. Wir transformieren den Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ durch die Transformation (27) in einen Ausdruck für das Gebiet G' und erhalten dabei für $D[\varphi]$ das Integral

$$\iint_{(G')} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \left(1 + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right)^2 \right] p + \varphi^2 q \right\} M^{-1} dx' dy',$$

wobei zur Abkürzung für die bei hinreichend kleinem ε beliebig wenig von 1 verschiedene Funktionaldeterminante

$$M = \left(1 + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \left(1 + \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x}$$

gesetzt ist. Für das Randintegral ergibt sich

$$\int_R p \sigma \varphi^2 ds = \int_{R'} p \sigma \frac{ds}{ds'} \varphi^2 ds'.$$

Hierbei bedeutet ds' das Linienelement des Randes R' von G' . Beachten wir nun die Relation

$$2 \iint_{G'} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dx' dy' \leq \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right)^2 \right] dx' dy',$$

so folgt aus

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| < \varepsilon$$

$$D[\varphi] = (1 + \delta_1) \iint_{G'} \left\{ p \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} \right)^2 \right] + q \varphi^2 \right\} dx' dy'$$

sowie

$$\int_R p \sigma \varphi^2 ds = (1 + \delta_2) \int_{R'} p \sigma \varphi^2 ds',$$

wobei δ_1, δ_2 zwei zugleich mit ε gegen Null strebende Größen sind, mithin

$$\mathfrak{D}[\varphi] = (1 + \delta_2) \mathfrak{D}'[\varphi],$$

wo δ_ε mit ε zugleich gegen Null strebt und wobei $\mathfrak{D}'[\varphi]$ den $\mathfrak{D}[\varphi]$ entsprechenden Ausdruck für G' bedeutet.

Wir haben ferner die Nebenbedingungen (15), (23) des § 3 für die Funktionen φ zu transformieren und erhalten

$$\int_{G'} \int k \varphi^2 dx dy = \int_G \int k M^{-1} \varphi^2 dx' dy' = 1$$

$$\int_G \int k \varphi v_i dx dy = \int_{G'} \int k M^{-1} \varphi v_i dx' dy' = 0, \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Ersetzen wir also die Funktionen v_i durch $v'_i = v_i M^{-1}$ und multiplizieren die Funktion φ mit einem — bei kleinem ε von 1 beliebig wenig verschiedenen — konstanten Faktor, so daß für die neu entstehende Funktion φ' die Relationen

$$\int_{G'} \int k \varphi'^2 dx' dy' = 1,$$

$$\int_{G'} \int k \varphi' v'_i dx' dy' = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

gelten, so wird erstens

$$\mathfrak{D}[\varphi] = (1 + \delta) \mathfrak{D}'[\varphi'],$$

wobei δ eine mit ε gegen Null konvergierende Zahl ist; zweitens genügt die Funktion φ als Funktion von x', y' in G' aufgefaßt den Bedingungen des Maximum-Minimum-Problems, welches den n -ten Eigenwert von G' charakterisiert, wobei die Funktionen $v'_i = M^{-1} \cdot v_i$ die Rolle der Funktionen v_i in G spielen. Da nun der Bereich sämtlicher zulässiger Funktionensysteme v'_i zugleich mit dem der Funktionensysteme v_i durchlaufen wird, so folgt, daß auch das Maximum-Minimum der linken Seite sich von dem der rechten nur um einen — mit gegen Null konvergierenden ε — gegen 1 konvergierenden Faktor unterscheiden kann. Damit aber ist Satz 13 bewiesen. Wir erkennen gleichzeitig aus der obigen Entwicklung, daß dieser Satz sich folgendermaßen präzisieren läßt:

Zusatz zu Satz 13. Wenn ein Gebiet G' in ein Gebiet G durch die Transformation (27) übergeht und dabei $\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| < \varepsilon$ ist, unter ε eine beliebig kleine positive Zahl verstanden, so gibt es eine nur von ε abhängige, mit ε zugleich gegen Null konvergierende Zahl η derart, daß die n -ten Eigenwerte μ_n, μ'_n der Gebiete G und G' für irgendwelche der betrachteten Randbedingungen und jedes n der Beziehung

$$\left| \frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1 \right| < \eta$$

genügen.

Für die Randbedingung $u = 0$, bei welcher keinerlei normale Ableitung auftritt, gilt naturgemäß der Stetigkeitssatz im weiteren Umfange:

Satz 14. *Der n -te Eigenwert der Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ für die Randbedingung $u = 0$ ist auch dann noch eine stetige Funktion des Gebietes G , wenn bei der stetigen Deformation des Gebietes die Stetigkeit der Veränderung der Normalen nicht mehr gefordert wird.*

Man kann nämlich die Ränder zweier Gebiete G und G' , welche hinreichend benachbart sind, ohne daß in benachbarten entsprechenden Randpunkten auch die Normalen benachbarte Richtungen besitzen müssen, stets zwischen die Ränder zweier im engeren Sinne hinreichend benachbarter Gebiete B und B' einschließen. Da nun der n -te Eigenwert für die Randbedingung $u = 0$ nach Satz 7 eine monotone Funktion des Gebietes ist, so liegen die n -ten Eigenwerte von G und G' zwischen denen von B und B' , welche nach Satz 13 ihrerseits benachbart sind. Damit ist Satz 14 bewiesen²⁰⁾.

§ 6.

Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ bei Gebieten, welche aus endlich vielen Quadraten oder Würfeln bestehen.

Unsere bisher gewonnenen Resultate und Methoden gestatten uns, fast mühelos das asymptotische Verhalten des n -ten Eigenwertes zu verfolgen. Wir wollen zunächst die Differentialgleichung (1) $\Delta u + \lambda u = 0$ betrachten und voraussetzen, daß das Gebiet G aus endlich vielen, etwa h , kongruenten Quadraten, bzw. im Falle von drei unabhängigen Variablen Würfeln der Seitenlänge a besteht. Wir werden solche Gebiete als „Quadratgebiete“ bzw. „Würfelgebiete“ bezeichnen. Der Flächeninhalt bzw. das Volumen von G ist dann $f = ha^2$ bzw. $V = ha^3$.

Im folgenden werden wir mit dem Buchstaben ϑ stets eine zwischen -1 und $+1$ liegende Zahl, mit dem Buchstaben c oder C eine Konstante bezeichnen und uns die Freiheit gestatten, gelegentlich, wenn ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint, die Unterscheidung verschiedener solcher Werte ϑ bzw. c oder C durch Indizes usw. fortzulassen.

Wir erinnern zunächst an die bekannte Abschätzung der Eigenwerte der Differentialgleichung (1) für ein Quadrat Q der Seitenlänge a . Hier

²⁰⁾ Falls G und G' von einem gemeinsamen inneren Punkte aus konvex sind, so kann man für B und B' zwei durch Ähnlichkeitstransformation von diesem Punkte aus ineinander übergehende Gebiete wählen, deren Eigenwerte sich verhalten wie das Quadrat des Ähnlichkeitsverhältnisses zu 1, mithin bei hinreichender Nachbarschaft der beiden Gebiete selbst beliebig nahe beieinander liegen. Man kann also in diesem Falle die Anwendung des allgemeinen Satzes 13 entbehren.

werden die Eigenfunktionen und Eigenwerte bei der Randbedingung $u = 0$ durch die Ausdrücke

$$\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a}, \quad \frac{\pi^2}{a^2}(l^2 + m^2), \quad (l, m = 1, 2, 3, \dots),$$

bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ durch die Ausdrücke

$$\cos \frac{l\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{a}, \quad \frac{\pi^2}{a^2}(l^2 + m^2) \quad (l, m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

gegeben. Bezeichnet man die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte im ersten Falle mit $A_Q(\lambda)$, im zweiten Falle mit $B_Q(\lambda)$, so sind diese Anzahlen identisch mit den Anzahlen der ganzzahligen Lösungen der Ungleichheit

$$l^2 + m^2 < \lambda \frac{a^2}{\pi^2},$$

wobei im ersten Falle $l > 0$, $m > 0$, im zweiten $l \geq 0$, $m \geq 0$ vorgeschrieben ist. Durch *Abzählung der Gitterpunkte im ersten* Quadranten des um den Nullpunkt des Koordinatensystems mit dem Radius $\frac{a}{\pi} \sqrt{\lambda}$ geschlagenen Kreises erhält man für hinreichend großes λ sofort

$$(28) \quad A_Q(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + \vartheta ca \sqrt{\lambda}, \quad B_Q(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + \vartheta' ca \sqrt{\lambda}.$$

Hierbei ist c eine numerische von λ und a unabhängige Konstante.

Es sei nun $A(\lambda)$ die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für das Gebiet G und die Randbedingungen $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, oder auch die allgemeinere Randbedingung vom Typus (4), wobei jedoch zunächst $\sigma \geq 0$ vorausgesetzt werde. Bezeichnen wir mit $A_{Q_1}(\lambda)$, $A_{Q_2}(\lambda)$, ..., $A_{Q_h}(\lambda)$ die entsprechenden Anzahlen für die Teilquadrate bei der Randbedingung $u = 0$, mit $B_{Q_1}(\lambda)$, $B_{Q_2}(\lambda)$, ..., $B_{Q_h}(\lambda)$ diese Anzahlen bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, so besagt Satz 9 in Verbindung mit Satz 6 und 8

$$A_{Q_1}(\lambda) + \dots + A_{Q_n}(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B_{Q_1}(\lambda) + \dots + B_{Q_n}.$$

Da aber diese Anzahlen $A_{Q_i}(\lambda)$, $B_{Q_i}(\lambda)$ übereinstimmend durch die Gleichungen (28) gegeben werden, so schließen wir

$$(29) \quad A(\lambda) = \frac{f}{4\pi} \lambda + \vartheta ca \sqrt{\lambda}.$$

Mit anderen Worten, es gilt folgender Satz:

Satz 15. Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für ein Quadratgebiet

vom Flächeninhalt f ist bei allen oben betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich

$$\frac{f}{4\pi} \lambda,$$

d. h. es gilt

$$(30) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{f\lambda} = \frac{1}{4\pi}.$$

Genauer besteht für alle hinreichend großen λ die Beziehung

$$\left| \frac{4\pi A(\lambda)}{f\lambda} - 1 \right| < \frac{C}{\sqrt{\lambda}},$$

wo C eine von λ unabhängige Konstante bedeutet.

Bezeichnet man mit ϱ_n den n -ten zu einer der betrachteten Randbedingungen gehörigen Eigenwert, so ist die Aussage dieses Satzes bzw. der Gleichung (29) äquivalent mit der Gleichung

$$(31) \quad \varrho_n = \frac{4\pi}{f} n + \vartheta c \sqrt{n}$$

wo wieder ϑ einen echten Bruch, c eine von n unabhängige Konstante bedeutet. Man braucht, um dies einzusehen, nur in (29) $A(\varrho_n) = n$ zu setzen.

Die Gültigkeit des Satzes 15 bleibt bestehen, auch wenn etwa in der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ die Funktion σ negative Werte annehmen kann. Wir schließen dies wiederum mit Hilfe des Hilfssatzes aus § 2.

Vorab bemerken wir, daß nach Satz 9 der n -te Eigenwert μ_n bei der betrachteten Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ jedenfalls nicht größer als der n -te Eigenwert λ_n bei der Randbedingung $u = 0$ sein kann. Wir dürfen also von vornherein voraussetzen, daß der Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\varphi] = D[\varphi] + \int_R p \sigma \varphi^2 ds,$$

dessen Maximum-Minimum ja μ_n ist, die Grenze λ_n für keine der zur Konkurrenz in dem Variationsproblem zugelassenen Funktionen φ übersteigt; die Lösung des Maximum-Minimum-Problems wird dadurch nicht geändert.

Nun ist nach dem Hilfssatz

$$\left| \int_R p \sigma \varphi^2 ds \right| < c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} + c_2,$$

wobei c_1, c_2 numerische Konstante bedeuten; es wird also

$$D[\varphi] - c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} - c_2 < \mathfrak{D}[\varphi] < D[\varphi] + c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} + c_2.$$

Aus der Annahme $\mathfrak{D}[\varphi] \leq \lambda_n$ folgt

$$D[\varphi] - c_1 \sqrt{|D[\varphi]|} - c_2 < \lambda_n,$$

und hieraus wiederum ergibt sich, daß $D[\varphi]$ mit n nicht stärker wachsen kann als λ_n , d. h. daß eine Relation der Form

$$D[\varphi] < c_3 \lambda_n$$

gelten muß, unter c_3 wiederum eine feste Konstante verstanden. Mithin wird, da ja die Beziehung (31) für $\varrho_n = \lambda_n$ gilt, unter den über φ gemachten Voraussetzungen

$$D[\varphi] - c_4 \sqrt{n} < \mathfrak{D}[\varphi] < D[\varphi] + c_4 \sqrt{n},$$

und diese Beziehung gilt somit für die unteren Grenzen der Ausdrücke $\mathfrak{D}[\varphi]$ und $D[\varphi]$ bei gegebenen Funktionen v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , mithin auch für die Maxima dieser unteren Grenzen. Dieses Maximum ist für $D[\varphi]$ der n -te zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörige Eigenwert, für den die Beziehung (31) schon bewiesen ist. Daher folgt sie nun unmittelbar auch für das Maximum der unteren Grenze von $\mathfrak{D}[\varphi]$, den betrachteten n -ten Eigenwert μ_n bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$, und diese Beziehung ist mit der Aussage von Satz 15 gleichbedeutend.

Wenn statt zweier unabhängiger Variablen drei vorliegen, so ändern sich in der ganzen Betrachtung nur die Ausdrücke $A_Q(\lambda)$, $B_Q(\lambda)$ für die Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte bei den Randbedingungen $u = 0$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, und zwar wird

$$A_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} a^3 \lambda^{\frac{3}{2}} + \vartheta c a^2 \lambda, \quad B_Q(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} a^3 \lambda^{\frac{3}{2}} + \vartheta c a^2 \lambda.$$

Somit erhalten wir jetzt das Resultat:

Satz 16. Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für ein aus endlich vielen kongruenten Würfeln bestehendes Polyeder vom Rauminhalt V ist bei allen betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{V}{6\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}}$, d. h. es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{V \lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\pi^2}.$$

Genauer besteht bei hinreichend großem λ die Formel

$$\left| \frac{6\pi^2 A(\lambda)}{V \lambda^{\frac{3}{2}}} - 1 \right| < C \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

wobei C eine von λ unabhängige Konstante ist²¹⁾.

²¹⁾ Eine schärfere allgemeine Abschätzung des bei der asymptotischen Abschätzung von $A(\lambda)$ gemachten Fehlers ist allgemein nicht möglich, da beim Quadrat, bzw. beim Würfel die angegebene Größenordnung des Fehlers wirklich erreicht wird.

§ 7.

Ausdehnung des Resultates auf die allgemeine Differentialgleichung
 $L(u) + \lambda k u = 0.$

Um die gewonnenen Sätze über die asymptotische Eigenwertverteilung auf die allgemeine elliptische, sich selbst adjungierte Differentialgleichung (5) zu übertragen, denken wir uns die Quadrateinteilung bzw. Würfeleinteilung des Gebietes G durch mehrfach fortgesetzte Halbierung der Seitenlänge a so verfeinert, daß in jedem der entstehenden Elementargebiete die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert der Funktionen p bzw. k unterhalb einer vorgegebenen hinreichend kleinen positiven Zahl ε bleibt. Wir beachten ferner, daß die Funktion q auf die asymptotische Eigenwertverteilung überhaupt keinen Einfluß ausüben kann, da der Ausdruck $\mathfrak{D}[\varphi]$ und mit ihm sein Maximum-Minimum sich bei Streichung der Funktion q nur um einen beschränkten Betrag ändert, nämlich um weniger als $\frac{|q|_{max}}{k_{min}}$, wie oben (z. B. S. 8) unmittelbar aus der Relation (15) gefolgert wurde; $|q|_{max}$ und k_{min} bedeuten dabei die entsprechenden Extremwerte der Funktionen im Gebiete G . Wir nehmen demgemäß in den folgenden Entwicklungen $q = 0$ an.

Die weitere Betrachtung werde für den Fall eines ebenen Gebietes G durchgeführt. Die Anzahl der Quadrate, aus denen G besteht, sei wiederum h , ihre Seitenlänge a , mit $A'(\lambda)$ werde die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $L(u) + \lambda k u = 0$ bezeichnet, wobei als Randbedingung irgendeine der betrachteten genommen werden kann, die Bedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$ jedoch zunächst unter der beschränkenden Voraussetzung $\sigma \geq 0$. Die Teilquadrate bezeichnen wir mit Q_1, Q_2, \dots, Q_h , die zugehörigen Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung für die Randbedingung $u = 0$ mit $A'_{Q_1}(\lambda), \dots, A'_{Q_h}(\lambda)$, für die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ mit $B'_{Q_1}(\lambda), \dots, B'_{Q_h}(\lambda)$. Nach Satz 6, 8 und 9 ist wieder

$$A'_{Q_1}(\lambda) + \dots + A'_{Q_h}(\lambda) \leq A'(\lambda) \leq B'_{Q_1}(\lambda) + \dots + B'_{Q_h}(\lambda).$$

Nun folgt aus Satz 11

$$A'_{Q_i}(\lambda) \geq \frac{k_M^{(i)}}{p_M^{(i)}} A_{Q_i}(\lambda), \quad B'_{Q_i}(\lambda) \leq \frac{k_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} B_{Q_i}(\lambda),$$

wenn mit $p_M^{(i)}, k_M^{(i)}$ die Maxima, mit $p_m^{(i)}, k_m^{(i)}$ die Minima der betreffenden Funktionen in dem Quadrate Q_i bezeichnet werden und $A_{Q_i}(\lambda), B_{Q_i}(\lambda)$ wie im vorigen Paragraphen die durch die Gleichungen (28) gegebenen Anzahlen der entsprechenden Eigenwerte für die Differentialgleichung

$\Delta u + \lambda u = 0$ bedeuten. Denn ersetzt man in der Differentialgleichung (5) p durch $p_M^{(i)}$, k durch $k_m^{(i)}$, so wird nach Satz 11 jeder der Eigenwerte vergrößert, oder jedenfalls nicht verkleinert, ihre Anzahl unterhalb einer Grenze λ also verkleinert oder nicht vergrößert. Andererseits geht dabei die Differentialgleichung (5) in die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda \frac{k_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} u = 0$ über, deren Eigenwerte die mit $\frac{p_M^{(i)}}{p_m^{(i)}}$ multiplizierten Eigenwerte der Differentialgleichung (1) sind. Das Entsprechende gilt, wenn p durch $p_m^{(i)}$, k durch $k_M^{(i)}$ ersetzt wird.

Ferner ist, da k und p stetige Funktionen sind,

$$\iint_G \frac{k}{p} dx dy = a^2 \sum_{i=1}^h \frac{k_m^{(i)}}{p_M^{(i)}} + \delta = a^2 \sum_{i=1}^h \frac{k_M^{(i)}}{p_m^{(i)}} + \delta',$$

wobei die Zahlen $|\delta|, |\delta'|$ beliebig klein werden, wenn nur die anfängliche Quadranteilung hinreichend fein d. h. a hinreichend klein gewählt ist. Somit ergibt sich durch Anwendung von (28) ganz ebenso wie in § 6

$$A(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{k}{p} dx dy + \lambda \delta'' + \delta c \sqrt{\lambda},$$

wo auch $|\delta''|$ beliebig ist, und dies ist nichts anderes als folgende Aussage über die asymptotische Eigenwertverteilung:

Satz 17. Die Anzahl $A(\lambda)$ der zur Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte eines Quadratgebietes G ist für jede der betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{k}{p} dx dy$, d. h. es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda \iint_G \frac{k}{p} dx dy} = \frac{1}{4\pi}.$$

Die ursprüngliche Voraussetzung $\sigma \geq 0$ erkennt man hier genau so wie in § 6 als überflüssig.

Dieselben Überlegungen für den Raum durchgeführt ergeben folgendes Resultat:

Satz 18. Die Anzahl der zur Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte eines Würfelgebietes G ist für alle hier betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich

$$\lambda^{\frac{3}{2}} \frac{1}{6\pi^3} \iiint_G \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz,$$

d. h. es gilt die Relation

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{6\pi^2} \iiint_G \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz.$$

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Überlegungen der beiden letzten Paragraphen sich genau ebenso für einen *allgemeineren Bereich* durchführen lassen, der aus *endlich vielen beliebigen Rechtecken bzw. Quadern* zusammengesetzt ist.

§ 8.

Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für einen beliebigen Bereich.

Um die asymptotischen Spektralgesetze der vorangehenden Paragraphen für beliebige Bereiche zu begründen, müssen wir diese Bereiche durch Quadrate bzw. Kuben von innen heraus ausschöpfen. Dabei werden wir neue Überlegungen lediglich anzustellen haben, um den Einfluß des bei jeder Approximation übrigbleibenden Randstreifens abzuschätzen.

Zunächst setzen wir voraus, daß G ein ebener Bereich sei, dessen Rand überall stetig gekrümmt ist, und betrachten ferner nur die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$.

Wir schicken eine Reihe von Vorbemerkungen voraus, welche sich auf die zu dieser Differentialgleichung und zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte, bzw. die Anzahl derselben unterhalb einer gegebenen Grenze für gewisse einfache Gebiete beziehen.

Sei zunächst G ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck mit der Kathete a . Jede Eigenfunktion des Dreiecks ist auch Eigenfunktion des durch Spiegelung an der Hypothenuse entstehenden Quadrates für dieselbe Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Denn man erkennt ohne weiteres, daß sich die Eigenfunktion in das gespiegelte Dreieck fortsetzen läßt, indem man spiegelbildlich zur Hypothenuse gelegenen Punkten denselben Funktionswert zuweist; dabei wird die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf dem ganzen Rande des Quadrates erfüllt. Der n -te Eigenwert des Dreiecks ist also zugleich Eigenwert des Quadrates, mithin ist der n -te Eigenwert des Quadrates sicher nicht größer als der des Dreiecks, oder die *Anzahl der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte für das Dreieck bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ ist höchstens gleich der entsprechenden Anzahl für das Quadrat*, d. h. der durch Formel (28) angegebenen Zahl.

Sei zweitens G ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und b , wobei $b < a$ vorausgesetzt werde. Die Kathete a falle

in die x -Achse, die Kathete b in die y -Achse. Wir transformieren durch die Transformation $\xi = x$, $\eta = \frac{a}{b} y$ das Dreieck G in ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck G' mit der Kathete a . Hierbei transformiert sich der Ausdruck $D[\varphi]$ in

$$D[\varphi] = \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{b}{a} d\xi d\eta$$

und die Nebenbedingung (15) in

$$\iint_{G'} \varphi^2 \frac{b}{a} d\xi d\eta = 1,$$

während die andern Nebenbedingungen (23) aus § 3 bei der Transformation ihre Gestalt überhaupt nicht ändern. Wir können also unter Weglassung des unwesentlichen in beiden Integralen auftretenden konstanten Faktors $\frac{b}{a}$ den n -ten Eigenwert κ_n des Dreiecks G als das Maximum-Minimum des über G' erstreckten Integrales

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta$$

charakterisieren, wobei im übrigen das Maximum-Minimum ganz im ursprünglichen Sinne zu verstehen ist. Da nun sicherlich wegen $\frac{a}{b} \geq 1$

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \geq \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta$$

gilt, so ist auch das Maximum-Minimum der linken Seite größer oder gleich dem der rechten Seite, d. h. dem n -ten Eigenwert für das rechtwinklige gleichschenklige Dreieck G' , also erst recht größer als der n -te Eigenwert eines Quadrates der Seite a . *Mithin ist bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ die Anzahl der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten kleiner als a sicher nicht größer als die entsprechende Anzahl der Eigenwerte für das Quadrat der Seite a und also erst recht für jedes größere Quadrat.*

Ebenso ist die Anzahl der Eigenwerte für ein beliebiges Rechteck unterhalb einer Grenze sicher nicht größer als die entsprechende Anzahl für ein Quadrat, dessen Seite mindestens gleich der größeren Rechtecksseite ist.

Aus diesen Tatsachen in Verbindung mit Satz 8 erhält man ohne weiteres die Möglichkeit, die Anzahl der Eigenwerte unterhalb einer gegebenen Grenze nach oben abzuschätzen, wenn das betrachtete Gebiet

aus einer endlichen Anzahl von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt ist.

Diese Bemerkungen wenden wir an, um den *Einfluß des Randstreifens*, der bei einer Ausschöpfung von G durch Quadrate übrigbleibt, auf die Eigenwertverteilung zu beurteilen. Hierzu muß zuerst dieser Randstreifen definiert werden. Wir nehmen an, es sei, nötigenfalls durch mehrmalige Halbierung der Seitenlänge, die Quadrateinteilung der Ebene so fein geworden, daß bei jedem in einem der Quadrate liegenden Randstücke von G die Normale sich um weniger als einen vorgegebenen kleinen Winkel η dreht, über dessen Kleinheit wir uns die Verfügung vorbehalten. Wir können dann, wie in der Figur 2, den Rand R durch eine Anzahl r aneinander anschließender Elementargebiete E_1, E_2, \dots, E_r folgender Art begleiten: Jedes Gebiet E ist entweder begrenzt von zwei zueinander senkrechten Geraden AB, AC der Quadrateinteilung, deren Länge zwischen a und $3a$ liegt, und einem Stück BC des Randes (Fig. 3), oder es ist begrenzt von einer Seite AB der Quadrateinteilung, zwei dazu senkrechten Strecken AC, BD mit Längen zwischen a und $3a$ und einem Stück CD des Randes (Fig. 4). Aus r solchen Gebieten setzen wir einen Randstreifen S zusammen, so daß nach Abtrennung desselben von G ein Quadratpolygon, bestehend aus h Quadraten Q_1, Q_2, \dots, Q_h übrig bleibt. Die Anzahl r ist offenbar kleiner als eine von a unabhängige, wesentlich von der Länge des Randes abhängende Konstante C dividiert durch a .

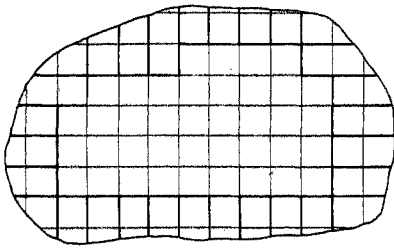


Fig. 2.

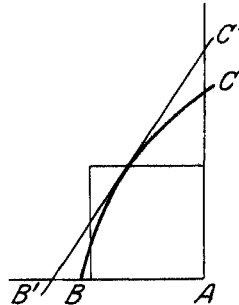


Fig. 3.

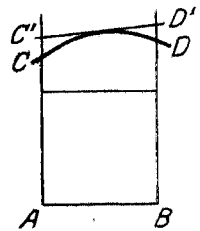


Fig. 4.

Um die Anzahl $B_E(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen zur Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte eines der Gebiete E nach oben abzuschätzen, haben wir wieder für den n -ten Eigenwert eine untere Grenze aufzusuchen. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch einen beliebigen Punkt des krummlinigen Randstückes von E die Tangente. Diese begrenzt zusammen mit den geradlinigen Randstücken von E ein Gebiet vom Typus $AB'C'$ (Fig. 3),

d. h. bei hinreichend kleinem η ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten kleiner als $4a$ oder ein Trapez vom Typus $ABC'D'$, bei dem ebenfalls die Seiten AC' , BD' kleiner als $4a$ sind (Fig. 4), je nachdem, welchem Typus das Gebiet E angehört. Die Gebiete $AB'C'$ bzw. $ABC'D'$ wollen wir mit E' bezeichnen. Nun kann man das Gebiet E stets in das Gebiet E' durch eine Transformation von der Form (27) überführen, wie sie in § 4 betrachtet wurde. Bei Gebieten des ersten Typus sei etwa A der Pol eines Polarkoordinatensystems mit den Koordinaten ϑ , ϱ , und sei $\varrho = f(\vartheta)$ die Gleichung der krummen Linie BC , $\varrho = g(\vartheta)$ die Gleichung der Geraden $B'C'$. Dann wird durch die Gleichungen

$$\vartheta' = \vartheta, \quad \varrho' = \varrho \frac{g(\vartheta)}{f(\vartheta)}$$

die Transformation des krummlinigen Dreiecks E auf das geradlinige E' vermittelt. Im Falle des zweiten Typus $ABCD$ liege AB in der x -Achse, $y = g(x)$ sei die Gleichung der Geraden $C'D'$ und $y = f(x)$ die Gleichung der krummen Linie CD . Dann betrachten wir die Transformation

$$x' = x, \quad y' = y \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Wenn wir voraussetzen, daß die zugrunde gelegte Strecke a hinreichend klein, also auch die totale Drehung der Tangente an dem Kurvenbogen CB bzw. CD hinreichend klein genommen wird, so haben offenbar die hier betrachteten Transformationen genau die Gestalt (27), und die dort mit ε bezeichnete Größe wird beliebig klein. Nach Zusatz zu Satz 13 unterscheiden sich dann aber die entsprechenden n -ten Eigenwerte für die Gebiete E und E' nur um einen für alle n gleichmäßig wenig von 1 verschiedenen Faktor. Mithin gilt dasselbe auch für die entsprechenden Anzahlen $B_E(\lambda)$ und $B_{E'}(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen zur Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gehörigen Eigenwerte.

Da nun das Gebiet E' entweder ein rechtwinkliges Dreieck mit Seiten kleiner als $4a$ ist, oder sich aus einem solchen Dreieck und einem Rechteck mit Seiten kleiner als $3a$ zusammensetzt, so folgt, sobald nur a hinreichend klein genommen ist, jedenfalls für die Anzahl $B_{E'}(\lambda)$ von einem gewissen λ ab

$$(33) \quad B_{E'}(\lambda) < c_3 a^2 \lambda + c_4 a \sqrt{\lambda},$$

wo c_1 , c_2 geeignet zu wählende numerische Konstanten bedeuten.

Nunmehr sind wir in der Lage, für das Gebiet G die asymptotischen Eigenwertgesetze zu beweisen. Es sei also $A(\lambda)$ wieder die Anzahl der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte unserer Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für das Gebiet G und irgendeine der betrachteten Rand-

bedingungen, wobei wir wieder zuerst gegebenenfalls die Voraussetzung $\sigma \geq 0$ machen. Eine Quadrateinteilung der Ebene durch Quadrate mit der Seitenlänge a führe zu einer Zerlegung des Gebietes G in h Quadrate Q_1, Q_2, \dots, Q_h und r Randgebiete E_1, E_2, \dots, E_r . Wie früher bezeichnen wir die Anzahlen der zu den Quadraten gehörigen unterhalb λ liegenden Eigenwerte mit $A_i(\lambda)$ bzw. $B_i(\lambda)$, je nachdem die Randbedingung $u = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ gestellt ist. Mit $A_{E_i}(\lambda)$ bzw. $B_{E_i}(\lambda)$ werden die entsprechenden Zahlen für die Gebiete E_i bezeichnet; (von den letzteren brauchen wir jedoch nur die Zahlen $B_{E_i}(\lambda)$).

Gemäß den Gleichungen (28) ist

$$A_i(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + a \vartheta_1 c_1 \sqrt{\lambda}, \quad B_i(\lambda) = \frac{a^2}{4\pi} \lambda + a \vartheta_2 c_2 \sqrt{\lambda},$$

und nach dem Vorgehenden gilt

$$B_{E_i}(\lambda) = \vartheta_3 (c_3 \lambda a^2 + a c_4 \sqrt{\lambda}),$$

wobei, wie stets, mit $\vartheta, \vartheta_1, \dots$ echte Brüche, mit c_1, c_2, \dots irgendwelche von a und λ unabhängige Konstanten bezeichnet werden.

Nach Satz 6 und Satz 8, 9 ist

$$A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + \dots + A_h(\lambda) \leq A(\lambda) \leq B_1(\lambda) + \dots + B_h(\lambda) \\ + B_{E_1}(\lambda) + \dots + B_{E_r}(\lambda),$$

ferner ist jedenfalls

$$A_1(\lambda) + \dots + A_h(\lambda) = \frac{h a^2}{4\pi} \lambda + \vartheta_1 c_1 h a \sqrt{\lambda} = \lambda \left(\frac{h a^2}{4\pi} + \frac{\vartheta_1 c_1 h a}{\sqrt{\lambda}} \right), \\ B_1(\lambda) + \dots + B_h(\lambda) + B_{E_1}(\lambda) + \dots + B_{E_r}(\lambda) \\ = \frac{h a^2}{4\pi} \lambda + \vartheta_2 c_2 h a \sqrt{\lambda} + \vartheta_3 r a^2 \lambda c_3 + \vartheta_3 r a c_4 \sqrt{\lambda} \\ = \lambda \left[\left(\frac{h a^2}{4\pi} + \vartheta_3 r a^2 \right) + (h a \vartheta_2 c_2 + r a \vartheta_3 c_4) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right].$$

Da nun $ar < c_6$, also $a^2 r$ bei hinreichend kleinem a beliebig klein ist, da ferner bei hinreichend kleinem a für jedes noch so kleine δ gilt

$$|h a^2 - f| < \delta,$$

so folgt aus diesen Ungleichungen unmittelbar das asymptotische Gesetz

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1.$$

Denn wir haben die Größe a frei zur Verfügung und können, etwa indem wir ein festes hinreichend kleines a wählen, die Faktoren von λ in den obigen Ungleichungen für hinreichend große λ beliebig nahe an den Wert $\frac{f}{4\pi}$ bringen.

Auch wenn wir die Voraussetzung $\sigma \geq 0$ fallen lassen, erhalten wir nunmehr dasselbe asymptotische Gesetz durch die schon mehrfach ausgeführte Anwendung des Hilfssatzes in § 2 mittels derselben Schlüsse, wie sie an analoger Stelle in § 6 ausgeführt wurden. Zusammengefaßt ergibt sich also das Resultat:

Satz 19. *Bei allen betrachteten Randbedingungen ist die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ für das Gebiet G asymptotisch gleich $\frac{\lambda f}{4\pi}$, d. h. es gilt*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f} = 1,$$

wobei f den Flächeninhalt des Gebietes bedeutet.

Beim Beweise hatten wir zunächst angenommen, daß der Rand R von G keine Ecken besitzt. Die Überlegungen sowie das Resultat bleiben jedoch vollständig unverändert, wenn Ecken in endlicher Anzahl zugelassen werden. Man zerlege dann das Gebiet durch gerade Linien, welche durch die Ecken gehen, ohne dort die Äste der Randkurve zu berühren, und wende auf die Teilgebiete die Überlegungen dieses Paragraphen unverändert an.

Ebenso bleiben die vorangehenden Überlegungen gültig, wenn statt der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ die allgemeinere Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ zugrunde gelegt wird. Es ergibt sich genau in derselben Weise wie in § 7 als Resultat

Satz 20. *Die Anzahl $A(\lambda)$ der zur Differentialgleichung $L(u) + \lambda ku = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte des Gebietes G ist für jede der betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{\lambda}{4\pi} \iint_G \frac{k}{p} dx dy$, d. h. es gilt*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda \iint_G \frac{k}{p} dx dy} = 1.$$

Die entsprechenden Überlegungen, wie sie hier für die Ebene durchgeführt sind, ergeben für das Eigenwertproblem im Raume die folgenden Resultate:

Satz 21. *Die Anzahl $A(\lambda)$ der zur Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ gehörigen, unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte eines räumlichen Gebietes G mit dem Volumen V ist für alle betrachteten Randbedingungen asymptotisch gleich $\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} V$, d. h. es gilt*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{6\pi^2 A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}} V} = 1.$$

Satz 22. Die entsprechende Anzahl für die allgemeinere Differentialgleichung $L(u) + \lambda k u = 0$ ist asymptotisch gleich $\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} \iiint_G \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz$, d. h. es gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{6\pi^2 A(\lambda)}{\lambda^{\frac{3}{2}} \iiint_G \left(\frac{k}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy dz} = 1.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß G von endlich vielen Flächenstücken mit stetiger Krümmung begrenzt ist, welche sich gegenseitig nicht berühren, wohl aber Kanten bilden dürfen.

§ 9.

Die Gesetze der asymptotischen Eigenwertverteilung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ in verschärfter Form.

Unsere Theorie gibt uns die Möglichkeit, die in den obigen Sätzen ausgesprochenen asymptotischen Eigenwertgesetze noch weiter zu präzisieren, d. h. eine *Abschätzung für den Fehler* zu finden, den wir machen, wenn wir den Ausdruck $A(\lambda)$ durch den gefundenen asymptotischen Wert ersetzen. Wir wollen die Untersuchung für die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ durchführen.

Zu diesem Zwecke brauchen wir nur die bei der Exhaustion des Gebietes G durch Elementarquadrate bzw. Würfel gegebenen Möglichkeiten besser auszunutzen, indem wir diese Gebiete nicht zahlreicher und kleiner als nötig annehmen. Sei zunächst G ein ebenes Gebiet. Wir bauen es folgendermaßen auf²³⁾: Zuerst wird eine Quadrateinteilung der Ebene etwa mit der Seitenlänge 1 zugrunde gelegt. Es mögen hiervon die h_0 Quadrate $Q_1^0, Q_2^0, \dots, Q_{h_0}^0$ ganz ins Innere von G fallen. Sodann werden sämtliche Quadrate in vier kongruente Quadrate von der Seitenlänge $\frac{1}{2}$ zerlegt. Von diesen Quadraten mögen h_1 Quadrate $Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_{h_1}^1$ ins Innere von G , aber nicht ins Innere eines der Quadrate Q_i^0 fallen. Nunmehr wird die Quadrateinteilung wiederum durch Halbierung der Seitenlänge verfeinert, und man gelangt zu h_2 neuen Quadraten $Q_1^2, Q_2^2, \dots, Q_{h_2}^2$ mit der Seitenlänge $\frac{1}{2^2}$, welche im Innern von G liegen, aber keinem der früheren Quadrate Q_i^0 oder Q_i^1 angehören, usw. Nach t Schritten gelangt man zu h_t Quadraten $Q_1^t, Q_2^t, \dots, Q_{h_t}^t$ der Seitenlänge $\frac{1}{2^t}$. Gemäß den Vorschriften des vorigen Paragraphen richten wir es so ein, daß der Exhaustionsrest aus r Elementar-

²³⁾ Vgl. zu den folgenden Ausführungen H. Weyl C 3, S. 196–200.

gebieten E_1, E_2, \dots, E_r der dort definierten Art besteht, wobei die dort mit a bezeichnete Zahl gleich $\frac{1}{2^t}$ zu setzen ist.

Für die Zahlen h_i und r gelten bei unseren Voraussetzungen über den Rand die Beziehungen

$$(34) \quad h_i < 2^t \cdot c, \quad r < 2^t \cdot c,$$

wobei c eine von i und t unabhängige wesentlich durch die Länge des Randes bedingte Konstante ist²³⁾.

Wir bezeichnen wieder die Anzahlen der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte für die Gebiete Q_m^i, E_m mit $A_m^i(\lambda), A_{E_m}(\lambda)$, wenn die Randbedingung $u = 0$, mit $B_m^i(\lambda), B_{E_m}(\lambda)$, wenn die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ zugrunde gelegt ist. Jedenfalls gilt nach Satz 6, 8, 9, wenn gegebenenfalls die Funktion σ in der Randbedingung nicht negativ ist,

$$(35) \quad A(\lambda) \leq (B_1^0 + B_2^0 + \dots + B_{h_0}^0) + \dots + (B_1^t + B_2^t + \dots + B_{h_t}^t) \\ + (B_{E_1} + B_{E_2} + \dots + B_{E_r}),$$

$$(36) \quad A(\lambda) \geq (A_1^0 + A_2^0 + \dots + A_{h_0}^0) + \dots + (A_1^t + A_2^t + \dots + A_{h_t}^t).$$

Nun ist die rechte Seite der ersten dieser Ungleichungen zufolge der Gleichungen (28) und der Gleichung (33) des vorigen Paragraphen gleich

$$\frac{1}{4\pi} \left(h_0 + \frac{h_1}{2^2} + \frac{h_2}{2^4} + \dots + \frac{h_t}{2^{2t}} + \frac{r \vartheta_1 c}{2^{2t}} \right) \lambda + \vartheta_1 c_1 \left(h_0 + \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2^2} + \dots + \frac{h_t}{2^t} + \frac{r}{2^t} \right) \sqrt{\lambda},$$

also folgt, da

$$h_0 + \frac{h_1}{2^2} + \dots + \frac{h_t}{2^{2t}} = f - \vartheta_2 c_2 \frac{r}{2^{2t}},$$

ist, mit Rücksicht auf (34), daß diese rechte Seite die Gestalt hat

$$\frac{1}{4\pi} \left(f + \frac{c \vartheta_2 c_2}{2^t} \right) \lambda + \vartheta_4 c_4 (t+2) \sqrt{\lambda}.$$

Somit ergibt sich für diesen Ausdruck schließlich die bei hinreichend großem λ gültige Ungleichung

$$(37) \quad (B_1^0 + \dots + B_{h_0}^0) + \dots + (B_{E_1} + \dots + B_{E_r}) \leq \frac{f}{4\pi} \lambda + C \left(\frac{\lambda}{2^t} + t \sqrt{\lambda} \right),$$

in welcher, wie immer, mit dem Buchstaben C eine von λ und t unabhängige Konstante gemeint ist.

Wählen wir nun die Zahl t , welche ganz in unserem Belieben steht, so, daß die beiden Summanden in der Klammer annähernd gleich werden,

²³⁾ Diese Ungleichheiten drücken aus, daß der Gesamtumfang der Quadrate Q^i bzw. Q^t die Größenordnung des Umfanges von G nicht übersteigt.

nämlich t etwa gleich der größten ganzen in $\frac{1}{2} \frac{\log \lambda}{\log 2}$ enthaltenen Zahl, so folgt aus (35) und (37)

$$(38) \quad A(\lambda) \leq \frac{f}{4\pi} \lambda + \text{Const} \sqrt{\lambda} \cdot \log \lambda.$$

Genau dieselbe Gestalt ergibt sich für die untere Schranke des Ausdruckes $A(\lambda)$.

Diese Überlegungen gelten zunächst nur, wenn gegebenenfalls die in der Randbedingung auftretende Funktion σ nirgends negativ wird, weil nur dann die Ungleichung (36) gesichert ist. Doch zeigt genau dieselbe Überlegung wie in § 6 auf Grund des Hilfssatzes aus § 2, daß auch bei Verzicht auf die einschränkende Bedingung die Grenzen in der obigen Form bestehen bleiben. Wir erhalten also allgemein das schärfere asymptotische Gesetz.

Satz 23. *Für alle betrachteten Randbedingungen strebt die Differenz*

$$A(\lambda) - \frac{f}{4\pi} \lambda$$

mit wachsendem λ sicher nicht stärker gegen ∞ als der Ausdruck

$$\sqrt{\lambda} \log \lambda.$$

Dieselben Überlegungen, für den Raum durchgeführt, ergeben

Satz 24. *Für alle betrachteten* Randbedingungen strebt bei dem Problem für ein räumliches Gebiet vom Volumen V die Differenz*

$$A(\lambda) - \frac{V}{6\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}}$$

mit wachsendem λ nicht stärker gegen ∞ als der Ausdruck

$$\lambda \log \lambda.$$

§ 10.

Vektorielle Randwertaufgaben. Das Gesetz der asymptotischen Eigenwertverteilung für die elektrischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes.

Die in dieser Abhandlung entwickelten Methoden lassen sich unverändert auch auf solche Randwertaufgaben anwenden, bei denen nicht eine einzelne Funktion, sondern ein System von Funktionen, etwa ein Vektor, bestimmt wird. Die wichtigste dieser Aufgaben, welche ursprünglich mit den Anstoß zu den Untersuchungen über asymptotische Eigenwertverteilung gegeben hat, ist die *Randwertaufgabe der Hohlraumstrahlung*, d. h. für uns die Frage nach der Verteilung der elektrischen Eigenschwingungen

eines Hohlraumes. Wir wollen unsere Methode an diesem Fall durchführen und werden dabei erkennen, daß wir das Problem nur sinngemäß in unseren Gedankenkreis einzuordnen brauchen, um ohne Mühe das asymptotische Eigenwertgesetz zu erhalten.

Zunächst haben wir das Problem geeignet zu formulieren.

Es sei G ein „Hohlraum“, d. h. ein von einer oder mehreren geschlossenen Flächen begrenzter Körper vom Volumen V . Die Begrenzungsflächen mögen aus endlich vielen durchweg stetig gekrümmten Stücken bestehen, welche Kanten miteinander bilden dürfen, ohne sich jedoch dort zu berühren. Es gelten im übrigen dieselben Bezeichnungen wie bisher. Dann werden die elektrischen Eigenschwingungen des Hohlraumes durch folgendes Eigenwertproblem charakterisiert: Es ist ein Vektor e gesucht, der in G mit seinen ersten und zweiten Ableitungen stetig ist, in G der Differentialgleichung

$$(39) \quad \Delta e + \lambda e = 0$$

für einen geeigneten Parameterwert λ genügt, der ferner in G die Bedingungen

$$(40) \quad \operatorname{div} e = 0$$

und

$$(41) \quad \iiint_G e^2 dx dy dz = 1$$

befriedigt, und der endlich am Rande normal steht.

Die Lösungen dieses Problems, welches wir einfach als „Strahlungsproblem“ oder Problem I bezeichnen wollen, heißen die *Eigenvektoren*. Die zugehörigen Eigenwerte sind im wesentlichen die Quadrate der Eigenschwingungszahlen.

Man vereinfacht sich bekanntlich²⁴⁾ dieses Problem, indem man zunächst die Bedingung (40) für das Innere fallen läßt und lediglich für den Rand R von G beibehält. Hierdurch entsteht ein neues Eigenwertproblem, welches wir als Problem II bezeichnen wollen. Ist v eine Lösung des Problems II, so folgt unmittelbar für die Größe $q = \operatorname{div} v$

$$\Delta q + \lambda q = 0,$$

d. h. entweder ist q identisch Null, oder q ist eine Lösung des früher behandelten „skalaren“ Eigenwertproblems: $\Delta q + \lambda q = 0$ im Innern, $q = 0$ am Rande. Im ersten Falle genügt $\operatorname{div} v$ also überall in G der Bedingung (40), d. h. v ist eine Lösung des Strahlungsproblems. Im zweiten Falle trifft dies nicht zu.

²⁴⁾ Vgl. H. Weyl, A, S. 470f.

Hat man umgekehrt eine Lösung q des eben betrachteten skalaren Eigenwertproblems, so erhält man, indem man $v = \text{grad } q$ setzt, eine Lösung des Problems II. Auf diese Weise ergibt sich, daß man die sämtlichen Eigenwerte des Strahlungsproblems I erhält, indem man aus der Reihe der Eigenwerte des Problems II die sicher darunter vorhandenen Eigenwerte des skalaren Problems mit der Randbedingung $q = 0$ fortstreicht. Da wir diese letzteren nach §§ 7 und 8 beherrschen, so brauchen wir uns also nur noch mit dem einfacheren Problem II zu beschäftigen:

$$\Delta v + \lambda v = 0$$

im Inneren,

$$v \text{ normal, } \quad \text{div } v = 0$$

am Rande R von G .

Die Randbedingung der Normalität von v drückt sich, wenn u, v, w die Komponenten von v und α, β, γ die Richtungskosinus der Normale am Rande sind, in der Form aus

$$u = t\alpha, \quad v = t\beta, \quad w = t\gamma,$$

wo t ein, allgemein vom Orte abhängiger, Proportionalitätsfaktor ist. Die zweite Randbedingung kann man unter Berücksichtigung der ersten in die Form setzen

$$\text{Normalkomponente von } \left(\frac{\partial v}{\partial r} - K v \right) = 0.$$

Hierbei ist K eine auf der Oberfläche R beschränkte, bis auf endliche Sprünge an den Kanten stetige Funktion, nämlich die doppelte *mittlere Krümmung der Oberfläche*²⁵⁾.

²⁵⁾ Vgl. die Ausführungen bei Weyl, C 3, S. 181. Um den Leser von anderer Literatur unabhängig zu machen, sei hier kurz ein Beweis gegeben: Wir betrachten einen Punkt P der Oberfläche R , von dem wir annehmen, daß er der Nullpunkt des Koordinatensystems sei und die z -Achse zur Normalen besitze. Die Nebenbedingung (40) lautet ausgeschrieben $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. In P ist $u = 0, v = 0, |w| = |v| = |v_y|$. In einem in Richtung der x -Achse gelegenen Nachbarpunkte P_1 finden wir den Wert u_1 von u , indem wir berücksichtigen, daß auch dort der Vektor v normal steht und bis auf Größen höherer Ordnung denselben Betrag $|w|$ hat wie in P . Die ebene Schnittkurve der $z-x$ -Ebene mit der Fläche habe in P den Krümmungsradius R_1 , dann ergibt sich sofort für den Wert von u_1 im Punkte P_1 die Größe $w \frac{ds}{R_1}$, wo ds die bis auf Größen höherer Ordnung mit dx übereinstimmende Länge des Kurvenbogens PP_1 ist. An der Stelle P wird also $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{w}{R_1}$. Entsprechend gilt $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{w}{R_2}$, wenn R_2 der Krümmungsradius der von der $z-y$ -Ebene ausgeschnittenen Kurve in P ist. Schließlich ist $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z}$, und hieraus ergibt sich durch Addition unmittelbar die zu beweisende Tatsache.

Entsprechend den Entwicklungen von § 1 setzen wir nun unser Differentialgleichungsproblem in ein Variationsproblem um. Wir erhalten zunächst, indem wir die Greensche Formel (11) auf die einzelnen Komponenten der betrachteten Vektoren anwenden und die Resultate addieren, folgende Tatsachen:

Für zwei mit ihren Ableitungen in G stetige Vektoren \mathfrak{f} , \mathfrak{w} besteht die Greensche Formel

$$(42) \quad \iiint_G \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} \right) dx dy dz = - \iiint_G \mathfrak{f} \Delta \mathfrak{w} dx dy dz - \int_R \mathfrak{f} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \nu} d\sigma.$$

Denken wir uns nun, wie in § 1, die Eigenwerte in eine ansteigende Reihe geordnet

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$$

und bezeichnen die entsprechenden Eigenvektoren mit e_1, e_2, \dots , wobei für $i \neq k$ die Orthogonalitätsbeziehung

$$(43) \quad \iiint_G e_i e_k dx dy dz = 0$$

gilt, so erhalten wir genau wie in § 1 für den n -ten Eigenvektor e_n und den zugehörigen Eigenwert μ_n folgende *Minimaleigenschaft*: Sei \mathfrak{f} irgendein Vektor, welcher in G stetig und mit, höchstens an endlich vielen analytischen Flächenstücken sprunghaft unstetigen, im übrigen stetigen ersten Ableitungen versehen ist, welcher ferner den Bedingungen

$$\iiint_G \mathfrak{f}^2 dx dy dz = 1, \quad \iiint_G \mathfrak{f} e_i dx dy dz = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

und den Randbedingungen

$$(44) \quad \mathfrak{f} \text{ normal}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{f} = 0$$

auf R genügt, so ist

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = \iiint_G \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz + \int_R \mathfrak{f} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \nu} d\sigma \geq \mu_n,$$

wobei für $\mathfrak{f} = e_n$ das Gleichheitszeichen gilt; d. h., das Variationsproblem, den Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = D[\mathfrak{f}] + \int_R \mathfrak{f} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \nu} d\sigma$$

oder, was dem obigen zufolge dasselbe ist, den Ausdruck

$$\mathfrak{D}[\mathfrak{f}] = D[\mathfrak{f}] + \int_R K \mathfrak{f}^2 d\sigma$$

zum Minimum zu machen, wenn \mathfrak{f} den gestellten Bedingungen genügt,

besitzt den n -ten Eigenvektor e_n zur Lösung, und der Wert des Minimums ist gleich dem n -ten Eigenwert μ_n .

Diese Minimumseigenschaft gestattet sofort genau wie in § 3 die Umsetzung in eine *Maximum-Minimums-Eigenschaft*:

Es seien v_1, v_2, \dots, v_{n-1} stetige oder stückweise stetige Vektoren in G , es sei f ein Vektor, welcher den Bedingungen

$$\iiint_G f^2 dx dy dz = 1, \quad \iiint_G f v_i dx dy dz = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

und den Randbedingungen (44) unterworfen wird, im übrigen in G stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Es sei weiter $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ die untere Grenze aller Werte, welche der Ausdruck

$$\mathfrak{D}[f] = D[f] + \int_R K f^2 d\sigma$$

für alle zulässigen Vektoren f annehmen kann. Dann ist der n -te Eigenwert μ_n des Problems II das Maximum aller Werte, welche die Zahl $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ annimmt, wenn das System der $n-1$ Vektoren v_1, v_2, \dots, v_{n-1} auf alle denkbaren Weisen variiert wird. Dieser Maximum-Minimum-Wert wird angenommen für $v_1 = e_1, \dots, v_{n-1} = e_{n-1}$, $f = e_n$.

Nach diesen Vorbereitungen ergeben sich die Gesetze für die Eigenwertverteilung unseres Problems folgendermaßen: Verschärfen wir zunächst die Zulassungsbedingungen für den Vektor f in unserem Maximum-Minimum-Problem, indem wir verlangen, daß er in einer gegebenen, nachher hinreichend schmal zu wählenden, an die Oberfläche angrenzenden Schale identisch verschwindet, wodurch die gestellten Randbedingungen identisch erfüllt werden, so wird jedenfalls das einzelne Minimum $d\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ steigen oder nicht fallen, mithin auch das Maximum-Minimum.

Das durch die Verschärfung entstehende Maximum-Minimum-Problem fordert, den Ausdruck

$$D[f],$$

genommen für das aus G nach Abzug der Schale entstehende Restgebiet G' , zu einem Maximum-Minimum im selben Sinne wie oben zu machen, nur mit dem Unterschiede, daß auf dem Rande von G' für den Vektor identisches Verschwinden verlangt wird. Die Lösung dieses Problems bzw. des entsprechenden Differentialgleichungsproblems kann man nun direkt angeben. Ist nämlich u'_n die n -te Eigenfunktion des skalaren Problems für das Gebiet G' und die Randbedingung $u' = 0$, und ist λ'_n der zugehörige Eigenwert, so erhalten wir die Eigenvektoren des vektoriellen Problems als die Vektoren, deren Komponenten

$$u'_n, 0, 0; \quad 0, u'_n, 0; \quad 0, 0, u'_n$$

sind. Die zugehörigen Eigenwerte sind λ'_n , und man sieht, daß jeder dieser Werte dreifach auftritt. Da die Eigenwerte λ'_n nach Satz 14 stetig von G abhängen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 25. *Die Anzahl $A(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte des Problems II ist sicher mindestens dreimal so groß wie die entsprechende Anzahl für das skalare Problem mit der Randbedingung $u=0$.*

Um auch eine Grenze nach oben zu erhalten, nehmen wir zunächst an, daß K durchweg größer oder gleich Null ist, was jedenfalls zutrifft, wenn G von einer einzigen konvexen Fläche begrenzt wird. Dann wird sicher

$$\mathfrak{D}[f] \geq D[f].$$

Erleichtern wir nunmehr die Zulassungsbedingungen für den Vektor f in dem Variationsproblem, indem wir sämtliche Randbedingungen streichen, so erkennen wir wie oben, daß die Lösung des so entstehenden Maximum-Minimum-Problems, bei welchem das Maximum-Minimum des Ausdruckes

$$D[f]$$

zu bestimmen ist, einen jedenfalls nicht größeren Wert ergibt, als den Maximum-Minimum-Wert μ_n des ursprünglichen Problems. Genau wie oben erhalten wir aber die Eigenwerte des neuen Problems, indem wir die Eigenwerte des skalaren Problems

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

im Inneren,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

am Rande, dreifach nehmen. Wir gelangen also zu dem Ergebnis: *Unter der für K gemachten Voraussetzung ist die Anzahl der unterhalb einer Grenze gelegenen Eigenwerte des Problems II nicht größer als die dreifache Anzahl der entsprechenden Eigenwerte des skalaren Problems mit der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.*

Da die asymptotischen Eigenwertgesetze für die skalaren Probleme übereinstimmend durch den Satz 21 gegeben werden, so erhalten wir aus diesem Satze als asymptotischen Ausdruck für die Zahl $A(\lambda)$ sofort

$$3 \frac{V}{6 \pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}}$$

und aus dem Satz 24 für den Fehler die Abschätzung

$$\left| A(\lambda) - \frac{3V}{6\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}} \right| < \text{const } \lambda \log \lambda.$$

Um nun noch die über K gemachte Voraussetzung abzustreifen, brauchen

wir lediglich den Hilfssatz aus § 2 anzuwenden, welcher besagt, daß das in dem Ausdruck $\mathfrak{D}[f]$ auftretende Oberflächenintegral jedenfalls mit $D[f]$ nicht stärker ins Unendliche wachsen kann als $\sqrt{D[f]}$. Hieraus ergibt sich durch dieselbe Schlußweise wie in § 6, daß die oben gefundenen asymptotischen Ausdrücke bestehen bleiben, auch wenn K nicht durchweg positiv oder Null ist.

Berücksichtigen wir nun noch, daß die Eigenwerte des Strahlungsproblems erhalten werden, indem man aus denen des Problems II die Eigenwerte des skalaren Problems für die Randbedingung $u = 0$ fortstreicht, und beachten wieder das für diese geltende asymptotische Gesetz aus Satz 21, so gewinnen wir für das Strahlungsproblem folgendes Resultat:

Satz 26. *Für einen beliebigen Hohlraum vom Volumen V ist die Anzahl $S(\lambda)$ der unterhalb einer Grenze λ gelegenen Eigenwerte des Strahlungsproblems asymptotisch gleich*

$$\frac{V}{3\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}},$$

und zwar gilt für hinreichend großes λ die schärfere asymptotische Formel

$$\left| S(\lambda) - \frac{V}{3\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}} \right| < C \lambda \log \lambda,$$

wobei C eine von λ unabhängige positive Konstante ist.

Anhang.

Die in § 1 zu der allgemeinen Fassung der Minimaleigenschaften der Eigenfunktionen benutzten Approximationssätze bedürfen, soweit sie sich nicht aus wohlbekannten Tatsachen der Analysis unmittelbar ergeben, noch einer kurzen Begründung. Es handelt sich dabei um Fragen, welche grundsätzlich in der Variationsrechnung eine Rolle spielen und welche darauf abzielen, den Bereich der zur Konkurrenz zuzulassenden Funktionen möglichst zu erweitern, ohne daß dabei die Lösung des Variationsproblems geändert wird. Auf die allgemeine Frage hoffe ich gelegentlich an anderer Stelle zurückzukommen, während ich mich hier auf das vorliegende spezielle Problem beschränken will.

Betrachten wir das Variationsproblem des Satzes 1. Es handelt sich darum, eine Funktion φ , welche in G stetig ist, stückweise stetige erste und im Innern stückweise stetige zweite Ableitungen besitzt, am Rande verschwindet, und den Bedingungen (14), (15), genügt, durch eine ebensolche Funktion φ' zu ersetzen, die in G stetig erste, im Inneren von G stückweise stetige zweite Ableitungen besitzt, deren Dirichletsches Integral

$D[\varphi']$ sich von dem Dirichletschen Integral $D[\varphi]$ um beliebig wenig unterscheidet und für welche das über G erstreckte Integral von $L(\varphi')^2$ existiert.

Derjenige Punkt, welcher dabei hauptsächlich einige Aufmerksamkeit erfordert, ist die „Glättung“ der Funktion φ , d. h. die Ersetzung von φ durch eine in G stetig differenzierbare Funktion φ_1 . Es sei C eine solche zunächst ganz im Inneren von G gelegene „Kante“ der Funktion φ , d. h. eine Linie in G , längs deren die normalen Ableitungen von φ endliche Sprünge machen. Wir wollen zur Fixierung der Vorstellung annehmen, daß C eine geradlinige Strecke und zwar ein Stück der y -Achse ist. (Diese Voraussetzung der Geradlinigkeit von C trifft ohnehin überall in der vorangehenden Arbeit zu und ist überdies für die folgende Beweisführung ganz unerheblich.) Ferner wollen wir, was ebenfalls für die Schreibweise bequem, aber sachlich ganz unwesentlich ist, annehmen, daß wir es mit dem Differentialausdruck $L(u) = \Delta u$ und dem entsprechenden Ausdruck für $D[\varphi]$ zu tun haben.

Wird der Sprung der normalen Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ von φ beim Überschreiten der Kante C von negativem zu positivem x mit $2v(y)$ bezeichnet, dann besitzt die stetige Funktion

$$\begin{aligned} \nu(x, y) &= xv(y) & \text{für } x \geq 0, \\ \nu(x, y) &= -xv(y) & \text{für } x \leq 0 \end{aligned}$$

auf C dieselbe Unstetigkeit der normalen Ableitungen wie φ , und die Funktion $s = \varphi - \nu$ ist nebst ihren ersten Ableitungen stetig.

Nunmehr schließen wir die Strecke C durch zwei Kurven C_1, C_2 mit den Gleichungen $x = \pm h(y)$ ein, welche jedenfalls C in den Endpunkten berühren und über die noch weiter verfügt werden wird. Das Gebiet zwischen diesen beiden Kurven heiße E .

Dann wird ν durch eine Funktion ν_1 ersetzt, welche außerhalb E mit ν übereinstimmt und in E durch

$$\nu_1 = h \cdot v + \frac{x^2 - h^2}{2h} v$$

gegeben ist. Geometrisch gesprochen: es wird die Fläche der Funktion ν geglättet, indem man eine sich deformierende, normal zur Kante liegende Parabel in der Kante so gleiten läßt, daß sie dabei an den Grenzen des Gebietes E die Fläche der Funktion ν berührt.

Die Funktion $h(y)$ wird jedenfalls stetig differenzierbar gewählt; dann besitzt auch $\nu_1(x, y)$ überall stetige erste Ableitungen. Ferner wird, wenn man nur $h(y)$ überall hinreichend klein wählt, ν durch ν_1 gleich-

mäßig beliebig genau approximiert. Schließlich können wir $h(y)$ für jedes y so klein wählen, daß das Integral von

$$\left(\frac{\partial(v-v_1)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(v-v_1)}{\partial y}\right)^2$$

über E , oder was dasselbe bedeutet, über G erstreckt, beliebig klein wird. Setzen wir $\varphi_1 = s + v_1$, so ist φ_1 eine Approximation an φ , und es wird

$$D[\varphi - \varphi_1] = D[v - v_1]$$

beliebig klein. Da nun

$$D[\varphi] = D[\varphi_1] + 2D[\varphi_1, \varphi - \varphi_1] + D[\varphi - \varphi_1]$$

und

$$D[\varphi, \varphi - \varphi_1]^2 \leq D[\varphi] \cdot D[\varphi - \varphi_1]$$

ist, so wird auch $D[\varphi]$ durch $D[\varphi_1]$ beliebig genau approximiert. Diesem Glättungsprozeß sind alle vorhandenen Kanten der Funktion φ nacheinander zu unterwerfen.

Das obige Verfahren ist keineswegs an die Bedingung geknüpft, daß die Kanten ganz im Innern von G verlaufen. Man kommt jedoch, wenn Kanten sich bis an den Rand erstrecken, mit Rücksicht auf die Behandlung der zweiten Ableitungen rascher folgendermaßen zum Ziele: Man grenze längs des Randes durch einen Linienzug C einen von C und R begrenzten schmalen Streifen S ab und löse mit den — bei hinreichend schmalen Streifen beliebig kleinen — Werten, die φ auf dem Rande von S hat, als Randwerten für S die Randwertaufgabe der Potentialtheorie. Ist ϱ die Lösung, dann ist bekanntlich²⁶⁾ das Dirichletsche Integral von ϱ , über S erstreckt, nicht größer als das von φ , d. h. dieses Integral wird, ebenso wie die Funktion ϱ selbst, bei hinreichend schmalen Streifen beliebig klein. Wir können nun anstatt von der Funktion φ von vornherein von derjenigen Funktion φ_0 ausgehen, welche in S mit ϱ übereinstimmt und außerhalb S in G mit φ identisch ist. Diese Funktion φ_0 besitzt in S mit Einschluß des Randes stetige erste und zweite Ableitungen, und das Integral von $L(\varphi_0)^2$, über G erstreckt, existiert sicher.

In ähnlicher Weise können wir bei denjenigen, in endlicher Zahl zugelassenen einzelnen Punkten in G verfahren, in denen über das Verhalten der ersten Ableitungen von φ zunächst gar nichts ausgesagt ist. Wir schneiden diese Punkte durch kleine Kreise aus G aus, lösen mit den Werten, die φ auf diesen Kreisen besitzt, als Randwerten für das Innere der Kreise die Randwertaufgabe der Potentialtheorie und ersetzen dann φ im Inneren dieser Kreise durch die betreffenden Potentialfunktionen.

²⁶⁾ Vgl. z. B. eine Abhandlung des Verf. in Crelles Journal 144 (1914) S. 190 ff.

Nachdem so die Glättung der Funktion φ gesichert ist, macht die Ersetzung der geglätteten Funktion φ_1 durch eine Funktion φ_2 , welche auch den weiteren, für die zweiten Ableitungen gestellten Bedingungen genügt, keine Schwierigkeiten mehr; man braucht hierzu nur die klassischen Approximationssätze anzuwenden. Denn wir können φ_1 überall in G durch eine zweimal stetig differenzierbare Funktion φ_2 gleichmäßig derart approximieren, daß dabei auch die ersten Ableitungen von φ_1 gleichmäßig approximiert werden und das Integral von $L(\varphi_2)^2$ dabei endlich bleibt. Nach der oben getroffenen Wahl von φ_1 können wir hierbei φ_2 mit φ_1 in einem gewissen schmalen Streifen längs des Randes als identisch annehmen.

Schließlich haben wir zu beachten, daß bei Ersetzung von φ durch φ_2 die Nebenbedingungen (14) und (15) verletzt werden können, allerdings, wenn die Approximation von φ durch φ_2 hinreichend genau ist, nur um beliebig wenig. Man kann also die Erfüllung dieser Nebenbedingungen wieder sichern, indem man die Funktion φ_2 und ihre Ableitungen bis zur zweiten Ordnung an endlich vielen Stellen im Inneren beliebig wenig in geeigneter Weise ändert. Die so entstehende Funktion φ' genügt dann allen gestellten Anforderungen.

Diese Betrachtungen gelten, gleichviel ob der Rand Ecken aufweist oder nicht.

Bei den Sätzen 2, 3 werden genau dieselben Betrachtungen angewandt, soweit es sich um das Glätten der Funktionen handelt. Dagegen bedarf es noch einer kleinen Überlegung, um zu erkennen, daß man tatsächlich in dem Variationsproblem die Randbedingung fortlassen darf. Betrachten wir etwa den Fall von Satz 2, so handelt es sich darum, eine in G stetige und mit stückweise stetigen ersten, im Inneren mit stückweise stetigen zweiten Ableitungen versehene Funktion φ , welche den Nebenbedingungen (14), (15) genügt, durch eine denselben Bedingungen genügende, mit stetigen ersten und im Inneren mit stückweise stetigen zweiten Ableitungen versehene Funktion φ' zu approximieren, derart, daß das über G erstreckte Integral von $L(\varphi')^2$ existiert, daß die Randbedingung $\frac{\partial \varphi'}{\partial \nu} = 0$ erfüllt ist und daß auch $D[\varphi]$ durch $D[\varphi']$ beliebig genau approximiert wird.

Wir können von vornherein voraussetzen, daß φ^* nach den obigen Vorschriften geglättet ist, d. h. stetige erste Ableitungen in G — höchstens mit Ausnahme der endlich vielen Eckpunkte des Randes — besitzt. Sehen wir zunächst von solchen Ausnahmepunkten ab, nehmen also G als begrenzt von durchweg stetig gekrümmten Kurven an, so können wir nach den bekannten Approximationssätzen φ von vornherein durch eine einschließlich des Randes beliebig oft, etwa dreimal stetig differenzierbare Funktion φ

ersetzen, derart, daß dabei auch die ersten Ableitungen von φ in G überall gleichmäßig approximiert werden. Nunmehr ziehen wir in G parallel oder annähernd parallel zum Rande in hinreichend klein zu wählendem Abstände d eine Kurve C , welche zusammen mit R einen schmalen Streifen S bildet, und definieren eine stetige Funktion φ_1 in G , indem wir außerhalb des Streifens S $\varphi_1 = \varphi$ setzen, in S dagegen φ_1 auf jeder Normalen zum Rande R konstante Werte beilegen. Die so entsprechende Funktion φ_1 braucht man jetzt nur längs der Kante C zu glätten und weiter wie oben zu behandeln — wobei ihre Werte in einer hinreichend engen Nachbarschaft von R unberührt bleiben —, um zu einer alle gestellten Anforderungen erfüllenden Funktion φ' zu gelangen.

Ganz analog liegt die Sache bei der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u$. Die Werte der Funktion φ_1 längs jeder der konstruierten Normalen von der Länge d sind dann gemäß dieser Gleichung zu definieren.

Besitzt der Rand R Ecken, oder besitzt die Funktion σ Unstetigkeitsstellen, so können wir nicht mehr von vornherein voraussetzen, daß φ überall in G einschließlich des Randes stetige erste Ableitungen hat. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, denken wir uns G durch eine von der identischen Transformation beliebig wenig verschiedene analytische Transformation — etwa, wenn G von einem Punkte aus konvex ist, durch eine Ähnlichkeitstransformation von diesem Punkte aus — auf ein Gebiet G' abgebildet, welches G ganz im Innern enthält. Dabei gehe der Punkt von G mit den Koordinaten x, y in einen Punkt von G' mit den Koordinaten x', y' über. Wir ersetzen nun $\varphi(x', y')$ durch $\varphi_0(x', y') = \varphi(x, y)$, wo für x, y die Ausdrücke in x', y' einzusetzen sind; offenbar stellt $\varphi_0(x, y)$ eine in G einschließlich aller Randpunkte mit stetigen ersten Ableitungen versehene Funktion dar, welche φ beliebig genau approximiert. Ferner ist sofort ersichtlich — ganz analog wie bei der entsprechenden Betrachtung in § 4 — daß das über G erstreckte Dirichletsche Integral von φ_0 sich von dem der Funktion φ um beliebig wenig unterscheidet. Nunmehr läßt sich wie oben φ_0 durch eine in G mit stetigen Ableitungen bis zur dritten Ordnung versehene Funktion φ_1 gleichmäßig approximieren, derart, daß dabei auch die Ableitungen $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$ gleichmäßig approximiert werden.

Von hier ab verlaufen die Schlüsse ganz wie oben. Wir müssen dabei nur, statt eine Parallelkurve C zum Rande R im Abstände d zu ziehen, die Kurve C (etwa einen geradlinien Linienzug) so führen, daß sie in sämtlichen Eckpunkten des Randes und Unstetigkeitspunkten der Funktion σ an den Rand R stößt. C bildet mit R eine endliche Anzahl schmaler Streifen, die, wie wir voraussetzen dürfen, von jeder zu dem betreffenden Randabschnitt von R gehörigen Normalen der Länge d in einem einzigen

Stück durchschnitten werden. Wir können dann, analog wie oben, von den Werten der Funktion φ_1 auf C ausgehend, diese Werte durch die Streifen hindurch längs jeder Normalen gemäß der Randbedingung fortsetzen. Wenn wir die so entstehende Funktion φ_0 wie oben behandeln, so gelangen wir zu einer Funktion φ' , welche die gestellten Anforderungen erfüllt.

Für den Fall von drei und mehr Dimensionen verlaufen die Betrachtungen ganz analog^{27) 28)}.

²⁷⁾ Man vergleiche zu den Überlegungen des Anhangs die Ausführungen bei L. Lichtenstein, Math. Zeitschrift 3 (1919), S. 126–160, insb. S. 134 u. S. 153.

²⁸⁾ Nach Beendigung des Druckes werde ich darauf aufmerksam gemacht, daß sich die auf S. 13 formulierte Maximum-Minimumeigenschaft der Hauptachsen eines Ellipsoides schon ebenso in einer Arbeit von E. Fischer, Monatshefte für Math. und Phys. 16, S. 245 ausgesprochen findet.

(Eingegangen am 30. August 1919.)