SULLE FRAZIONI CONTINUE ALGEBRICHE PERIODICHE.

Nota di **Emma Bortolotti**, in Bologna.

Adunanza del 13 gennaio 1895.

Tutte le dimostrazioni che dal Lagrange in poi si sono date sulla periodicità della frazione continua in cui può svilupparsi una radice di un'equazione di 2° grado, si riducono a constatare che i denominatori incompleti debbono essere, da un certo punto in poi, numeri interi positivi inferiori ad un limite determinato. Tale ragionamento non può manifestamente estendersi alle frazioni continue in cui possono svilupparsi le radici di equazioni di secondo grado i cui coefficienti sono polinomi interi di una variabile x .

M'è sembrato interessante vedere se anche in questo caso il teorema trovato dal Lagrange poteva applicarsi. A tal fine ho preso in esame la frazione continua :

$$\sigma_1 = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

in cui $a_1, a_2, \dots$ sono funzioni lineari di una variabile x ; ed ammettendo la convergenza della frazione continua (*); e considerando che

(*) Per un teorema del prof. Pincherle (R. Acc. dei Lincei, t. V, s. IV, 5 maggio 1889) una frazione continua della forma indicata, e periodica, è certamente convergente per valori della variabile x abbastanza grandi in modulo.

una frazione continua è certamente periodica se la frazione che si ottiene tralasciando un certo numero di denominatori riproduce la frazione data, ho cercato di ricondurre a questa verifica la ricerca della condizione affinchè la radice di un'equazione di 2° grado possa svilupparsi in frazione continua periodica.

A tale scopo ho incominciato col cercare la condizione necessaria e sufficiente affinchè due funzioni possano svilupparsi in frazioni continue che da un certo punto in poi abbiano gli stessi divisori parziali.

Con una semplice applicazione di quella condizione ho potuto dimostrare il seguente teorema che mi sembra notevole: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la radice di un'equazione di 2° grado a coefficienti interi in x possa svilupparsi in frazione continua periodica è che si possa risolvere con polinomi interi l'equazione indeterminata di 2° grado*

$$Au^2 - v^2 = 1$$

dove A è il discriminante dell'equazione data.

Il teorema di Lagrange non è dunque applicabile, in generale, alle equazioni algebriche di 2° grado. Il caso delle frazioni continue numeriche è incluso come caso speciale; si è così implicitamente trovata una nuova dimostrazione pel teorema di Lagrange, ed è resa inoltre manifesta la dipendenza della periodicità della frazione continua dalla risoluzione dell'equazione Pelliana, mentre finora non si era considerato che la dipendenza inversa.

Supposto poi di avere un'equazione algebrica di 2° grado di cui una radice si possa svolgere in frazione continua periodica, ho dimostrato che anche l'altra radice potrà svolgersi in frazione continua periodica coi medesimi periodi scritti in ordine inverso. Per questa dimostrazione mi sono giovata di alcune considerazioni trovate dal Geronio sulle frazioni continue inverse, e ricordate dal Catalan nel 1° fascicolo 1894 del giornale di Battaglini.

I.

1. Siano due funzioni σ_x, ε_x le quali si possano sviluppare secondo
Rend. Circ. Matem., t. IX, parte 1ª.—Stampato il 9 febbrajo 1895. 18

condo gli algoritmi

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 + a_1 \sigma_1 = \sigma_2 \\ -\sigma_1 + a_2 \sigma_2 = \sigma_3 \\ \dots \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 + a'_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 + a'_2 \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \\ \dots \end{array} \right.$$

che supporremo convergenti.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè negli sviluppi delle funzioni σ_i , ε_i , secondo l'algoritmo così definito, tutti i fattori lineari che man mano si vanno trovando, ad eccezione di un numero finito di essi, siano i medesimi per le due funzioni, è che queste si ottengano l'una dall'altra mediante una sostituzione lineare

$$\sigma_i = \frac{a - b \varepsilon_i}{c - d \varepsilon_i},$$

dove a , b , c , d sono polinomi interi, ed il determinante $ad - bc$ è uguale all'unità.

LA CONDIZIONE È NECESSARIA: Si abbia per σ_i la successione di divisori

$$a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

per ε_i la successione

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_p, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots.$$

Indicando con η la funzione rappresentata dalla frazione continua infinita:

$$\eta = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$$

che, per le ipotesi poste, converge, avremo:

$$\sigma_i = \frac{P_m - P_{m-1} \eta}{Q_m - Q_{m-1} \eta}, \quad \varepsilon_i = \frac{P'_p - P'_{p-1} \eta}{Q'_p - Q'_{p-1} \eta}$$

da cui

$$\sigma_1 = \frac{(Q'_p P_{m-1} - Q'_{p-1} P_m) \varepsilon_1 - (P'_p P_{m-1} - P'_{p-1} P_m)}{(Q'_p Q_{m-1} - Q'_{p-1} Q_m) \varepsilon_1 - (P'_p Q_{m-1} - P'_{p-1} Q_m)}.$$

Dunque σ_1 si ottiene da ε_1 mediante una sostituzione lineare il cui determinante è manifestamente uguale all'unità.

LA CONDIZIONE È SUFFICIENTE: Siano σ_1 , ε_1 due funzioni della variabile x tali che si abbia

$$\varepsilon_1 = \frac{a - b \sigma_1}{c - d \sigma_1}, \quad \text{con } ad - bc = 1.$$

Dico che, nell'ipotesi che tanto ε_1 quanto σ_1 si possano sviluppare in frazione continua convergente, da un certo punto in poi tutti i divisori parziali dovranno coincidere nei due sviluppi.

Supponiamo intanto di aver sviluppato σ_1 in frazione continua, avremo:

$$\sigma_1 = \frac{P_m - P_{m-1} \eta_{m+1}}{Q_m - Q_{m-1} \eta_{m+1}},$$

sostituendo:

$$\varepsilon_1 = \frac{a Q_m - b P_m - (a Q_{m-1} - b P_{m-1}) \eta_{m+1}}{c Q_m - d P_m - (c Q_{m-1} - d P_{m-1}) \eta_{m+1}} = \frac{R - R' \eta_{m+1}}{S - S' \eta_{m+1}}$$

in cui è $RS' - R'S = 1$. Ora siccome la η_{m+1} è una funzione del grado -1 in x , che non dipende per niente dai primi m divisori incompleti $a_1, a_2, \dots, a_m$, ma solo dai successivi $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$, se proveremo che $\frac{R'}{S'}$, $\frac{R}{S}$ sono due ridotte consecutive nello sviluppo di ε_1 , sarà dimostrato l'asserto. Ora si ha

$$\frac{R}{R'} = \frac{a Q_m - b P_m}{a Q_{m-1} - b P_{m-1}} = \frac{Q_m}{Q_{m-1}} \frac{\left(\frac{a}{b} - \sigma_1\right) - \left(\frac{c_{2m+1}}{x^{2m+1}} + \frac{c_{2m+2}}{x^{2m+2}} + \dots\right)}{\left(\frac{a}{b} - \sigma_1\right) - \left(\frac{c_{2m}}{x^{2m}} + \frac{c_{2m+1}}{x^{2m+1}} + \dots\right)}.$$

Ma a e b rappresentano due polinomi interi in x , nella differenza $\frac{a}{b} - \sigma_1$ (poichè non è $\frac{a}{b} = \sigma_1$) potranno dunque annullarsi soltanto alcuni termini in numero finito; se lo sviluppo di questa differenza in serie di potenze negative di x incomincia con l'esponente $-v$, disporremo di m in modo che sia $2m > v$.

Saremo allora certi che lo sviluppo in serie della frazione

$$\frac{\left(\frac{a}{b} - \sigma_1\right) - \left(\frac{c_{2m+1}}{x^{2m+1}} + \dots\right)}{\left(\frac{a}{b} - \sigma_1\right) - \left(\frac{c_{2m}}{x^{2m}} + \dots\right)}$$

incomincia col termine 1. Lo sviluppo di $\frac{R}{R'}$ incomincerà con lo stesso termine col quale comincia quello di $\frac{Q_m}{Q_{m-1}}$.

Ma Q_m è un polinomio il cui grado in x è di un'unità superiore al grado di Q_{m-1} , sarà dunque anche il grado di R superiore per un'unità a quello di R' . Similmente si proverebbe che il grado di S supera per un'unità quello di S' .

Da questa dimostrazione e dalla proprietà

$$RS' - SR' = 1$$

risulta che R ed S sono primi fra loro e che il grado di S supera per un'unità quello di R .

Si consideri ora la differenza

$$\varepsilon_1 - \frac{R}{S} = \frac{\eta_{m+1}}{S(S - S'\eta_{m+1})}.$$

Se S è del grado μ , S' è del grado $\mu - 1$, la η_{m+1} è del grado -1 , la frazione del grado $-(2\mu + 1)$, dunque la differenza $\varepsilon_1 - \frac{R}{S}$ sviluppata in serie di potenze negative di x comincerebbe col ter-

mine di grado $-(2\mu + 1)$. Il suo denominatore è di grado μ , dunque è veramente la μ^{ma} ridotta di ε_1 .

Similmente si dimostrerebbe che $\frac{R'}{S'}$ è la ridotta d'ordine $\mu-1$, dunque è provato quanto si voleva.

II.

2. Data una funzione σ_1 formando il sistema :

$$(1) \quad \begin{cases} -1 + a_1 \sigma_1 = \sigma_2 \\ -\sigma_1 + a_2 \sigma_2 = \sigma_3 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

può avvenire che la successione $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ sia formata con un numero limitato di elementi che si riproducono periodicamente e nel medesimo ordine. Il periodo potrà incominciare subito col primo termine, o dopo un numero determinato di termini; la frazione continua corrispondente nel primo caso dicesi *periodica semplice, mista* nel secondo.

Sia una funzione σ_1 che possa svilupparsi nella frazione continua periodica mista

$$(2) \quad \sigma_1 = (a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_p, b_1, \dots).$$

Indicando con η la frazione continua periodica semplice

$$\eta = (b_1, b_2, \dots b_p, b_1, \dots)$$

avremo :

$$(3) \quad \sigma_1 = \frac{P_n - P_{n-1} \eta}{Q_n - Q_{n-1} \eta}, \quad \eta = \frac{P_n - Q_n \sigma_1}{P_{n-1} - Q_{n-1} \sigma_1}$$

la quale ci dimostra che : *Se una funzione $\sigma_1(x)$ può svilupparsi in frazione continua periodica mista, mediante una sostituzione lineare, a determinante uguale all'unità, può trasformarsi in una frazione continua periodica semplice col medesimo periodo.*

3. Dimostriamo ora che: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $\sigma_1(x)$, sviluppata secondo l'algoritmo indicato, dia origine ad una frazione continua periodica, è che sia radice di un'equazione di 2° grado a coefficienti interi in x : $a\sigma^2 + b\sigma + c = 0$, nella quale sia possibile la scomposizione del coefficiente b in due parti $b_1 + b_2$ in modo che si abbia $ac - b_1b_2 = 1$.*

4. LA CONDIZIONE È NECESSARIA: Se la frazione continua cui σ_1 dà origine è periodica semplice ed è $a_1, a_2, \dots a_p$ il periodo, avremo per la σ_1 verificata l'eguaglianza:

$$Q_{p-1}\sigma_1^2 - (P_{p-1} + Q_p)\sigma_1 + P_p = 0$$

il cui determinante è evidentemente uguale ad 1.

Se poi la frazione continua è periodica mista ed è $a_1, a_2, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_p, b_1, b_2, \dots$ la serie dei divisori parziali, chiamando η la frazione continua periodica semplice che si ottiene tralasciando i primi m termini, avremo, per la formula (3):

$$\eta = \frac{P_m - Q_m \sigma_1}{P_{m-1} - Q_{m-1} \sigma_1}.$$

Ma anche spezzando la serie dopo il primo periodo, si avrebbe avuto la frazione continua η , cui solamente mancherebbe il primo periodo, il che non influisce essendo i periodi in numero infinito, si avrà dunque:

$$\eta = \frac{P_{m+p} - Q_{m+p} \sigma_1}{P_{m+p-1} - Q_{m+p-1} \sigma_1}$$

e quindi:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (Q_m Q_{m+p-1} - Q_{m-1} Q_{m+p}) \sigma_1^2 - \\ - [(P_m Q_{m+p-1} - P_{m-1} Q_{m+p}) + (Q_m P_{m+p-1} - Q_{m-1} P_{m+p})] \sigma_1 - \\ - (P_m P_{m+p-1} - P_{m-1} P_{m+p}) = 0 \end{array} \right.$$

il cui determinante è evidentemente uguale all'unità.

5. LA CONDIZIONE È SUFFICIENTE: Si abbia l'equazione di 2° grado

$$(5) \quad a\sigma^2 - b\sigma + c = 0$$

in cui supporremo possibile la scomposizione di b in due parti $b_1 + b_2$ tali che si abbia $ac - b_1b_2 = 1$.

Potremo scrivere l'equazione data sotto la forma

$$\sigma = \frac{b_2\sigma - c}{a\sigma - b_1}.$$

Una funzione che sia radice dell'equazione data dovrà dunque trasformarsi in sè stessa mediante la sostituzione lineare $\sigma = S\sigma$ a determinante uguale ad 1.

Si immagini una radice σ_1 di questa equazione sviluppata in frazione continua e supponiamo che questa frazione continua sia convergente. Se $\frac{P_n}{Q_n}$ è l' n^{ma} ridotta si avrà

$$(6) \quad \sigma_1 = \frac{P_n - P_{n-1}\eta}{Q_n - Q_{n-1}\eta}$$

ed eliminando σ_1 avremo:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta &= \frac{(aP_n^2 + bP_nQ_n + cQ_n^2) - (aP_nP_{n-1} + bP_{n-1}Q_n + cQ_nQ_{n-1})\eta}{(aP_nP_{n-1} + bP_nQ_{n-1} + cQ_nQ_{n-1}) - (aP_{n-1}^2 + bP_{n-1}Q_{n-1} + cQ_{n-1}^2)\eta} = \\ &= \frac{A - B\eta}{A_1 - B_1\eta} \end{aligned} \right.$$

in cui è $AB_1 - A_1B = 1$.

Se dunque dimostreremo che $\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}$ sono due ridotte consecutive nello sviluppo di η in frazione continua, la formula (7) ci mostrerà che da un certo punto in poi la successione $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$ riproduce tutta la successione primitiva $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$; la η potrà così svilupparsi in frazione continua periodica semplice e la σ_1 ,

per la formula (6) rappresenterà una periodica mista con lo stesso periodo della η . Ora si ha :

$$\frac{A}{B} = \frac{aP_n^2 + bP_nQ_n + cQ_n^2}{aP_nP_{n-1} + bP_{n-1}Q_n + cQ_nQ_{n-1}} =$$

$$= \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{Q_nQ_{n-1}} \frac{a\frac{P_n}{Q_n} + b}{a\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^2 + b\frac{P_n}{Q_n} + c}}.$$

Ora, qualunque sia n il quoziente $\frac{P_n}{Q_n}$ è sempre del grado -1 .

Il grado v del quoziente $\frac{a\frac{P_n}{Q_n} + b}{a\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^2 + b\frac{P_n}{Q_n} + c}$ è dunque indipen-

dente da n . Potremo quindi sempre disporre di n in modo che sia $2n - 1$ (grado di Q_nQ_{n-1}) maggiore di v . Saremo allora certi che lo sviluppo in serie di potenze decrescenti di x della frazione

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{Q_nQ_{n-1}} \frac{a\frac{P_n}{Q_n} + b}{a\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^2 + b\frac{P_n}{Q_n} + c}}$$

incomincia con l'unità. Dunque lo sviluppo di $\frac{A}{B}$ comincerà con lo stesso termine di quello di $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$. Ma il grado di Q_n in x è superiore per un'unità a quello di Q_{n-1} , anche il grado di A supererà quello di B per un'unità. Analoga dimostrazione potrebbe ripetersi per A_1, B_1 .

Si consideri ora la differenza

$$\eta - \frac{A}{A_1} = \frac{\eta}{A_1(A_1 - B_1\eta)}.$$

Se A_1 è del grado μ , B_1 è del grado $\mu - 1$, η è del grado -1 , quella differenza è del grado $-(2\mu + 1)$. La $\frac{A}{A_1}$ è dunque veramente la ridotta d'ordine μ^{mo} nello sviluppo di η .

Così

$$\eta - \frac{B}{B_1} = \frac{\eta}{B_1(A_1 - B_1\eta)}$$

è del grado $-(2\mu - 1)$, dunque $\frac{B}{B_1}$ è la ridotta d'ordine $\mu - 1^{\text{mo}}$ c. d. d.

6. Per la condizione ora dimostrata, affinchè una funzione σ_1 , che è radice di un'equazione algebrica di 2° grado: $a\sigma^2 + 2b\sigma + c = 0$, possa svilupparsi in frazione continua periodica è necessario e sufficiente che il polinomio b possa scomporsi nella somma di due $b_1 + b_2$, in modo che si abbia $ac - b_1b_2 = 1$.

Si hanno dunque le due equazioni:

$$b_1 + b_2 = 2b, \quad b_1b_2 = ac - 1$$

da cui:

$$b_1 = b + \sqrt{b^2 - ac + 1}, \quad b_2 = b - \sqrt{b^2 - ac + 1}.$$

Ma b_1, b_2 debbono essere *polinomi razionali ed interi in x* ; si vede che, affinchè la scomposizione sia possibile nel modo richiesto, occorre che la quantità sotto il segno sia un quadrato perfetto. Ma $b^2 - ac$ è il discriminante dell'equazione proposta; *potrà dunque sempre svilupparsi in frazione continua periodica una funzione σ che sia radice di un'equazione di 2° grado il cui discriminante aumentato di un'unità sia uguale al quadrato di un polinomio intero in x* . O, più generalmente, si potranno considerare le equazioni che, mediante sostituzioni della forma: $\sigma = \frac{a_1\eta + b_1}{c_1\eta + d_1}$, dove a_1, b_1, c_1, d_1 sono polinomi interi qualunque, si ottengono dalla proposta, e cercare se

per una tale equazione :

$$(a a_1^2 + 2 b c_1 a_1 + c c_1^2) \eta^2 + 2 (a a_1 b_1 + b b_1 c_1 + a_1 b d_1 + c c_1 d_1) \eta + (a b_1^2 + 2 b b_1 d_1 + c d_1^2) = 0$$

la condizione enunciata è soddisfatta. Ora in una tale equazione il discriminante ha la forma :

$$(b^2 - ac)(a_1 d_1 - b_1 c_1)^2,$$

indicando con A il discriminante dell'equazione data e con u il determinante $(a_1 d_1 - b_1 c_1)$ della sostituzione dovrà essere soddisfatta la condizione :

$$(8) \quad Au^2 + 1 = v^2$$

dove u e v sono polinomi interi da determinarsi.

Manifestamente poi, ogni qualvolta quest'equazione indeterminata di 2° grado possa esser risolta con polinomi interi, la periodicità della frazione continua rimane provata, perchè, trovato il valore di u , per formare una sostituzione lineare di determinante u , basterebbe porre $\sigma = -u\eta$; e, nell'equazione $a\eta^2 - 2b\eta + c = 0$ risultante, $b = b_1 + b_2$ con $b_1 = b + v$, $b_2 = b - v$ perchè fosse verificata la condizione $ac - b_1 b_2 = 1$.

E se l'equazione stessa non potesse risolversi con polinomi interi, per quanto abbiamo detto, la frazione continua non potrebbe essere periodica.

Tutto si riduce dunque alla ricerca della possibilità di risoluzione, mediante polinomi interi, dell'equazione indeterminata di 2° grado :

$$(9) \quad Au^2 + 1 = v^2.$$

7. Si consideri p. es. l'equazione :

$$y^2 - 2y(x - 1) + 2 = 0.$$

Il discriminante di quest'equazione è : $A = x^2 - 2x - 1$. Si

dovrà dunque risolvere con polinomi interi l'equazione:

$$u^2(x^2 - 2x - 1) + 1 = v^2.$$

Quest'equazione potrà esser ridotta immediatamente ponendo:

$$u^2 = x^2 - 2x + 1, \quad u = x - 1$$

perchè allora risulterà:

$$v^2 = (x^2 - 2x)^2, \quad v = x^2 - 2x.$$

Dovremo dunque trasformare l'equazione data mediante la sostituzione: $y = (x - 1)\sigma$. Si avrà così l'equazione:

$$\sigma^2(x - 1)^2 - 2(x - 1)^2\sigma + 2 = 0.$$

Scomporremo il coefficiente $b = (x - 1)^2$, nella somma dei due:

$$b_1 = b + v = 2x^2 - 4x + 1, \quad b_2 = b - v = 1.$$

Allora si avrà:

$$\sigma^2(x - 1)^2 - (2x^2 - 4x + 1)\sigma - \sigma + 2 = 0,$$

in cui il determinante è $= 1$. Le radici dell'equazione data, dovranno dunque essere sviluppabili in frazione continua periodica. Si può anzi determinare immediatamente il periodo osservando che può scriversi:

$$\sigma = \frac{1}{x-1} \frac{2-\sigma}{2(x-1) - (x-1)\sigma - \frac{1}{x-1}}.$$

Chiamando con η la seconda frazione del secondo membro, avremo: $\sigma = \frac{1}{x-1} \eta$ od anche $(x-1)\sigma = \eta$.

Dunque sostituendo:

$$\sigma = \frac{1}{x-1} \frac{2 - \frac{\eta}{x-1}}{2(x-1) - \eta - \frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1} \frac{1}{(x-1) - \frac{1}{2(x-1) - \eta}}$$

che verifica appunto la periodicità accennata.

8. Se il discriminante A non dipende da x , cioè si riduce ad una costante numerica, la equazione (9) è una ordinaria equazione Pelliana che si può sempre risolvere. In particolare rimane così dimostrato con nuovo metodo il *teorema dovuto al Lagrange* relativo alle radici di equazioni di 2° grado a coefficienti numerici.

Ma se il discriminante A dipende da una variabile x , nulla può dirsi sulla possibilità di risoluzione dell'equazione (9) poichè tutti i metodi di dimostrazione e risoluzione adoperati finora per l'equazione Pelliana, riposano esclusivamente sul concetto di numero intero e positivo. Si può osservare anzi che: *Nel caso in cui il discriminante A sia di grado impari in x , l'equazione (9) è certamente impossibile con polinomi interi.*

E questo risulta evidente dal fatto che il termine Au^2 è in tal caso di grado impari in x , il termine v^2 di grado pari, la loro differenza non può ridursi all'unità (*).

9. *Se una delle radici di un'equazione di 2° grado a coefficienti interi in x si può sviluppare in frazione continua periodica, l'altra radice si potrà sviluppare in frazione pure periodica il cui periodo è formato con gli stessi elementi presi in ordine inverso, che costituivano il periodo della prima.*

La frazione continua in cui si può sviluppare la prima radice, sia periodica semplice e si abbia

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \dots \frac{1}{a_p - \frac{1}{a_1 - \dots}}}}$$

L'equazione di secondo grado di cui σ_1 è radice, avrà allora la forma:

$$Q_{p-1}\sigma_1^2 - (P_{p-1} + Q_p)\sigma_1 + P_p = 0.$$

(*) Questa osservazione mi fu comunicata dal prof. Zsigmondy di Vienna.

Si consideri ora la funzione

$$\sigma_2 = a_p - \frac{1}{a_{p-1} - \dots - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_p - \dots}}}$$

La funzione inversa di questa

$$\frac{1}{\sigma_2} = y = \frac{1}{a_p - \dots - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_p - \dots}}}$$

soddisferà per la stessa formula, all'equazione:

$$Q'_{p-1} y^2 - (P'_{p-1} - Q'_p) y - P'_p = 0;$$

onde sarà:

$$P'_p \sigma_2^2 - (P'_{p-1} + Q'_p) \sigma_2 + Q'_{p-1} = 0$$

l'equazione cui soddisfa la σ_2 .

Ora siccome le P e Q sono formate con gli elementi $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_p$, e le P', Q' con gli elementi stessi ma in ordine inverso, così, pel teorema di GERONO, sarà

$$P'_p = Q_{p-1}, \quad P'_{p-1} = P_{p-1}, \quad Q'_p = Q_p, \quad Q'_{p-1} = P_p.$$

L'equazione cui soddisfa la σ_2 sarà dunque:

$$Q_{p-1} \sigma_2^2 - (P_{p-1} + Q_p) \sigma_2 + P_p = 0$$

quella stessa cioè cui soddisfaceva la σ_1 , c. d. d.

Se la frazione continua in cui si svolge la radice σ_1 sia periodica mista, mediante la formula (3) si riconduce al caso precedentemente considerato.

EMMA BORTOLOTTI.