15.

Zur Begründung und Erweiterung der Variationsrechnung.

(Von Herrn Dr. A. Müller, in Heidelberg.)

Das von Euler der Variationsrechnung untergelegte Princip, ist selbst von Lagrange, dem Erfinder dieser Rechnungsweise, gutgeheissen und angenommen worden. Auch die neuere Zeit hat nichts daran geändert, noch dasselbe durch ein anderes verdrängt. Obwohl nun aus diesem letzten Umstande für das Euler'sche Princip nichts gefolgert werden kann, da die ungewöhnliche Höhe der Abstraction durch ihre Reize nur Wenige anzuziehen scheint, so ist es doch gewiss, daß Euler's Grundgedanke eben so als der allein wahre dasteht, wie er an Kühnheit Alles übertrifft. Nur fehlt ihm die erforderliche volle Bestimmtheit, und er steht völlig isolirt. Als ich vor einiger Zeit diesem Gegenstande mit aller Aufmerksamkeit nachdachte, fand ich, daß das, was Euler als Princip der Variationsrechnung aufstellte, nicht allein einer genauen Bestimmung fähig, sondern auch, vom Isolirtsein weit entfernt, ein Glied, aber auch nur ein Glied einer unendlichen Reihe von Wahrheiten ist, die wir noch zu entwickeln haben. Ich will im Folgenden versuchen, das Feld dieser Wahrheiten eröffnen zu helfen.

I. Begriff von Function.

§. 1.

Man unterscheidet gewöhnlich veränderlich und constante Größen. Obgleich dieser Sprachgebrauch der Natur der Sache nicht angemessen ist, so soll er doch, in Ermangelung eines besseren, im Folgenden beibehalten werden. Mit Beziehung auf ihn unterscheide ich wesentliche und unwesentliche Constanten. Beide sind in jedem gegebenen Falle leicht zu unterscheiden, so schwer auch die Angabe der allgemeinen Charactere derselben ist. Die unwesentlichen Constanten kann man daran erkennen, daß sie aus einem Ausdrücke oder einer Gleichung entfernt werden können, ohne daß die Natur des Ausdrucks oder

der Gleichung verändert wird; die wesentlichen können aber nicht entfernt und nur mit andern wesentlichen Constanten vertauscht werden.

§. 2.

Es sei zwischen zwei unveränderlichen Gröſsen x und y , und einer wesentlichen Constante a , eine Gleichung gegeben. Je nach der Natur dieser Gleichung giebt es eine oder mehrere besondere Gleichungen, von denen jede der gegebenen genügt, und welche sämmtlich die Form haben:

$$y = \varphi(a, x).$$

Um nun aus einer solchen Gleichung alle nur möglichen Werthe zu erhalten, welche y nach und nach annehmen kann, verfährt man am einfachsten so: man setzt statt a einen ersten möglichen Werth a_0 , und nun statt x , nach und nach alle möglichen Werthe, die durch $x_0, x_1, x_2, \dots$ bezeichnet werden mögen, und entwickelt die zugehörigen, möglichen Werthe von y . Diese sollen $y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots$ heißen.

Nun setzt man für a einen zweiten möglichen Werth a_1 , statt a wieder die Werthe $x_0, x_1, x_2, \dots$, und sucht die zugehörigen Werthe von y , welche durch $y_1^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots$ angezeigt werden mögen.

Man setzt ferner für a einen dritten möglichen Werth a_2 , statt x die Werthe $x_0, x_1, x_2, \dots$, und sucht die Werthe $y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots$ von y , etc.

Alle diese möglichen Werthe von y kann man in folgendes Schema bringen:

a_5	$y_0^{(5)}$	$y_1^{(5)}$	$y_2^{(5)}$	$y_3^{(5)}$	$y_4^{(5)}$	$y_5^{(5)}$	...
a_4	$y_0^{(4)}$	$y_1^{(4)}$	$y_2^{(4)}$	$y_3^{(4)}$	$y_4^{(4)}$	$y_5^{(4)}$	...
a_3	$y_0^{(3)}$	$y_1^{(3)}$	$y_2^{(3)}$	$y_3^{(3)}$	$y_4^{(3)}$	$y_5^{(3)}$	...
a_2	$y_0^{(2)}$	$y_1^{(2)}$	$y_2^{(2)}$	$y_3^{(2)}$	$y_4^{(2)}$	$y_5^{(2)}$	...
a_1	$y_0^{(1)}$	$y_1^{(1)}$	$y_2^{(1)}$	$y_3^{(1)}$	$y_4^{(1)}$	$y_5^{(1)}$	...
a_0	$y_0^{(0)}$	$y_1^{(0)}$	$y_2^{(0)}$	$y_3^{(0)}$	$y_4^{(0)}$	$y_5^{(0)}$	...
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...

Die unterste Reihe enthält alle möglichen Werthe von x , und die erste, aufwärts gehende Reihe alle möglichen Werthe von a . Von den horizontalen Reihen enthält die erste jene Werthe, welche y bei $a = a_0$, die zweite aber jene Werthe, welche y bei $a = a_1$, u. s. w. annehmen kann.

Dies vorausgesetzt, läßt sich die Bedeutung der Sätze: y ist eine Function von a , u. s. w. so bezeichnen:

- 1) Betrachtet man in der gegebenen Gleichung y als Function von x , so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten horizontalen Reihe des Schema's.
- 2) Betrachtet man y als Function von a , so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten verticalen Reihe.
- 3) Betrachtet man y als Function von a und x , so ist y irgend ein Glied des ganzen Schema's.

§. 3.

Es sei eine Gleichung zwischen den veränderlichen Größen x und y , und den wesentlichen Constanten a und b gegeben. Die allgemeine Form der Auflösung dieser Gleichung ist:

$$y = \varphi(x: a, b).$$

Aus dieser Gleichung alle möglichen Werthe von y zu erhalten, setze man für b einen ersten möglichen Werth b_0 , und bilde ein Schema, das alle Werthe von y enthält, die bei diesem Werthe von b aus allen möglichen Werthen von a und x entspringen können. Man setze für b einen zweiten möglichen Werth b_1 , und bilde ein zweites Schema, u. s. w.

Unter dieser Voraussetzung kann man die Begriffe, welche mit den Sätzen: y ist eine Function von x , oder von a , u. s. w. verbunden sind, so feststellen:

- 1) Betrachtet man y als Function von x , so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten horizontalen Reihe eines bestimmten Schema's.
- 2) Betrachtet man y als Function von a , so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten verticalen Reihe eines bestimmten Schema's.
- 3) Betrachtet man y als Function von b , so ist y ein Glied in einer bestimmten verticalen und in einer bestimmten horizontalen Reihe irgend eines Schema's.
- 4) Betrachtet man y als Function von a und x , so ist y irgend ein Glied in einem bestimmten Schema.
- 5) Betrachtet man y als Function von b und x , so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten horizontalen Reihe irgend eines Schema's.
- 6) Betrachtet man y als Function von a und b , so ist y irgend ein Glied in einer bestimmten verticalen Reihe irgend eines Schema's.
- 7) Betrachtet man y als Function von a , b und x , so ist y irgend ein Glied des ganzen Systems.

§. 4.

Befinden sich in einer Gleichung zwischen x und y drei wesentliche Constanten, so muß man, um alle möglichen allgemeinen Begriffe von y bezeichnen zu können, die möglichen Werthe von y in ein System gebracht annehmen. Die Bestandtheile dieses Systems sind wieder Systeme, welche aus Schematen bestehen. Man kann zur festen Bezeichnung folgende Benennungen einführen:

System erster Ordnung = System, dessen Bestandtheile Schemate sind,
- zweiter - = - , - - - Systeme erster
Ordnung sind,
- dritter - = - , - - - Schemate zwei-
ter Ordnung sind.

Unter dieser Voraussetzung kann man leicht die Bedeutung der Sätze: y ist eine Function von x , u. s. w. angeben, und so eigentlich die verschiedenen Begriffe von y als Function fixiren.

§. 5.

Ist eine Gleichung zwischen drei veränderlichen Größen x, y, z und einer wesentlichen Constante a gegeben, so kann man die Werthe von z , als Function betrachtet, ebenfalls in einzelne Schemate bringen. Das erste Schema wird jene Werthe von z enthalten, welche bei einem ersten Werthe von y , und allen möglichen Werthen von a und x , möglich sind; das zweite alsdann jene, die zu einem zweiten Werthe von y und allen möglichen Werthen von a und x gehören, u. s. w. Diese verschiedenen Schemata kann man nun als in Ebenen befindlich ansehen, die Ebenen endlich über einander geschichtet sich vorstellen, und das ganze nun eine Schichtung nennen.

Kommen in der Gleichung zwischen x, y, z zwei wesentliche Constanten a und b vor, so lassen sich die möglichen Werthe von z , welche zu einem Werthe von b und allen möglichen Werthen von a, x, y gehören, in eine Schichtung, und auf diese Weise alle nur möglichen Werthe von z in ein System von Schichtungen gruppiren, welches man Schichtung-System erster Ordnung nennen kann.

Bei einer Gleichung zwischen x, y, z und drei wesentlichen Constanten, werden die möglichen Werthe von z in ein Schichtung-System zweiter Ordnung gebracht, dessen Bestandtheile Schichtung-Systeme erster Ordnung sind.

Der Fortgang ist hierdurch genugsam bezeichnet, und bedarf keiner weiteren Andeutung.

Durch diese Werth-Anordnung ist das bestimmteste und sicherste Mittel geboten, nicht allein die verschiedenen Begriffe von Function zu unterscheiden, sondern auch jeden einzelnen Begriff zu fixiren.

Es ist bei dieser Auseinandersetzung jede besondere Bedeutung der Größen $x, y, \dots$ absichtlich vermieden, und unbestimmt gelassen worden, ob diese Größen Linien oder etwas anders sein sollen. Der Übergang zum Besondern ist leicht. Übrigens wird man ohne Erinnern einsehen, daß das Voranstehende eigentlich der ganzen höhern Analysis vorausgeschickt werden muß; es steht, als Einleitung, nur darum hier, weil es überhaupt gewöhnlich fehlt, für die Variationsrechnung aber unumgänglich nothwendig ist.

II. Verallgemeinerung der Functionen oder Gesetze der Variation.

§. 6.

Jede Function von x u. s. w., oder jede Gleichung zwischen $x, y, \dots$ kann man als einen speciellen Fall einer allgemeineren Function, oder einer allgemeineren Gleichung betrachten. So ist z. B. die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ nur ein specieller Fall von

$$y^2 = px + \psi(x, a),$$

wo a eine wesentliche Constante bezeichnet, und entspringt aus dieser allgemeineren Gleichung, wenn die Function $\psi(x, a)$ für irgend einen besonderen Werth von a verschwindet. Da nun die möglichen Werthe von y , welche aus der Gleichung $y^2 = px$ sich ergeben, in ein Schema groupirt werden können, oder alle möglichen Parabeln ein Schema bilden, alle möglichen Curven aber, welche aus der allgemeineren Gleichung $y^2 = px + \psi(x, a)$ folgen, ein System erster Ordnung bilden, dessen Bestandtheile Schemata sind, so kann man so von dem Begriffe der Parabel zu einem viel allgemeineren aufsteigen, indem man die Gleichung der Parabel als speciellen Fall der allgemeineren $y^2 = px + \psi(x, a)$ betrachtet, und diese letztere statt der Gleichung $y^2 = px$ gebraucht. Für den Rückgang vom Allgemeinen zum Besondern bleibt dann immer die Bedingung, daß bei einem besonderen Werthe von a die Function $\psi(x, a)$ verschwinde.

Obgleich, wegen der willkürlichen Function ψ , in der allgemeinen Gleichung, eine unendliche Anzahl Gleichungen, welche alle diese Form haben, begriffen sein kann, so hängt die Allgemeinheit der Gleichung doch keineswegs von der Willkürlichkeit der Functionsweise ψ , sondern einzig und allein von der neu eingeführten wesentlichen Constante a ab. Man mag für ψ eine Functionsweise annehmen, welche man will: immer bilden die möglichen Werthe von y , welche aus der Gleichung $y^2 = px + \psi(x, a)$ entspringen, nur ein System erster Ordnung, und man hat für die Mannigfaltigkeit der Begriffe, welche man mit y verbindet, keinen größeren Spielraum, als eben dieses System erster Ordnung.

Anders wird die Sache, wenn $\psi(x, a)$ nicht bloß a , sondern auch noch eine zweite wesentliche Constante b enthält. Alsdann erhält man für die Mannigfaltigkeit der Begriffe von y ein System zweiter Ordnung, in welchem das vorerwähnte System erster Ordnung als Bestandtheil erscheinen kann.

Hieraus geht hervor:

- 1) Wenn zwischen x und y eine entwickelte oder unentwickelte Gleichung gegeben ist, so wird der allgemeine Begriff, der mit y verbunden sein kann, zu einer größeren Allgemeinheit dadurch erhoben, daß man in die Gleichung eine neue wesentliche Constante a einführt, unter der Voraussetzung, daß aus der allgemeinen Gleichung, bei einem besonderen Werthe von a , die besondere entspringt. Diese Erweiterung der Begriffssphäre von y kann man erste Erweiterung nennen.
- 2) Von der ersten Erweiterung kann man zu einer zweiten gehen, indem man eine zweite wesentliche Constante b einführt, unter der Bedingung, daß die erste Erweiterung bei einem besonderen Werthe von b hieraus entspringt.

§. 7.

Eine andere Erweiterung der Begriffssphäre, welche y , vermöge einer zwischen x und y gegebenen Gleichung, hat, ergibt sich, wenn man, aufser einer neuen wesentlichen Constante a , auch noch eine neue, von x unabhängige, veränderliche Größe $x^{(1)}$ einführt. In diesem Falle erhält man für die Mannigfaltigkeit der Begriffe von y ein Schichtungssystem erster Ordnung, und der erste allgemeine Begriff von y , den man für y aus der ursprünglichen Gleichung erhalten kann, ist in dem zwei-

ten, allgemeineren enthalten, wenn die Einführung von a und $x^{(1)}$ in der Art geschieht, daß bei einem besonderen Werthe von a die besondere Gleichung aus der allgemeineren entspringt.

Daß man auf diese Weise, und unter ähnlichen Bedingungen, beliebig viele von einander unabhängige veränderliche Größen und wesentliche Constanten in die gegebene Gleichung einführen könne, ist leicht zu sehen.

§. 8.

Eine dritte Erweiterungsart der Begriffssphäre von y findet Statt, wenn man in die zwischen x und y gegebene Gleichung, statt x , eine Function von einer veränderlichen GröÙe u , in Verbindung mit einer oder mit mehreren wesentlichen Constanten, einführt. Es sei z. B. die gegebene Gleichung:

$$1. \quad f(x, y, a) = 0,$$

wo a die wesentliche Constante ist. Nimmt man nun für x eine Function von u und einer wesentlichen Constante b an, und führt diese in die gegebene Gleichung ein, so hat man zwei Gleichungen:

$$2. \quad \begin{cases} f^{(1)}(y, u, a, b) = 0, \\ \varphi(x, u, b) = 0. \end{cases}$$

Sollen diese beiden Gleichungen aber die gegebene als besonderen Fall in sich enthalten, so muß die zweite Gleichung so beschaffen sein, daß, bei einem besonderen Werthe von b , aus derselben $x = u$ folgt.

Angenommen, die zweite Gleichung sei so beschaffen, wie diese Bedingung fordert, so kann in (2.) jede für sich als ein specieller Fall einer allgemeineren Gleichung betrachtet, und jede auch zu einer allgemeineren erhoben werden, wenn man in jede eine neue wesentliche Constante, und zugleich eine neue von u unabhängige veränderliche GröÙe einführt. Die wesentliche Constante und die neue veränderliche GröÙe sei für die erste Gleichung $b^{(1)}$ und $u^{(1)}$, für die zweite c und v , so wird man haben:

$$3. \quad \begin{cases} F^{(2)}(y, u, u^{(1)}, a, b, b^{(1)}) = 0, \\ \varphi^{(1)}(x, u, v, b, c) = 0, \end{cases}$$

und diese neuen Gleichungen enthalten die beiden vorigen als specielle Fälle, mithin auch die ursprüngliche Gleichung in sich, wenn sie so beschaffen sind, daß bei einem besonderen Werthe von $b^{(1)}$ die erste der vorigen, und bei einem besonderen Werthe von c die zweite der vorigen Gleichungen entspringt.

Die Allgemeinheit der beiden letzten Gleichungen (3.) kann nun leicht noch viel weiter getrieben werden. Bleibt man aber nur bei dieser Allgemeinheit stehen, so lassen sich folgende Betrachtungen daran knüpfen:

- 1) Nimmt man y als Function von a , so bleibt x völlig unberücksichtigt und wird constante Größe in den drei Fällen (1), (2) und (3).
- 2) Betrachtet man y als Function von b , so wird, nach (2) und (3), auch x eine Function von b . Eben so, wenn y als Function von u genommen wird, ist auch x eine Function von u .
- 3) Betrachtet man aber in (3) y als Function von $u^{(1)}$ oder von $b^{(1)}$, oder von $u^{(1)}$ und $b^{(1)}$, so bleibt x , als constant, dabei unberücksichtigt, man mag x wirklich als constant ansehen, oder als Function von v , oder von c , oder von v und c betrachten.
- 4) Eben so kann man x als Function von v , oder von c , oder von v und c betrachten, und diese Annahme hat auf y keinen Einfluß; es ist dabei gestattet, y als constant zu betrachten, oder als Function von $u^{(1)}$, oder von $b^{(1)}$, oder von $u^{(1)}$ und $b^{(1)}$.

Hieraus ergibt sich die Bedeutung und zugleich die Bedingung der Wahrheit für folgenden Satz:

Wenn eine Gleichung zwischen x und y Statt findet, so kann man, dieser Gleichung unbeschadet, y als von x unabhängig betrachten, und als abhängig von einer, zwei oder mehreren Größen, welche sich entweder in der Gleichung befinden, oder auch nicht darin vorkommen; und neben dieser Annahme kann man x als constant, oder als von einer, zwei, Größen abhängig betrachten, welche in der gegebenen Gleichung nicht vorkommen.

§. 9.

Man kann auf dem vorhin bezeichneten Wege den zuletzt gefundenen Satz leicht dahin erweitern, daß er nicht bloß für Gleichungen zwischen zwei Größen x und y , sondern für Gleichungen von jeder Anzahl veränderlicher Größen gilt: mag zwischen diesen Größen nur eine, oder mögen mehrere Gleichungen gegeben sein.

Als Folgerung aus dem letzten Satze kann man folgendes bemerken:

Ist zwischen x , y und einer wesentlichen Constante a eine Gleichung

$$F(x, y, a) = 0$$

entweder gegeben oder bestimmt, und eine Function $\varphi(x, y)$ gegeben, so kann man in dieser, wie gewöhnlich geschieht, y als von x abhängig betrachten; man kann aber auch y als von x unabhängig, und als von einer oder mehreren ganz fremden Gröfsen abhängig ansehen, und dabei x entweder als constant oder als Function von einer oder mehreren fremden Gröfsen nehmen.

Man kann aber noch viel weiter gehen, und $\varphi(x, y)$, als speciellen Fall betrachtet, zu einer allgemeineren Function erheben, indem man in $\varphi(x, y)$ eine neue wesentliche Constante, oder eine neue wesentliche Constante und eine neue veränderliche, von x und y unabhängige Gröfse einführt, so, dafs man

$$\varphi^{(1)}(x, y, u, b) \text{ statt } \varphi(x, y)$$

hat. Diese Einführung hebt die ursprüngliche Function $\varphi(x, y)$ nicht auf, und die allgemeinere Function $\varphi^{(1)}$ kann statt φ gebraucht werden, wenn nur die Einführung von der Art ist, dafs bei einem besonderen Werthe von b die ursprüngliche Function φ aus der allgemeineren sich ergibt.

Diese allgemeine Function $\varphi^{(1)}$ kann man nun im Einzelnen betrachten als Function von x , und dabei x als Function von beliebig vielen Gröfsen: alsdann bleiben y und b , als constante Gröfsen, unberücksichtigt, unbeschadet der zwischen x und y Statt findenden Gleichung.

Eben so kann man $\varphi^{(1)}$ als Function von y , und y selbst als Function von beliebig vielen Gröfsen, und dabei x und b als constant ansehen.

Man kann $\varphi^{(1)}$ als Function von y und x nehmen, dabei y von x unabhängig, und jede dieser Gröfsen als Function von andern Gröfsen.

Man kann $\varphi^{(1)}$ als Function von x, y, u, b nehmen, und dabei ebenfalls x und y als von einander unabhängig betrachten.

Nimmt man endlich $\varphi^{(1)}$ als Function von u , oder von b , oder von u und b , so bleiben x und y ohne dies aufser Acht.

§. 10.

Durch das Vorhergehende ist es leicht, die Bedeutung, den Grund und die Bedingung der Wahrheit folgender Sätze einzusehen.

Ist zwischen x und y irgend eine Gleichung gegeben, oder findet überhaupt nur eine Statt, ohne dafs sie gerade gegeben ist, und ist eine Function von der Form:

$$F(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y), \dots)$$

gegeben, so kann man darin y als von x abhängig betrachten, und dann ist F nur eine Function von x .

Man kann aber x und y , jede Gröfse für sich, bis zu irgend einem Grade der Allgemeinheit gesteigert annehmen, so dafs y nicht mehr als von x abhängig angesehen werden mufs, und diese verallgemeinerten x und y in die ganze Function F einführen; dann ist F eine Function der beiden, von einander unabhängigen Functionen x und y . Es versteht sich von selbst, dafs man die Verallgemeinerung etwa nur mit y vornehmen, und x in irgend einem Grade der Allgemeinheit nehmen, aber in der Function F ganz unberücksichtigt lassen kann. Oder umgekehrt:

Man kann die Gröfsen x und y , welche in F , aufserhalb der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ vorkommen, entweder gleichzeitig, oder auch nur eine allein, zu irgend einem Grade der Allgemeinheit erhoben betrachten, und dabei annehmen, es seien $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ von diesen x und y völlig unabhängig; so, dafs F nur eine Function der beiden von einander unabhängigen Functionen x und y wird, welche aufserhalb der $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ vorkommen.

Man kann endlich die Gröfsen x und y , sowohl jene, welche aufserhalb, als auch jene, welche innerhalb der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ vorkommen, als zu irgend einem Grade der Allgemeinheit erhoben betrachten, und zwar nicht allein jede Gröfse für sich, sondern auch in jeder Function $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ wieder auf besondere Art, und entweder in allen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ gleichzeitig, oder auch nur in einigen.

In Summa:

Man kann in der angeführten Function $F(x, y, \varphi_1(x, y), \dots)$ die einzelnen Elemente $x, y, \varphi_1, \dots$ entweder alle zugleich, oder auch nur eines oder mehrere derselben, als eben so viele von einander unabhängige Functionen von beliebig vielen Gröfsen annehmen, und diese Annahme stört weder die zwischen x und y stattfindende Gleichung, noch die ganze Function F .

Dieser Satz kann mit Leichtigkeit so erweitert werden, dafs er für Functionen von jeder Anzahl veränderlicher Gröfsen gilt.

Es ist noch übrig, nicht sowohl die Anwendbarkeit, als vielmehr die Methoden der Anwendung der obigen Sätze zu zeigen. Ich werde dies ein andermal thun, und dann noch mancherlei Bemerkungen nachholen, die hier ihre Stelle haben sollten. Heidelberg, im Jahre 1829.