Zur Theorie der Transformation algebraischer Functionen.

(Von Herrn *H. Weber* in Zürich.)

Besteht zwischen zwei Veränderlichen s, z eine irreductible algebraische Gleichung, welche in Bezug auf s vom Grade n, in Bezug auf z vom Grade m ist:

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0,$$

so wird der Verlauf der Function s durch eine die z-Ebene allenthalben n-fach bedeckende *Riemann*sche Fläche T dargestellt. Ist die Ordnung des Zusammenhangs dieser Fläche $2p+1$, die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte w, wobei ein Verzweigungspunkt höherer Ordnung als eine Anhäufung von mehreren einfachen Verzweigungspunkten betrachtet wird, so besteht nach *Riemann* die Relation:

$$p = \tfrac{1}{2}w - n + 1.$$

Die Zahl p heisst nach *Clebsch* das Geschlecht der Gleichung $F = 0$.

Es sei nun

$$z_1 = \varphi(s, z)$$

irgend eine rationale Function von s und z, welche in n_1 Punkten der Fläche T unendlich gross von der ersten Ordnung wird, und daher jeden beliebigen Werth in n_1 Punkten dieser Fläche annimmt.

Durch Vermittlung dieser Function wird die Fläche T in den kleinsten Theilen ähnlich auf eine andere Fläche T_1 abgebildet, welche die z_1-Ebene überall n_1-fach bedeckt, so dass jedem Punkt von T *ein* Punkt von T_1 entspricht und umgekehrt. Es ist sonach der Zusammenhang der Fläche T_1 ebenfalls von der Ordnung $2p+1$ wie der von T, und jede eindeutige Function, des Ortes in T ist eine ebensolche Function in T_1, welche an entsprechenden Stellen die gleichen Unstetigkeiten besitzt.

Ist nun

$$s_1 = \psi(s, z)$$

eine zweite rationale Function von s und z, die in m_1 Punkten von T unendlich von der ersten Ordnung wird, so ist sie auch eindeutig in T_1 bestimmt und ist, abgesehen von den m_1 Punkten, in denen sie unendlich wird, in T_1 stetig, woraus folgt, dass zwischen s_1 und z_1 eine algebraische Gleichung besteht:

$$F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1}) = 0,$$

in welcher F_1 eine ganze Potenz einer nicht in rationale Factoren zerfällbaren Function $\Phi(\overset{\nu}{s_1}, \overset{\mu}{z_1})$ ist. Es sei demnach:

$$F_1(\overset{n_1}{s_1}, \overset{m_1}{z_1}) = (\Phi(\overset{\nu}{s_1}, \overset{\mu}{z_1}))^\lambda,$$

so dass:

$$n_1 = \lambda\nu, \qquad m_1 = \lambda\mu.$$

Die Potenz λ ist im Allgemeinen, d. h. wenn über die Lage der Unstetigkeitspunkte der Function s_1 nicht besondere Voraussetzungen gemacht werden, die erste. Sie ist jedenfalls dann die erste, wenn die Unstetigkeitspunkte von s_1 in T nicht gruppenweise in solche Punkte fallen, in denen z_1 denselben Werth hat.

In diesem Fall können alle in T_1 eindeutig bestimmten Functionen, die abgesehen von einzelnen Punkten, in denen sie unendlich von endlicher Ordnung werden, stetig bleiben, also auch s und z rational durch s_1, z_1 ausgedrückt werden. Die Substitution

$$z_1 = \varphi(s, z), \qquad s_1 = \psi(s, z),$$

durch welche die Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ in $\Phi(\overset{\nu}{s}, \overset{\mu}{z}) = 0$ transformirt wird, heisst in diesem Fall umkehrbar und die Transformation eindeutig.

Aus der gleich hohen Ordnung des Zusammenhangs der Flächen T und T_1 folgt der *Riemann*sche Satz:

Zwei durch eindeutige Transformation aus einander entstandene algebraische Gleichungen haben dasselbe Geschlecht.

Es soll jetzt die Umkehrung dieses Satzes bewiesen werden, nämlich:

Führt die Elimination von s, z aus den drei Gleichungen

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0, \quad z_1 = \varphi(s, z), \quad s_1 = \psi(s, z)$$

auf eine irreductible Gleichung

$$\Phi(\overset{\nu}{s_1}, \overset{\mu}{z_1}) = 0$$

vom selben Geschlecht wie $F = 0$, so ist die Substitution umkehrbar, d. h. es können s und z rational durch s_1 und z_1 ausgedrückt werden, vorausgesetzt dass die Ordnung des Geschlechts grösser als 1 ist.

Es hat sich gezeigt, dass nur dann s und z nicht rational durch s_1, z_1 ausdrückbar sind, wenn die oben eingeführte Zahl $\lambda > 1$ ist. In diesem Fall wird die wahre Verzweigungsart der Function s_1 nicht durch die Fläche T_1 dargestellt, sondern durch eine andere Fläche T', welche die z_1-Ebene überall nur $\nu = \frac{n_1}{\lambda}$-fach bedeckt, und in welcher die Fläche T_1 überall λ-fach ausgebreitet ist.

Es sei jetzt w_1 die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte in T_1, w' die entsprechende Zahl für die Fläche T' und $2p'+1$ die Ordnung des Zusammenhangs der letzteren. Dann ist:

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{1}{2}w_1 - n_1 + 1, \\ p' &= \tfrac{1}{2}w' - \nu + 1. \end{aligned}$$

Nun besteht aber zwischen den beiden Zahlen w_1 und w' eine gewisse Beziehung. Ueberall da nämlich, wo die Fläche T' einen einfachen Verzweigungspunkt besitzt, finden sich in T_1 λ einfache Verzweigungspunkte, von denen keiner aufgehoben werden kann. Der Beweis hierfür ergiebt sich aus folgender Betrachtung:

Es mögen einem beliebigen Werthsystem (z_1', s_1') die Werthe der Function s:

$$s^{(\alpha_1)}, \quad s^{(\alpha_2)}, \quad \ldots \quad s^{(\alpha\lambda)}$$

entsprechen. Dem in einem anderen Blatt der Fläche T' an derselben Stelle stattfindenden Werthsystem (z_1', s_1'') mögen die Werthe

$$s^{(\beta_1)}, \quad s^{(\beta_2)}, \quad \ldots \quad s^{(\beta\lambda)}$$

entsprechen. Hängen nun in einem Verzweigungspunkt $\mathfrak{z}'$ die beiden Blätter s_1' und s_1'' mit einander zusammen, so lässt sich die Function s_1 auf einem geschlossenen Wege, der den Verzweigungspunkt $\mathfrak{z}$, aber keinen anderen einschliesst, in der Weise stetig fortführen, dass man von dem Werthsystem (z_1', s_1') zu dem Werthsystem (z_1', s_1'') gelangt. Dadurch geht aber die Werthreihe $s^{(\alpha_1)}, s^{(\alpha_2)}, \ldots s^{(\alpha\lambda)}$ über in die Werthreihe $s^{(\beta_1)}, s^{(\beta_2)}, \ldots s^{(\beta\lambda)}$, so dass jeder Werth der einen Reihe in einen bestimmten Werth der anderen übergeführt wird. Daraus folgt, dass je eines der λ Blätter der Fläche T_1, die über dem Punkt (z_1', s_1') der Fläche T' liegen, in dem Verzweigungspunkt $\mathfrak{z}$ mit einem der λ Blätter, die in (z_1', s_1'') liegen, zusammenhängen muss, und dass demnach die Fläche T_1 in $\mathfrak{z}$ λ einfache Verzweigungspunkte besitzt.

Ausserdem kann T_1 noch eine gewisse Anzahl w'' andere einfache

Verzweigungspunkte haben, denen keine solche in T' entsprechen. Demnach ist:

$$w_1 = \lambda w' + w'',$$

und es ergiebt sich:

$$p = \tfrac{1}{2}\lambda w' + \tfrac{1}{2}w'' - \lambda\nu + 1 = \lambda p' + \tfrac{1}{2}w'' - \lambda + 1.$$

Soll nun $p' = p$ sein, so folgt aus dieser Relation:

$$\tfrac{1}{2}w'' = (\lambda - 1)(1 - p).$$

Da λ positiv ist, und w'' seiner Natur nach gleichfalls $\gtreqless 0$ sein muss, so kann diese Relation nur dann bestehen, wenn entweder $\lambda = 1$, also die angenommene Substitution umkehrbar ist, oder wenn $p = 0$ oder $= 1$ ist, wodurch der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Für $p = 1$ ist $w'' = 0$, und λ kann jeden beliebigen ganzzahligen positiven Werth haben. Die Substitution wird in diesem Fall nicht mehr allgemein umkehrbar sein. In der That ist die Aufgabe, für ein gegebenes λ alle rationalen Substitutionen $z_1 = \varphi(s, z)$, $s_1 = \psi(s, z)$ zu finden, nichts Anderes als das *Jacobi*sche Transformationsproblem der elliptischen Functionen. Die angestellte Betrachtung zeigt also zugleich, dass ein Transformationsproblem in diesem Sinne für die *Abel*schen Functionen nicht existirt. Für $p = 0$ wird $w'' = 2(\lambda - 1)$, eine Gleichung, die für beliebige Werthe von λ bestehen kann. In diesem Fall sind die Beispiele für die nicht umkehrbaren Substitutionen trivial. Besteht nämlich zwischen s und z eine lineare Gleichung und setzen wir beispielsweise

$$z_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1 z^\lambda}{\alpha'_1 + \beta'_1 z^\lambda}, \quad s_1 = \frac{\alpha_2 + \beta_2 z^\lambda}{\alpha'_2 + \beta'_2 z^\lambda},$$

so besteht zwischen s_1 und z_1 gleichfalls eine lineare Gleichung, und trotzdem ist nicht z und s rational durch z_1 und s_1 ausdrückbar.

Zürich, im Juni 1873.