

SUR LES FONCTIONS
DE n VARIABLES COMPLEXES

PAR

PIERRE COUSIN

À CAEN.

Introduction.

Dans un mémoire remarquable publié dans le tome 2 des *Acta mathematica* M. POINCARÉ a démontré le théorème suivant :

Si une fonction analytique de deux variables complexes n'admet à distance finie que des singularités non essentielles elle est le quotient de deux fonctions entières.

Le mémoire de M. POINCARÉ est le seul travail publié sur cette importante question. Je me suis proposé d'établir pour les fonctions de n variables complexes un théorème plus général que celui de M. POINCARÉ, en employant à cet effet un procédé de démonstration qui m'est personnel.

Je me suis efforcé dans cette étude d'établir la plus grande analogie possible avec la théorie connue des fonctions d'une seule variable complexe.

M. MITTAG-LEFFLER a, dans un théorème devenu classique, démontré l'existence et donné l'expression analytique d'une fonction d'une variable complexe n'admettant pour points singuliers que des points donnés à l'avance et formant un ensemble dénombrable dont le seul point limite est le point ∞ et telle qu'en chacun de ses points singuliers elle se comporte comme une fonction donnée. Deux théorèmes importants dus à M. WEIERSTRASS peuvent être considérés comme des conséquences successives du théorème de M. MITTAG-LEFFLER; le premier est relatif à

l'existence d'une fonction entière admettant pour zéros des points donnés à l'avance; le second relatif à l'expression sous forme d'un quotient de deux fonctions entières d'une fonction d'une variable qui n'admet comme points singuliers que des pôles. Ces trois théorèmes forment un ensemble de trois propositions intimement reliées entre elles. Je crois être arrivé à donner pour les fonctions de n variables complexes un groupe de trois propositions correspondant aux trois précédentes, et reliées entre elles d'une façon analogue. Toutefois, en ce qui concerne la deuxième de ces propositions, une différence importante s'impose entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables; elle est due à ce fait qu'une fonction régulière d'une seule variable n'admet pour zéros que des points isolés, tandis que les zéros d'une fonction de plusieurs variables complexes ne sont jamais des points isolés; le problème ne se présente donc plus de la même façon dans les deux cas; les énoncés des théorèmes VI et IX indiqueront comment on peut poser le problème dans le cas de n variables complexes.

Parmi les travaux se rattachant aux questions que j'ai traitées je signalerai, outre le mémoire précité de M. POINCARÉ, deux extensions aux fonctions de n variables complexes du théorème de M. MITTAG-LEFFLER données par M. APPELL¹ et par M. DAUTHEVILLE.²

Pour l'exposition, j'ai divisé mon travail en quatre parties.

La première contient la démonstration de quelques propositions préliminaires, qui sont, je crois, pour la plupart nouvelles; toutefois M. PAINLEVÉ³ a déjà donné une proposition analogue, moins générale.

La deuxième partie est consacrée à la démonstration d'un théorème qui est, pour la suite, d'une importance capitale.

La conclusion de la troisième partie est le théorème suivant:

Si une fonction de n variables complexes n'admet que des singularités non essentielles à l'intérieur de n cercles ayant pour centres les n origines et dont chacun a un rayon fini ou infini, cette fonction est le quotient de deux séries entières par rapport aux n variables, convergentes à l'intérieur des n cercles.

¹ Acta mathematica, tome 2, page 71.

² Thèse, Paris, Gauthier-Villars, pages 44 et 50.

³ Thèse, Paris, Gauthier-Villars 1887, page 68.

La quatrième partie a pour but la démonstration de quelques théorèmes qui sont, dans une certaine mesure, l'extension pour n variables des théorèmes donnés pour une variable par M. MITTAG-LEFFLER dans le tome 4 des Acta mathematica.

En terminant cette introduction, qu'il me soit permis de remercier MM. POINCARÉ et APPELL pour le bienveillant accueil qu'ils ont fait à mes premières recherches, et de leur exprimer ici ma profonde reconnaissance.

I.

Propositions préliminaires.

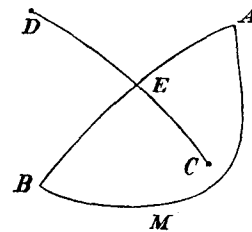
1. J'emploierai pour les variables complexes la représentation géométrique ordinaire: chaque variable sera représentée par un point d'un plan.

J'établirai d'abord quelques propriétés de la fonction $\varphi(y)$ définie par l'égalité:

$$(1) \quad \varphi(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{AEB} \frac{dz}{z-y}.$$

y et z sont deux variables complexes représentées sur le même plan: l'intégrale est prise le long du chemin AEB de A vers B ; je suppose pour plus de simplicité que ce chemin ne présente aucune boucle. Pour distinguer entre les points A et B , je dirai que A est l'origine et B l'extrémité du chemin d'intégration; lorsque cette distinction ne sera pas nécessaire les deux points A et B seront appelés les deux extrémités du contour d'intégration: aucune confusion ne pourra résulter par la suite de cette désignation.

Soit CED un chemin supposé parcouru de C vers D et traversant AEB en un seul point E ; je trace la ligne AMB ne traversant pas CE et telle que le point C soit intérieur au contour $AMBEA$: si le sens AEB est direct sur le périmètre du contour $AMBEA$, je



dirai que CED traverse AB dans le sens direct: dans le cas contraire CED sera dit traverser AB dans le sens indirect.

La fonction $\varphi(y)$ qui est définie par l'égalité (1), est régulière en tout point qui n'est pas situé sur le chemin d'intégration AEB : ce chemin AEB est une *coupure* pour la fonction $\varphi(y)$.

L'expression explicite de $\varphi(y)$ est d'ailleurs, en désignant par a et b les valeurs de z correspondant aux deux points A et B :

$$\varphi(y) = \frac{1}{2i\pi} \log \frac{b-y}{a-y}$$

en prenant pour le logarithme une détermination convenablement choisie.

De cette expression explicite de $\varphi(y)$ se déduisent les propositions suivantes:

1°. Si l'on fait parcourir au point y un chemin CED traversant AB au seul point E , la *continuation analytique* de $\varphi(y)$ est régulière au point E et en tout point de ED ; l'expression de cette continuation analytique est en tout point de ED donné par: $1 + \varphi(y)$, si CED traverse AB dans le sens direct; et par: $-1 + \varphi(y)$ dans le cas contraire.

2°. La continuation analytique de la différence:

$$\varphi(y) - \frac{1}{2i\pi} \log(b-y),^1$$

est régulière au point B ; et la continuation analytique de:

$$\varphi(y) + \frac{1}{2i\pi} \log(a-y)$$

est régulière au point A .

2. Je considère une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ des $(n+1)$ variables complexes x_1, x_2, \dots, x_n, y représentées géométriquement sur $(n+1)$ plans différents. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sont n contours fermés, simples ou complexes, tracés respectivement sur les n plans des n variables x_1, x_2, \dots, x_n ; l'ensemble de ces contours sera désigné par γ ; l'ensemble des valeurs x_1, x_2, \dots, x_n sera le point x ; je dirai que x est intérieure à γ si x_1, x_2, \dots, x_n sont respectivement intérieures à $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

¹ La détermination à prendre pour $\log(b-y)$ est arbitraire.

Pour abréger l'écriture, j'écrirai $f(x, y)$ au lieu de $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ toutes les fois qu'il n'en pourra résulter aucune confusion.

Γ désigne un contour fermé, simple ou complexe du plan de la variable y ; (x, y) sera dit intérieur à (γ, Γ) si x et y sont respectivement à l'intérieur de γ et Γ .

Cela posé, je suppose la fonction $f(x, y)$ régulière tant que x est dans γ et y dans Γ .

Je définis une fonction $\Phi(x, y)$ des $(n + 1)$ variables x_1, x_2, \dots, x_n, y par l'égalité:

$$(2) \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{AEB} \frac{f(x, z) dz}{z - y},$$

z est représenté sur le même plan que la variable y ; le chemin d'intégration AEB est supposé tout entier à l'intérieur de Γ .

La fonction ainsi définie est régulière pour x intérieur à γ et y quelconque dans son plan, mais non situé sur la ligne d'intégration AEB ; cette dernière est pour $\Phi(x, y)$ une *coupure* relative à la seule variable y .

Je vais étudier la continuation analytique de $\Phi(x, y)$ lorsque y traverse le chemin AEB , x se déplaçant en même temps d'une façon quelconque à l'intérieur de γ .

Pour cela, je remarquerai d'abord que la fonction $\frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y}$ est régulière pour x intérieur à γ et y et z intérieurs à Γ . Soit, en effet: $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n, y = b, z = c$ un point intérieur à (γ, Γ) ; si b n'est pas égal à c , il est clair que la fonction considérée est régulière en ce point. Je suppose donc $c = b$, et je pose:

$$\begin{aligned} x_p &= x'_p + a_p, & (p=1, 2, \dots, n) \\ y &= y' + b, \\ z &= z' + b. \end{aligned}$$

Je trace sur les plans des n variables x , n cercles de rayon R de centres a_1, a_2, \dots, a_n , en supposant R assez petit pour que ces n cercles soient respectivement intérieurs à $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$; et sur le plan de la variable y , je trace un cercle de centre b et de rayon ρ assez petit pour que ce cercle soit intérieur à Γ .

Je désigne par C l'ensemble des $(n + 1)$ cercles tracés. La fonction $f(x, y)$ est développable en série entière en $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, y'$, convergente à l'intérieure de C ; soit:

$$\Sigma A x_1'^{a_1} x_2'^{a_2} \dots x_n'^{a_n} y'^{\beta}$$

ce développement; en y remplaçant chaque coefficient A par son module $|A|$, les variables x par R , et y par ρ , on obtient une série convergente:

$$(3) \quad \Sigma |A| R^{a_1+a_2+\dots+a_n} \rho^{\beta}.$$

On a à l'intérieur de C :

$$\frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y} = \frac{\Sigma A x_1'^{a_1} x_2'^{a_2} \dots x_n'^{a_n} (z'^{\beta} - y'^{\beta})}{z' - y'}$$

En effectuant la division par $z' - y'$ de chaque terme du second membre, on est conduit à la série:

$$(4) \quad \Sigma A x_1'^{a_1} x_2'^{a_2} \dots x_n'^{a_n} (z'^{\beta-1} + z'^{\beta-2} y' + \dots + z' y'^{\beta-2} + y'^{\beta-1})$$

qui devient, en remplaçant chaque coefficient A par son module $|A|$, les x par R , et y et z par un nombre positif r :

$$(5) \quad \Sigma \beta |A| R^{a_1+a_2+\dots+a_n} r^{\beta-1}$$

cette dernière série est convergente pour $r < \rho$, comme étant la dérivée par rapport à r de la série (3) où l'on aurait remplacé ρ par r .

La série (4) est donc absolument convergente dans C ; par suite $\frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y}$ est régulière au point $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, \dots, x_n = a_n, y = z = b$, ce que je voulais établir.

On peut dès lors poser:

$$\frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y} = F(x, y, z),$$

$F(x, y, z)$ étant régulière en tout point (x, y, z) intérieur à (γ, Γ) .

L'égalité (2) peut être maintenant écrite pour (x, y) intérieur à (γ, Γ) sous la forme:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{AEB} F(x, y, z) dz + \frac{f(x, y)}{2i\pi} \int_{AEB} \frac{dz}{z - y}$$

ou en posant comme précédemment:

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{AEB} \frac{dz}{z-y},$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{AEB} F(x, y, z) dz + \varphi(y) f(x, y).$$

L'intégrale qui figure au second membre est une fonction de x et y régulière en tout point intérieur à (γ, I) : il en est de même par hypothèse de $f(x, y)$; enfin la fonction $\varphi(y)$ a été étudiée dans le paragraphe précédent. On en conclut immédiatement les propriétés suivantes de $\Phi(x, y)$:

1°. Si l'on fait parcourir au point y un chemin CED (de C vers D) contenu à l'intérieur de I et traversant AEB au seul point E , tandis que x se déplace d'une façon quelconque à l'intérieur de γ , la continuation analytique de $\Phi(x, y)$ est régulière au point E et en tout point de ED : elle a pour expression $\Phi(x, y) + f(x, y)$ si CED traverse AB dans le sens direct et pour expression: $\Phi(x, y) - f(x, y)$ dans le cas contraire.

2°. a et b étant les valeurs de z qui correspondent aux points A et B , la continuation analytique de la différence:

$$\Phi(x, y) - \frac{f(x, y)}{2i\pi} \log(b - y),^1$$

est régulière au point B et celle de:

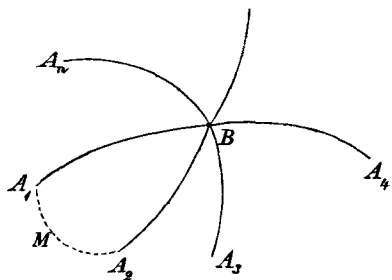
$$\Phi(x, y) + \frac{f(x, y)}{2i\pi} \log(a - y)$$

est régulière au point A .

3. Soient n chemins d'intégration A_1B, A_2B, \dots, A_nB tracés sur le plan commun aux deux variables y et z , et ayant l'extrémité B commune; le sens d'intégration est pour chaque contour de A vers B . Ces contours sont supposés ne pas se couper et n'ont par suite aucun

¹ La détermination à prendre pour $\log(b - y)$ est arbitraire.

autre point commun que B ; de plus on suppose qu'en parcourant dans le sens direct un petit cercle de centre B , on rencontre les contours



précédents dans l'ordre: A_1B, A_2B, \dots, A_nB c'est à dire par ordre d'indices croissants. Je trace alors la ligne A_1MA_2 de façon qu'il n'y ait aucun des contours précédents à l'intérieur du contour fermé $A_1BA_2MA_1$.

A chaque chemin A_pB , je fais correspondre une fonction $f_p(x, y)$ de $(n + 1)$ variables x_1, x_2, \dots, x_n, y régulière pour x intérieur à un contour fermé Γ et pour y

intérieur à un certain contour fermé C_p enveloppant le chemin A_pB . Le contour Γ est le même pour les n fonctions $f_p(x, y)$.

Je pose:

$$\varphi_p(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{A_pB} \frac{f(x, z) dz}{z - y},$$

l'intégrale est prise le long de A_pB de A_p vers B ; la fonction $\varphi_p(x, y)$ est de la forme de celle qui a été étudiée dans le paragraphe précédent.

Je définis une fonction $\Phi(x, y)$ pour x intérieur à Γ et y intérieur à BA_1MA_2B par l'égalité:

$$\Phi(x, y) = \sum \varphi_p(x, y); \quad (p=1, 2, \dots, n)$$

cette fonction est régulière en tout point intérieur à la région où je la suppose ainsi définie.

Je vais donner la condition nécessaire et suffisante pour que l'extension analytique de $\Phi(x, y)$ soit régulière au point B , x étant toujours supposé à l'intérieur de Γ .

Si b est la valeur de y correspondant au point B , l'extension analytique de la différence

$$\varphi_p(x, y) - \frac{1}{2i\pi} f_p(x, y) \log(b - y)$$

est régulière au point B ; il en sera de même de la continuation analytique de:

$$\sum \varphi_p(x, y) - \frac{1}{2i\pi} \sum f_p(x, y) \log(b - y) \quad (p=1, 2, 3, \dots, n)$$

c'est-à-dire de:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \log(b - y) \Sigma f_p(x, y).$$

La somme $\Sigma f_p(x, y)$ est régulière au point B comme chacune des fonctions qui la composent (x restant toujours dans Γ).

La condition nécessaire et suffisante pour que l'extension analytique de $\Phi(x, y)$ soit régulière au point B sera donc que:

$$\Sigma f_p(x, y) = 0,$$

identité qui a un sens bien précis pour y dans le domaine de B , x étant toujours quelconque dans Γ .

4. Un cas particulier dont la considération sera utile plus loin est celui où la somme précédente se réduit à un multiple de $2i\pi$; soit:

$$\Sigma f_p(x, y) = 2ik\pi.$$

La continuation analytique de la différence

$$\Phi(x, y) - \log(b - y)^k$$

est alors régulière au point B .

II.

Démonstration d'un théorème fondamental.

5. Les propositions qui sont l'objet du présent travail, sont la conséquence d'un théorème fondamental que je vais exposer dans cette deuxième partie.

Il sera tout d'abord question de fonctions de $(n + 1)$ variables complexes de la nature suivante: chacune de ces fonctions est définie à l'intérieur d'une certaine région pour tous les points de laquelle elle n'est pas supposée régulière, mais dans laquelle elle est *monotrope* et

n'admet pas *d'espace lacunaire*. Cette dernière condition signifie d'une façon précise que si M désigne un point quelconque de la région considérée, il existe un point aussi voisin que l'on veut de M pour lequel la fonction est régulière.

Si deux fonctions de cette nature se trouvent définies simultanément à l'intérieur d'une même portion d'aire et si leur différence est régulière en tout point de cette aire, je dirai que les deux fonctions sont *équivalentes* dans la portion d'aire considérée; si leur différence est régulière en un point, les deux fonctions seront *équivalentes* en ce point.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions F et Φ soient équivalentes en un point M , est que l'on ait pour les points situés dans le domaine de M :

$$F = \Phi + f,$$

f étant une fonction régulière en M .

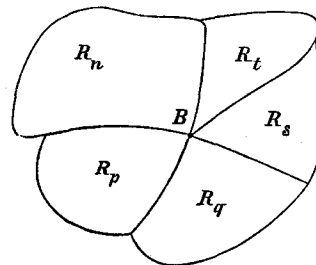
Il est clair que deux fonctions équivalentes en un point à une même troisième sont équivalentes entre elles.

Cela posé, soit Γ un ensemble de contours fermés simples ou composés $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ tracés respectivement sur les n plans des n variables x_1, x_2, \dots, x_n . Dans tout ce paragraphe le point x (x_1, x_2, \dots, x_n) sera constamment supposé à l'intérieur de Γ et pourra être quelconque dans Γ ; les seules distinctions à faire dans la position des points représentant des variables porteront sur une $(n + 1)^{\text{ème}}$ variable y ; de telle sorte que quand je dirai que la fonction $f(x, y)$ de x_1, x_2, \dots, x_n, y est régulière en un point du plan de la variable y , cela signifiera qu'elle est régulière en ce point quel que soit x à l'intérieur de Γ .

Soit S une aire connexe du plan de la variable y : cette aire S est subdivisée en régions $R_1, R_2, \dots, R_p \dots$ en nombre quelconque mais fini, et dont chacune est limitée par un contour fermé simple. Deux régions R_n et R_p seront dites contiguës si elles ont une portion commune de périmètre: cette portion commune sera désignée par l_{np} ; l_{np} peut être une ligne continue, ou bien être composée d'un certain nombre de lignes continues distinctes mais en nombre fini: les extrémités de l_{np} seront les extrémités des différentes lignes qui la composent; l_{np} est la ligne que y doit traverser pour passer de la région R_n à la région R_p sans entrer dans une autre région que ces deux-là; j'aurai à envisager des intégrales

pour lesquelles le chemin d'intégration sera l_{np} ; j'établis à cet effet la distinction suivante entre les deux notations l_{np} et l_{pn} : l_{np} sera parcourue pour l'intégration dans le sens qui est direct sur le périmètre de R_n ; l_{pn} sera parcourue dans le sens qui est direct sur le périmètre de R_p ; ainsi l_{np} et l_{pn} désigneront le même chemin d'intégration mais avec des sens différents; il résulte de là que y , en passant de R_n à R_p traversera l_{np} dans le sens *direct*, et l_{pn} dans le sens *indirect*.

J'aurai encore à considérer les points qui sont communs aux périmètres de plus de deux régions, tout en étant intérieurs à S (et non sur son périmètre); ces points seront appelés des *nœuds*; soit B un de ces nœuds; si j'appelle $R_n, R_p, R_q, \dots, R_s, R_t$ les régions que l'on traverse successivement en faisant le tour du point B dans le sens direct, B est l'*extrémité* commune aux chemins d'intégration $l_{np}, l_{pq}, \dots, l_{st}, l_{tn}$; les régions $R_n, R_p, R_q, \dots, R_s, R_t$ seront dites *attachées* au nœud B .



A chaque région R_p je fais correspondre une fonction des $(n + 1)$ variables complexes x_1, x_2, \dots, x_n, y , $f_p(x, y)$ définie pour x intérieur à Γ et pour y intérieur à un contour fermé \mathfrak{R}_p enveloppant R_p ; à l'intérieur de la région où elle est définie $f_p(x, y)$ est supposée *monotrope et sans espace lacunaire*; on fait de plus l'hypothèse suivante: si R_p et R_n sont deux régions contiguës, \mathfrak{R}_p et \mathfrak{R}_n ont une portion d'aire commune où les deux fonctions $f_p(x, y)$ et $f_n(x, y)$ sont simultanément définies; on suppose que ces deux fonctions sont *équivalentes* dans la portion d'aire où elles sont simultanément définies; l_{np} étant tout entière dans cette portion d'aire, il résulte de là que la différence $f_n(x, y) - f_p(x, y)$ sera régulière en tout point de l_{np} , y compris ses extrémités.

Si A est un point intérieur à R_p , je dirai que $f_p(x, y)$ est la fonction correspondant au point A ; et si A est un point commun aux périmètres de plusieurs régions R_p, R_q, R_s etc. la fonction correspondant au point A sera l'une quelconque, prise à volonté, des fonctions $f_p(x, y), f_q(x, y), f_s(x, y)$ etc.

Voici le théorème que je vais établir:

Théorème fondamental. *Il existe une fonction $F(x, y)$ monotrope et*

sans espace lacunaire définie pour x intérieur à I et y intérieur à S et qui, en chaque point intérieur à S , est équivalente à la fonction correspondant à ce point.

L'expression point intérieur à S , employée dans l'énoncé précédent, exclut les points situés sur le périmètre de S .

Définition des fonctions $I_{np}(x, y)$ et $\Phi(x, y)$. Pour le démontrer, je pose, R_n et R_p étant deux régions contiguës:

$$I_{np}(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{l_{np}} \frac{f_p(x, z) - f_n(x, z)}{z - y} dz;$$

z est une variable complexe représentée sur le même plan que la variable y ; l'intégrale est prise le long de l_{np} ; si l_{np} se compose de plusieurs lignes continues distinctes, $I_{np}(x, y)$ est alors la somme d'intégrales analogues à la précédente dont les chemins d'intégration sont les différentes lignes continues composant l_{np} . Comme en tout point de cette ligne l_{np} , $f_p(x, z) - f_n(x, z)$ est régulière par hypothèse, l'intégrale précédente est de la forme de celles étudiées au paragraphe 2. $I_{np}(x, y)$ est régulière pour toute valeur de y excepté le long de l_{np} qui est une coupure pour cette fonction.

Il importe de remarquer que:

$$I_{np}(x, y) = I_{pn}(x, y),$$

car par la permutation des indices p et n le sens de l'intégration change en même temps que le signe de la fonction intégrée.

Soit posé:

$$\Phi(x, y) = \Sigma I_{np}(x, y),$$

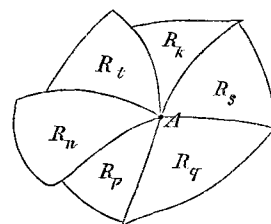
la somme Σ s'étendant à toutes les combinaisons des indices n et p correspondant à deux régions contiguës. La fonction $\Phi(x, y)$ admet comme coupures tous les chemins d'intégration l_{np} ; elle est régulière en tout point non situé sur un de ces chemins.

Définition des fonctions $\varphi_n(x, y)$. Je considère la fonction $\varphi_n(x, y)$ qui à l'intérieur de R_n est égale à $\Phi(x, y)$; elle est régulière en tout point intérieur à cette région, puisque R_n ne renferme aucune des coupures

de $\Phi(x, y)$. La *continuation analytique* de $\varphi_n(x, y)$ est encore régulière en tout point A du périmètre de R_n intérieur à S . Soit en effet l_{np} la portion du périmètre de R_n à laquelle appartient le point A . Si A n'est pas une extrémité de l_{np} , la seule intégrale dont le chemin d'intégration passe par A est $I_{np}(x, y)$; il résulte du paragraphe 2 que la continuation analytique de $I_{np}(x, y)$ en tout point de l_{np} autre que ses extrémités, est régulière. Il en est donc de même pour $\varphi_n(x, y)$, qui, à l'intérieur de R_n , est donné par:

$$\varphi_n(x, y) = \Phi(x, y) = \Sigma I_{np}(x, y).$$

Si A est une extrémité de l_{np} , comme il est par hypothèse intérieur à S , c'est alors un *nœud*; soient $R_n, R_p, R_q, \dots, R_s, R_t$ les régions que l'on traverse successivement en faisant le tour de A dans le sens direct; je partage la somme d'intégrales $\Phi(x, y)$ en deux parties; la première $\Phi_1(x, y)$ comprenant toutes les intégrales dont le chemin d'intégration a pour *extrémité* A ; la seconde $\Phi_2(x, y)$ comprenant toutes les autres intégrales:



$$\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y).$$

$\Phi_2(x, y)$ est régulière en A ; la continuation analytique de $\Phi_1(x, y)$ est aussi régulière en A , d'après le paragraphe 3; car les fonctions:

- $f_p(x, y) - f_n(x, y),$
- $f_q(x, y) - f_p(x, y),$
-
- $f_t(x, y) - f_s(x, y),$
- $f_n(x, y) - f_t(x, y),$

qui figurent dans les intégrales prises le long des chemins aboutissant en A , et qui sont toutes régulières en A , ont une somme identiquement nulle; par suite, $\Phi_1(x, y)$, considérée actuellement pour y intérieur à R_n , est, par continuation analytique, régulière en A ; il en est de même de:

$$\varphi_n(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y).$$

On a ainsi fait correspondre à chaque région R_n , une fonction $\varphi_n(x, y)$ définie et régulière à l'intérieur de R_n , et qui, *par continuation analytique sera considérée comme définie et sera régulière* en tout point, intérieur à S , du périmètre de R_n .

Relations entre deux fonctions $\varphi_n(x, y)$ et $\varphi_p(x, y)$ correspondant à deux régions contiguës ou attenantes. R_n et R_p étant deux régions contiguës et A étant un point de l_{np} autre que ses extrémités, les deux fonctions $\varphi_n(x, y)$ et $\varphi_p(x, y)$ et la différence $f_p(x, y) - f_n(x, y)$ sont régulières au point A , c'est-à-dire régulières à l'intérieur d'un petit cercle c de centre A ; la ligne l_{np} partage le cercle c en deux parties: l'une c_n intérieure à R_n , l'autre c_p intérieure à R_p . On a, à l'intérieur de c_n :

$$\varphi_n(x, y) = \Phi(x, y);$$

pour avoir l'expression de $\varphi_n(x, y)$ à l'intérieur de c_p , je remarque que, lorsque le point y passe de c_n à c_p il traverse l_{np} dans le sens direct: par suite la continuation analytique de $I_{np}(x, y)$, lorsque y passe de c_n à c_p est:

$$I_{np}(x, y) + f_p(x, y) - f_n(x, y);$$

celle de $\Phi(x, y)$ sera donc, dans les mêmes hypothèses:

$$\Phi(x, y) + f_p(x, y) - f_n(x, y);$$

on a donc, à l'intérieur de c_p :

$$\varphi_n(x, y) = \Phi(x, y) + f_p(x, y) - f_n(x, y),$$

$$\varphi_p(x, y) = \Phi(x, y),$$

d'où:

$$(1) \quad \varphi_n(x, y) - \varphi_p(x, y) = f_p(x, y) - f_n(x, y);$$

cette égalité démontrée ainsi pour y intérieur à c_p , subsiste à l'intérieur de tout le cercle c , puisque les deux membres sont des fonctions régulières dans c . La relation (1) est ainsi vérifiée en tout point A de l_{np} autre que ses extrémités; si une extrémité B de l_{np} est un nœud, la relation (1) subsistera encore dans le domaine de B ; car les fonctions $\varphi_n(x, y)$, $\varphi_p(x, y)$, $f_p(x, y) - f_n(x, y)$, sont régulières en tout point de l_{np} , y compris le point B . Soient $R_n, R_p, R_q, \dots, R_s, R_t$ les régions tra-

versées successivement lorsque l'on fait le tour de B dans le sens direct. On a dans le domaine de B , par l'application de la relation (1) aux groupes de régions contiguës R_n et R_p , R_p et R_q , ..., R_s et R_t , R_t et R_n :

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, y) - \varphi_p(x, y) &= f_p(x, y) - f_n(x, y), \\ \varphi_p(x, y) - \varphi_q(x, y) &= f_q(x, y) - f_p(x, y), \\ \dots & \\ \dots & \\ \varphi_s(x, y) - \varphi_t(x, y) &= f_t(x, y) - f_s(x, y), \\ \varphi_t(x, y) - \varphi_n(x, y) &= f_n(x, y) - f_t(x, y); \end{aligned}$$

si R_m et R_i désignent deux quelconques des régions attenantes au point B , contiguës ou non, on conclut des égalités précédentes par une combinaison simple:

$$(2) \quad \varphi_m(x, y) - \varphi_i(x, y) = f_i(x, y) - f_m(x, y).$$

Définition de $F(x, y)$. Je définis maintenant une fonction $F(x, y)$ pour x intérieur à I et y intérieur à S par la condition suivante: en tout point intérieur à R_n et dans le domaine de tout point de son périmètre intérieur à S , on a:

$$F(x, y) = \varphi_n(x, y) + f_n(x, y).$$

De là résulte que dans le domaine d'un point A intérieur à S et commun aux périmètres de plusieurs régions, on a plusieurs expressions différentes de $F(x, y)$: il faut montrer qu'elles sont identiques; en effet, si

$$\varphi_m(x, y) + f_m(x, y)$$

et

$$\varphi_i(x, y) + f_i(x, y)$$

sont deux de ces expressions, R_m et R_i sont contiguës ou attenantes au point A , et l'on a, dans les deux cas, dans le domaine de A , la relation:

$$\varphi_m(x, y) - \varphi_i(x, y) = f_i(x, y) - f_m(x, y)$$

ou:

$$\varphi_m(x, y) + f_m(x, y) = \varphi_i(x, y) + f_i(x, y).$$

La fonction $F(x, y)$ est donc définie d'une façon unique à l'intérieur de S ; elle est équivalente en tout point intérieur à S à la fonction qui correspond à ce point; car si $f_n(x, y)$ est cette fonction, on a, par définition, dans le domaine du point considéré, la relation:

$$F(x, y) = f_n(x, y) + \varphi_n(x, y),$$

$\varphi_n(x, y)$ étant régulière au point considéré.

6. Le théorème qui vient d'être démontré relativement à des fonctions *monotropes et sans espace lacunaire*, peut être étendu à des fonctions non monotropes d'une nature particulière: je veux parler des fonctions qui sont les logarithmes de fonctions régulières.

La démonstration est analogue à la précédente; les notations que je n'explique pas à nouveau conserveront le même sens que dans le paragraphe précédent.

A chaque région R_n je fais correspondre une fonction $u_n(x, y)$ régulière pour x intérieur à I et pour y intérieur à \mathfrak{R}_n , et je pose:

$$f_n(x, y) = \log u_n(x, y).$$

$f_n(x, y)$ est une fonction dont la valeur n'est déterminée qu'à un multiple près de $2i\pi$; il n'y a pas lieu de chercher à distinguer entre ces différentes valeurs de la fonction puisqu'en général elles sont susceptibles de se permuter entre elles. Chacune d'elles est d'ailleurs une fonction régulière en tout point pour lequel $u_n(x, y)$ n'est pas nul.

Je supposerai que les fonctions $u_n(x, y)$ satisfont à la condition suivante: R_n et R_p étant deux régions contiguës quelconques, la fraction:

$$\frac{u_n(x, y)}{u_p(x, y)}$$

est supposée régulière et différente de 0 dans la portion d'aire commune à \mathfrak{R}_n et \mathfrak{R}_p . Il en résulte que la différence:

$$f_n(x, y) - f_p(x, y)$$

est régulière dans la portion d'aire commune à \mathfrak{R}_n et \mathfrak{R}_p ; cette fonction n'est définie qu'à un multiple près de $2i\pi$, mais chacune de ses déterminations est régulière dans la portion d'aire considérée.

Je vais démontrer le théorème suivant:

Il existe une fonction $F(x, y)$ définie à l'intérieur de S à un multiple près de $2i\pi$ et telle que, en tout point intérieur à S , $F(x, y)$ est équivalente à la fonction $f(x, y)$ correspondant à ce point.

Je pose comme précédemment:

$$I_{np}(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{l_{np}} \frac{f_p(x, z) - f_n(x, z)}{z - y} dz;$$

on prendra pour $f_p(x, z) - f_n(x, z)$, qui est une fonction régulière en tout point de l_{np} , l'une quelconque, prise à volonté, de ses déterminations.

Soit encore, comme précédemment:

$$\Phi(x, y) = \Sigma I_{np}(x, y).$$

Voici la particularité par laquelle la démonstration actuelle va différer de la précédente; si je pose, pour y intérieur à R_n :

$$\varphi_n(x, y) = \Phi(x, y)$$

et si B est un nœud appartenant au périmètre de R_n , on n'est pas certain que la continuation analytique de $\varphi_n(x, y)$ soit régulière au point B ; décomposons, en effet, $\Phi(x, y)$ en deux parties: l'une $\Phi_1(x, y)$ comprenant la somme des intégrales dont les chemins d'intégration aboutissent au point B ; l'autre $\Phi_2(x, y)$ comprenant la somme de toutes les autres intégrales:

$$\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y).$$

$\Phi(x, y)$ est régulière au point B ; mais la continuation analytique de $\Phi_1(x, y)$ n'est pas nécessairement régulière en B ; car si, comme précédemment,

$$\begin{aligned} & f_p(x, z) - f_n(x, z), \\ & f_q(x, z) - f_p(x, z), \\ & \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & f_i(x, z) - f_i(x, z), \\ & f_n(x, z) - f_i(x, z), \end{aligned}$$

sont les fonctions qui figurent dans les intégrales dont les chemins d'intégration ont pour *extrémité* B , par suite des déterminations multiples parmi lesquelles chacune d'elles est choisie, on n'est pas assuré que leur somme est nulle identiquement dans le domaine de B ; tout ce que l'on sait, c'est que cette somme est un multiple de $2i\pi$, soit: $2iK\pi$. Dès lors si b est la valeur de z qui correspond au point B , la continuation analytique de:

$$\Phi_1(x, y) - \log(b - y)^K$$

est, d'après le paragraphe 4, régulière au point B ; il en sera de même de la continuation analytique de:

$$\Phi(x, y) - \log(b - y)^K.$$

Définition de $\Psi(x, y)$. Cela conduit à poser:

$$\Psi(x, y) = \Phi(x, y) - \Sigma \log(b - y)^K$$

la somme Σ s'étendant à tous les termes analogues à $\log(b - y)^K$ correspondant aux différents nœuds. Il est à remarquer que $\Psi(x, y)$ n'est définie qu'à un multiple près de $2i\pi$ comme chacun des termes $\log(b - y)^K$.

Définition de $\phi_n(x, y)$. Je définis la fonction $\phi_n(x, y)$ à l'intérieur de R_n par la condition:

$$\phi_n(x, y) = \Psi(x, y);$$

cette fonction est régulière à l'intérieur de R_n : sa continuation analytique est régulière en tout point A du périmètre de R_n , intérieur à S ; si en effet A est un point quelconque de l_{np} , autre que ses extrémités, le seul terme de la somme $\Psi(x, y)$ pour lequel A soit un point singulier est $I_{np}(x, y)$ dont la continuation analytique est régulière au point A . Si, en second lieu, A est un nœud, je partage $\Psi(x, y)$ en trois parties; la première $\Psi_1(x, y)$ renferme la somme des intégrales correspondant aux chemins qui aboutissent en A ; la deuxième est le terme $-\log(a - y)^a$ qui correspond à A ; la troisième $\Psi_2(x, y)$ renferme tous les autres termes de $\Psi(x, y)$:

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) - \log(a - y)^a + \Psi_2(x, y).$$

$\Psi_2(x, y)$ est régulière en A , et la continuation analytique de

$$\Psi_1(x, y) - \log(a - y)^a,$$

(considérée actuellement pour y intérieur à R_n) est régulière en A , d'après ce qui précède.

Ainsi à chaque région R_n on peut faire correspondre une fonction $\phi_n(x, y)$ régulière en tout point de R_n et en tout point de son périmètre intérieur à S , définie à l'intérieur de R_n par la condition d'être égale à $\Psi(x, y)$ et sur son périmètre par continuation analytique.

Relations entre les fonctions $\phi_m(x, y)$ et $\phi_i(x, y)$ correspondant à deux régions contiguës ou attenantes. On verra comme dans la démonstration précédente que dans le domaine d'un point intérieur à S appartenant aux périmètres de deux régions R_m et R_i contiguës ou attenantes, on a :

$$\phi_m(x, y) - \phi_i(x, y) = f_i(x, y) - f_m(x, y);$$

toutefois cette égalité n'a lieu qu'à un multiple près de $2i\pi$, lequel dépend des déterminations choisies pour les fonctions qui y figurent.

Définition de $F(x, y)$. Je définis $F(x, y)$ pour y intérieur à S par la condition que l'on ait à l'intérieur de R_n et dans le domaine de tout point de son périmètre intérieur à S :

$$F(x, y) = \phi_n(x, y) + f_n(x, y).$$

$F(x, y)$ n'est ainsi définie qu'à un multiple près de $2i\pi$.

On a ainsi défini une fonction unique, puisqu'en un point intérieur à S et appartenant aux périmètres de R_m et R_i , on a, à un multiple près de $2i\pi$:

$$\phi_m(x, y) - \phi_i(x, y) = f_i(x, y) - f_m(x, y)$$

ou :

$$\phi_m(x, y) + f_m(x, y) = \phi_i(x, y) + f_i(x, y).$$

En un point quelconque intérieur à S , $F(x, y)$ est équivalente à la fonction $f_p(x, y)$ qui correspond à ce point, puisque l'on a dans le domaine de ce point :

$$F(x, y) = \phi_p(x, y) + f_p(x, y),$$

$\phi_p(x, y)$ étant régulière au point considéré.

Le théorème énoncé est ainsi démontré et l'on en déduit le suivant :

7. *Il existe une fonction $U(x, y)$ régulière en tout point (x, y) inté-*

rieur à (Γ, S) et telle que en un point quelconque intérieur à S son quotient par la fonction $u_p(x, y)$ qui correspond à ce point est régulier et différent de 0 au point considéré.

Je pose en effet:

$$U(x, y) = e^{F(x, y)}.$$

$U(x, y)$ est définie, à l'intérieur de S , sans aucune ambiguïté, car le multiple de $2i\pi$ que l'on peut ajouter à volonté à $F(x, y)$ n'altère pas la valeur de $e^{F(x, y)}$; de plus, en un point quelconque intérieur à S , on a en choisissant convenablement l'indice p :

$$F(x, y) = \phi_p(x, y) + f_p(x, y)$$

on en déduit, en se souvenant que $f_p(x, y) = \log u_p(x, y)$

$$e^{F(x, y)} = u_p(x, y) e^{\phi_p(x, y)},$$

ce qui montre que $U(x, y)$ est régulière au point considéré, c'est-à-dire en tout point intérieur à S .

On peut écrire cette égalité de la façon suivante:

$$\frac{U(x, y)}{u_p(x, y)} = e^{\phi_p(x, y)}$$

d'où l'on conclut qu'en tout point intérieur à S le quotient de $U(x, y)$ par la fonction $u_p(x, y)$ qui correspond à ce point est régulier et différent de 0.

III.

Extension aux fonctions de n variables complexes des théorèmes de MM. Mittag-Leffler et Weierstrass. Théorème de M. Poincaré.

8. Voici quelques considérations générales sur le problème qui fait l'objet de cette troisième partie et de la quatrième.

Soit $F(x, y, \dots, z, t, u)$ une fonction de n variables complexes x, y, \dots, z, t, u , monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur d'une région S . Je suppose que pour chaque point (a, b, \dots, c, d, e) intérieur à S , on connaisse une fonction $f_{a,b,\dots,c,d,e}(x, y, \dots, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur d'un cercle $\Gamma_{a,b,\dots,c,d,e}$, intérieur à S , et ayant pour centre le point (a, b, \dots, c, d, e) , et équivalente à $F(x, y, \dots, z, t, u)$ à l'intérieur de $\Gamma_{a,b,\dots,c,d,e}$.

Une condition nécessaire à laquelle doivent satisfaire les fonctions $f_{a,b,\dots,c,d,e}(x, y, \dots, z, t, u)$ correspondant aux différents points de S , est la suivante: si $(a', b', \dots, c', d', e')$ est un point assez voisin de (a, b, \dots, c, d, e) pour être intérieur au cercle $\Gamma_{a,b,\dots,c,d,e}$, les deux fonctions

$$f_{a,b,\dots,c,d,e}(x, y, \dots, z, t, u) \quad \text{et} \quad f_{a',b',\dots,c',d',e'}(x, y, \dots, z, t, u)$$

doivent être équivalentes au point $(a', b', \dots, c', d', e')$; il faut en effet qu'en ce point les deux fonctions soient équivalentes à une même troisième $F(x, y, \dots, z, t, u)$.

Je me propose de montrer que si, sans se donner la fonction $F(x, y, \dots, z, t, u)$, on se donne pour chaque point (a, b, \dots, c, d, e) intérieur à S , une fonction $f_{a,b,\dots,c,d,e}(x, y, \dots, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur de $\Gamma_{a,b,\dots,c,d,e}$, et si les fonctions données $f_{a,b,\dots,c,d,e}(x, y, \dots, z, t, u)$ satisfont à la condition qui vient d'être expliquée, il existe une fonction $F(x, y, \dots, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de S , et qui, en chaque point intérieur à S est équivalente à la fonction donnée correspondant à ce point.

J'aurai ainsi établi la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les fonctions données, pour qu'il existe une fonction $F(x, y, \dots, z, t, u)$ définie à l'intérieur de S , et équivalente en chaque point intérieur à S à la fonction donnée en ce point.

Il est clair que le théorème bien connu de M. MITTAG-LEFFLER, relatif aux fonctions d'une variable complexe, n'est qu'un cas particulier de celui que je viens d'énoncer.

De cette extension du théorème de M. MITTAG-LEFFLER se déduira d'une façon immédiate le théorème de M. POINCARÉ.

Les énoncés des théorèmes qui suivent et leurs démonstrations vont préciser ce qu'il peut rester de vague dans ces considérations générales.

9. Il importe, pour la suite, de préciser ce que j'entends par point intérieur à une aire S_1 prise sur le plan d'une variable complexe: un point est intérieur à S_1 s'il existe un cercle, intérieur à S_1 , ayant ce point pour centre et un rayon non nul. Cette définition exclut les points situés sur le périmètre de S_1 ; une aire s_1 sera dite *complètement intérieure* à S_1 si chaque point de s_1 et de son périmètre est intérieur à S_1 ; les périmètres des aires S_1 et s_1 ne peuvent pas avoir, d'après cela, de point commun.

10. Lemme. *Soit, sur le plan YOX, une aire connexe S limitée par un contour fermé simple ou complexe; on suppose qu'à chaque point de S ou de son périmètre correspond un cercle, de rayon non nul, ayant ce point pour centre: il est alors toujours possible de subdiviser S en régions, en nombre fini et assez petites pour que chacune d'elles soit complètement intérieure au cercle correspondant à un point convenablement choisi dans S ou sur son périmètre.*

Supposons, en effet, le lemme en défaut: partageons S en carrés au moyen de parallèles aux axes de coordonnées, de façon que le nombre des régions obtenues soit au moins égal à un certain entier n ; il y a au moins l'une de ces régions, S_1 , pour laquelle le lemme est encore en défaut.

Subdivisant S_1 en carrés et portions de carrés en nombre au moins égal à n , j'en déduis S_2 , de la même façon que S_1 se déduit de S ; en poursuivant le raisonnement, j'arrive à une suite indéfinie de carrés ou portions de carrés $S_1, S_2, \dots, S_p, \dots$; il est clair que S_p , pour p augmentant indéfiniment, a pour limite un point M intérieur à S ou sur son périmètre; on arrive à cette conclusion que l'on peut trouver un carré S_p aussi petit que l'on veut entourant M ou attenant à M et qui ne soit pas contenu à l'intérieur d'un des cercles de l'énoncé; or cela est impossible puisqu'au point M correspond un cercle de rayon non nul ayant ce point pour centre.

11. Dans les deux théorèmes qui suivent, je désigne par a avec ou sans indice une valeur attribuée à la variable complexe x , par b avec ou sans indice une valeur attribuée à la variable complexe y .

J'ai rapproché les énoncés de ces deux théorèmes parce que les démonstrations, à une légère différence près, en sont identiques.

Théorème I. Soient S_1 et S_2 deux aires connexes prises sur les plans respectifs des deux variables x et y ; soient s_1 et s_2 deux aires connexes à contour fermé simple ou complexe, complètement intérieures respectivement à S_1 et S_2 .

On suppose qu'à tout point (a, b) intérieur à (S_1, S_2) correspondent:

1° deux cercles: $\Gamma_{a,b}$ de centre a et $\gamma_{a,b}$ de centre b , intérieurs respectivement à S_1 et S_2 .

2° une fonction $f_{a,b}(x, y)$ monotrope et sans espace lacunaire définie à l'intérieur de $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ et telle que en tout point (a', b') intérieure à $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ elle soit équivalente à la fonction $f_{a',b'}(x, y)$ qui correspond à ce point.

Il existe une fonction $F(x, y)$ monotrope et sans espace lacunaire définie à l'intérieure de (s_1, s_2) et qui en tout point intérieur à (s_1, s_2) est équivalente à la fonction qui correspond à ce point.

Théorème II. Au lieu de supposer chacune des fonctions $f_{a,b}(x, y)$ de l'énoncé précédent monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur de $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ on peut supposer que chacune d'elles est le logarithme d'une fonction $v_{a,b}(x, y)$ régulière à l'intérieur de $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ et telle qu'en tout point (a', b') intérieur à $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ elle soit équivalente à $f_{a',b'}(x, y)$; cela revient à supposer que le quotient $\frac{v_{a,b}(x, y)}{v_{a',b'}(x, y)}$ est régulier et différent de 0 au point a', b' .

Il existe alors une fonction $F(x, y)$ définie à un multiple près de $2\pi i$ à l'intérieur de (s_1, s_2) et équivalente en tout point intérieur à (s_1, s_2) à la fonction qui correspond à ce point.

Démonstration du théorème I. Soit, en effet, a un point intérieur à S_1 : si au point a j'ajoute le point b intérieur à s_2 ou sur son périmètre, il correspond au point b d'après l'énoncé un cercle $\gamma_{a,b}$ intérieur à S_2 , de centre b : d'après le lemme, il est alors possible de subdiviser s_2 en régions R_1, R_2, \dots, R_n en nombre fini n et assez petites pour que chacune d'elles R_p soit complètement intérieure au cercle γ_{a,b_p} de centre b_p convenablement choisi dans s_2 ou sur son périmètre; à chaque point b_p correspond de plus un cercle Γ_{a,b_p} de centre a et intérieur à S_1 ; ces cercles Γ_{a,b_p} sont en nombre fini n comme les points b_1, b_2, \dots, b_n ; je

puis alors tracer un cercle I_a^1 de centre a et intérieur à tous les cercles concentriques I_{a,b_p} ; I_a^1 sera nécessairement intérieur à S_1 . A chaque région R_p , contenue à l'intérieur de γ_{a,b_p} correspond une fonction de l'énoncé $f_{a,b_p}(x, y)$ définie à l'intérieur de $(I_{a,b_p}, \gamma_{a,b_p})$ et à fortiori à l'intérieur de (I_a^1, γ_{a,b_p}) ; de plus, si R_p et R_q sont deux régions contiguës en tout point (a', b') intérieur à (I_a^1, γ_{a,b_p}) et à (I_a^1, γ_{a,b_q}) les deux fonctions $f_{a,b_p}(x, y)$ et $f_{a,b_q}(x, y)$ sont équivalentes comme étant, par hypothèse, équivalentes en ce point à $f_{a',b'}(x, y)$. Dès lors les n régions R_1, R_2, \dots, R_n , et les n fonctions qui leur correspondent, $f_{a,b_1}(x, y), \dots, f_{a,b_n}(x, y)$ satisfont à toutes les conditions sous lesquelles le théorème fondamental est applicable. Il existe, d'après ce théorème, une fonction $\varphi_a(x, y)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de (I_a^1, s_2) et équivalente, en tout point (a'', b'') intérieur à la région où elle est définie, à la fonction $f_{a,b_p}(x, y)$, l'indice p étant convenablement choisi; mais au point (a'', b'') , $f_{a,b_p}(x, y)$ est elle-même équivalente à $f_{a'',b''}(x, y)$; par suite $\varphi_a(x, y)$ et $f_{a'',b''}(x, y)$ sont équivalentes au point (a'', b'') .

Ainsi, à chaque point a intérieur à S_1 , correspondent: un cercle I_a^1 , intérieur à S_1 , de centre a , et une fonction $\varphi_a(x, y)$ définie à l'intérieur de (I_a^1, s_2) et qui, en tout point où elle est définie, est équivalente à la fonction correspondant à ce point d'après l'énoncé.

On peut, d'après le lemme, partager s_1 en régions T_1, T_2, \dots, T_m , en nombre fini m et assez petites pour que chacune d'elles T_p soit comprise à l'intérieur du cercle $I_{a_p}^1$ de centre a_p convenablement choisi à l'intérieur de s_1 ou sur son périmètre; à chacune des régions T_p , contenue à l'intérieur de $I_{a_p}^1$, correspond une fonction $\varphi_{a_p}(x, y)$ définie à l'intérieur de $(I_{a_p}^1, s_2)$; si T_p et T_q sont deux régions contiguës les deux fonctions $\varphi_{a_p}(x, y)$ et $\varphi_{a_q}(x, y)$ sont équivalentes en tout point intérieur à la fois à $(I_{a_p}^1, s_2)$ et à $(I_{a_q}^1, s_2)$, comme étant toutes les deux équivalentes en ce point à la fonction de l'énoncé qui lui correspond. Dès lors, on peut appliquer le théorème fondamental aux fonctions $\varphi_{a_p}(x, y)$ et l'on est conduit à la fonction $F(x, y)$ définie à l'intérieur de (s_1, s_2) qui satisfait aux conditions de l'énoncé; car en tout point (a''', b''') intérieur à (s_1, s_2) , $F(x, y)$ est équivalente à la fonction $\varphi_{a_p}(x, y)$, l'indice p étant convenablement choisi, et $\varphi_{a_p}(x, y)$ est équivalente elle-même en ce point à $f_{a''',b'''}(x, y)$.

Démonstration du théorème II. Cette démonstration est analogue à

la précédente: la seule différence consiste en ce que les fonctions $f_{a,b}(x, y)$, $\varphi_a(x, y)$ et $F(x, y)$ ne sont définies qu'à un multiple près de $2i\pi$.

12. Conséquence du théorème II. Dans le cas du théorème II, si l'on considère la fonction:

$$V(x, y) = e^{F(x, y)},$$

elle est définie sans ambiguïté à l'intérieur de (s_1, s_2) ; de plus si (a, b) est un point quelconque intérieur à (s_1, s_2) , on a en ce point:

$$F(x, y) = f_{a,b}(x, y) + \lambda(x, y),$$

$\lambda(x, y)$ étant régulière au point (a, b) ; on en conclut, en se souvenant que:

$$f_{a,b}(x, y) = \log v_{a,b}(x, y),$$

$$(1) \quad V(x, y) = v_{a,b}(x, y) e^{\lambda(x, y)}$$

ou:

$$(2) \quad \frac{V(x, y)}{v_{a,b}(x, y)} = e^{\lambda(x, y)}.$$

L'égalité (1) montre que $V(x, y)$ est régulière en tout point (a, b) intérieur à (s_1, s_2) ; l'égalité (2) montre que le quotient $\frac{V(x, y)}{v_{a,b}(x, y)}$ est régulier et différent de 0 au point (a, b) .

D'où le théorème suivant: (S_1, S_2, s_1, s_2 conservent la même signification que dans ce qui précède).

Théorème III. *Si à chaque point (a, b) intérieur à (S_1, S_2) correspondent:*

1° *deux cercles $\Gamma_{a,b}$ de centre a et $\gamma_{a,b}$ de centre b , respectivement intérieurs à S_1 et S_2 .*

2° *une fonction $V_{a,b}(x, y)$ régulière à l'intérieur de $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ et telle qu'en tout point (a', b') intérieur à $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ le quotient $\frac{v_{a,b}(x, y)}{v_{a',b'}(x, y)}$ soit régulier et différent de 0;*

il existe une fonction $V(x, y)$ régulière à l'intérieur de (s_1, s_2) et telle qu'en tout point (a, b) intérieur à (s_1, s_2) le quotient de $V(x, y)$ par la fonction $v_{a,b}(x, y)$ qui correspond à ce point est régulier et différent de 0.

13. L'extension des théorèmes précédents va être donnée pour le cas de n variables: le procédé de démonstration reste le même; il me suffira donc d'indiquer les traits généraux de la démonstration.

Les n variables sont désignées par $x, \dots, y, z, t, u; a, \dots, b, c, d, e$, avec ou sans indices, représentent des valeurs attribuées respectivement à x, \dots, y, z, t, u . J'appelle *point* un ensemble de valeurs attribuées aux n variables ou à *une partie* des n variables; j'appelle *cercle*, ayant pour centre un point donné, un ensemble de cercles ayant pour centres respectifs les différents éléments composant le point et tracés sur les plans des variables correspondantes; dans ce système de notations un cercle I de centre (a, \dots, b, c, d, e) peut être considéré comme composé de deux cercles: I' ayant pour centre (a, \dots, b, c, d) et I'' ayant pour centre e ; ou comme composé de I_1 ayant pour centre (a, \dots, b, c) et de I_2 ayant pour centre (d, e) ; etc.

Un cercle I est concentrique et intérieur au cercle γ , si I est composé de cercles, au sens ordinaire du mot, concentriques et intérieurs à ceux qui composent γ .

Théorème IV. Soient s_1, s_2, \dots, s_n , n aires connexes à contour fermé, simple ou complexe, prises sur les plans respectifs des n variables x, \dots, y, z, t, u et complètement intérieures respectivement aux aires S_1, S_2, \dots, S_n prises sur les mêmes plans.

On suppose qu'à tout point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à (S_1, S_2, \dots, S_n) , correspondent:

1° un cercle $I_{a, \dots, b, c, d, e}$ de centre (a, \dots, b, c, d, e) et intérieur à (S_1, S_2, \dots, S_n) ;

2° une fonction des n variables, $f_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de $I_{a, \dots, b, c, d, e}$ et telle que si $(a', \dots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $I_{a, \dots, b, c, d, e}$ les deux fonctions $f_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ et $f_{a', \dots, b', c', d', e'}(x, \dots, y, z, t, u)$ soient équivalentes au point $(a', \dots, b', c', d', e')$.

Il existe une fonction $F(x, \dots, y, z, t, u)$, monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de (s_1, s_2, \dots, s_n) et telle qu'en tout point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à (s_1, s_2, \dots, s_n) , elle soit équivalente à la fonction $f_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ qui correspond à ce point.

Théorème V. Au lieu de supposer, comme dans l'énoncé précédent,

chacune des fonctions $f_{a,\dots,t,c,d,e}(x, \dots, y, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur de $\Gamma_{a,\dots,b,c,d,e}$, on peut supposer que chacune de ces fonctions est le logarithme d'une fonction $v_{a,\dots,b,c,d,e}(x, \dots, y, z, t, u)$ régulière à l'intérieur de $\Gamma_{a,\dots,b,c,d,e}$ et telle que si $(a', \dots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a,\dots,b,c,d,e}$, les deux fonctions $f_{a,\dots,b,c,d,e}(x, \dots, y, z, t, u)$ et $f_{a',\dots,b',c',d',e'}(x, \dots, y, z, t, u)$ soient équivalentes au point $(a', \dots, b', c', d', e')$; cette dernière condition revient à supposer que le quotient

$$\frac{v_{a,\dots,b,c,d,e}(x, \dots, y, z, t, u)}{v_{a',\dots,b',c',d',e'}(x, \dots, y, z, t, u)}$$

est régulier et différent de 0 au point $(a', \dots, b', c', d', e')$.

Il existe alors une fonction $F(x, \dots, y, z, t, u)$ définie à un multiple près de $2i\pi$ à l'intérieur de (s_1, s_2, \dots, s_n) et qui en chaque point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à (s_1, s_2, \dots, s_n) est équivalente à la fonction $f_{a,\dots,b,c,d,e}(x, \dots, y, z, t, u)$ correspondant à ce point.

Démonstration du théorème IV. Soit, en effet, (a, \dots, b, c, d) un point intérieur à $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})$; si je lui adjoins le point e intérieur à S_n , il correspond à e un cercle $\Gamma_{a,\dots,b,c,d,e}$ que je considère comme composé de $\Gamma_{a,\dots,b,c,d,e}^1$ de centre (a, \dots, b, c, d) et de $\gamma_{a,\dots,b,c,d,e}^1$ de centre e ; on peut alors décomposer s_n en régions R_1, R_2, \dots, R_m , en nombre fini m , assez petites pour que chacune d'elles R_p soit intérieur au cercle $\gamma_{a,\dots,b,c,d,e_p}^1$ de centre e_p convenablement choisi dans S_n . Les m cercles $\Gamma_{a,\dots,b,c,d,e_p}^1$ étant concentriques et en nombre fini m , il existe un cercle $\Gamma_{a,\dots,b,c,d}^2$ concentrique et intérieur à ces m cercles. $\Gamma_{a,\dots,b,c,d}^2$ est certainement intérieur à $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})$. A chaque région R_p correspond une fonction $f_{a,\dots,b,c,d,e_p}(x, \dots, y, z, t, u)$ définie à l'intérieur de $(\Gamma_{a,\dots,b,c,d,e_p}^1, \gamma_{a,\dots,b,c,d,e_p}^1)$ et à fortiori à l'intérieur de $(\Gamma_{a,\dots,b,c,d}^2, \gamma_{a,\dots,b,c,d,e_p}^1)$; de plus si R_p et R_q sont deux régions contiguës, en tout point $(a', \dots, b', c', d', e')$ intérieur à la fois à $(\Gamma_{a,\dots,b,c,d}^2, \gamma_{a,\dots,b,c,d,e_p}^1)$ et à $(\Gamma_{a,\dots,b,c,d}^2, \gamma_{a,\dots,b,c,d,e_q}^1)$ les deux fonctions $f_{a,\dots,b,c,d,e_p}(x, \dots, y, z, t, u)$ et $f_{a,\dots,b,c,d,e_q}(x, \dots, y, z, t, u)$ sont équivalentes.

Il en résulte la possibilité d'appliquer le théorème fondamental aux m fonctions $f_{a,\dots,b,c,d,e_p}(x, \dots, y, z, t, u)$ et l'on est conduit à une fonction $\varphi_{a,\dots,b,c,d}(x, \dots, y, z, t, u)$ définie à l'intérieur de $(\Gamma_{a,\dots,b,c,d}^2, s_n)$ et telle qu'en tout point $(a'', \dots, b'', c'', d'', e'')$ intérieur à la région où elle est définie, elle est équivalente à $f_{a,\dots,b,c,d,e_p}(x, \dots, y, z, t, u)$, l'indice p étant convenable-

ment choisi, et par suite équivalente à la fonction $f_{a''\dots b''c''d''e''}(x, \dots, y, z, t, u)$ correspondant d'après l'énoncé au point $(a'', \dots, b'', c'', d'', e'')$.

Ainsi à chaque point (a, \dots, b, c, d) intérieur à $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})$ correspondent: un cercle $I_{a,\dots,b,c,d}^2$, ayant ce point pour centre et intérieur à $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})$ et une fonction $\varphi_{a,\dots,b,c,d}(x, \dots, y, z, t, u)$ définie à l'intérieur de $(I_{a,\dots,b,c,d}^2, s_n)$, équivalente en tout point où elle est définie à la fonction de l'énoncé qui correspond à ce point. Je considère $I_{a,\dots,b,c,d}^2$ comme composé de deux cercles: l'un $I_{a,\dots,b,c,d}^3$ de centre (a, \dots, b, c) et l'autre $\gamma_{a,\dots,b,c,d}^3$ de centre d . On peut décomposer s_{n-1} en régions $T_1, T_2, \dots, T_{m'}$, en nombre fini m' , assez petites pour que chacune d'elles T_p soit intérieur au cercle $\gamma_{a,\dots,b,c,d_p}^3$ de centre d_p convenablement choisi dans s_{n-1} ou sur son périmètre; je trace le cercle $I_{a,\dots,b,c}^4$ de centre (a, \dots, b, c) et intérieur aux m' cercles concentriques I_{a,\dots,b,c,d_p}^3 ; $I_{a,\dots,b,c}^4$ est forcément intérieur à $(S_1, S_2, \dots, S_{n-2})$; à chaque région T_p correspond une fonction $\varphi_{a,\dots,b,c,d_p}$ définie à l'intérieur de $(I_{a,\dots,b,c,d_p}^3, \gamma_{a,\dots,b,c,d_p}^3, s_n)$ et à fortiori à l'intérieur de $(I_{a,\dots,b,c}^4, \gamma_{a,\dots,b,c,d_p}^4, s_n)$; le théorème fondamental, appliqué à ces fonctions, conduit à la fonction $\psi_{a,\dots,b,c}(x, \dots, y, z, t, u)$ définie à l'intérieur de $(I_{a,\dots,b,c}^4, s_{n-1}, s_n)$ équivalente en chaque point où elle est définie à la fonction $\varphi_{a,\dots,b,c,d_p}(x, \dots, y, z, t, u)$, l'indice p étant convenablement choisi, et équivalente aussi par suite à la fonction de l'énoncé correspondant au point considéré.

Des fonctions $\psi_{a,\dots,b,c}(x, \dots, y, z, t, u)$, on conclura de la même façon, en décomposant $I_{a,\dots,b,c}^4$ en deux cercles $I_{a,\dots,b,c}^5$ de centre (a, \dots, b) et $\gamma_{a,\dots,b,c}^5$ de centre c , l'existence d'une fonction $\chi_{a,\dots,b}(x, \dots, y, z, t, u)$ définie à l'intérieur de $(I_{a,\dots,b}^6, s_{n-2}, s_{n-1}, s_n)$; ($I_{a,\dots,b}^6$ désignant un cercle intérieur à (S_1, \dots, S_{n-3}) de centre $(a \dots b)$, de rayon choisi assez petit) et telle qu'en tout point où elle est définie, elle soit équivalente à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point. En poursuivant ce raisonnement on parvient à une fonction $F(x, \dots, y, z, t, u)$ définie à l'intérieur de (s_1, s_2, \dots, s_n) et qui en chaque point où elle est ainsi définie, est équivalente à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point.

Démonstration du théorème V. Elle est analogue à la précédente: la seule différence consiste en ce que les fonctions $f(x, \dots, y, z, t, u)$, $\varphi(x, \dots, y, z, t, u)$, $\psi(x, \dots, y, z, t, u)$ et $F(x, \dots, y, z, t, u)$ ne sont considérées comme définies qu'à un multiple près de $2i\pi$.

14. Dans le cas du théorème V, en posant:

$$V(x, \dots, y, z, t, u) = e^{F(x, \dots, y, z, t, u)}$$

on obtient, comme dans le cas de deux variables, le théorème suivant où S_1, S_2, \dots, S_n et s_1, s_2, \dots, s_n , conservent la même signification.

Théorème VI. *Si à tout point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à (S_1, S_2, \dots, S_n) correspondent:*

- 1° un cercle $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ de centre (a, \dots, b, c, d, e) et intérieur à (S_1, S_2, \dots, S_n) ;
- 2° une fonction $v_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ des n variables, régulière à l'intérieur de $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ et telle que si $(a', \dots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ le quotient $\frac{v_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)}{v_{a', \dots, b', c', d', e'}(x, \dots, y, z, t, u)}$ soit régulier et différent de 0 en ce point;

Il existe une fonction $V(x, \dots, y, z, t, u)$ régulière en tout point intérieur à (s_1, s_2, \dots, s_n) et telle qu'en tout point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à (s_1, s_2, \dots, s_n) son quotient par la fonction $v_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ est régulier et différent de 0.

15. Ce dernier théorème conduit à un théorème important relatif à une fonction $\Phi(x, \dots, y, z, t, u)$ des n variables (x, \dots, y, z, t, u) n'admettant à l'intérieur de (S_1, S_2, \dots, S_n) que des singularités non essentielles.

Avant d'aborder ce théorème il est utile de rappeler quelques propositions connues.

M. WEIERSTRASS a démontré que si une série entière en x, \dots, y, z, t, u , $\sigma(x, \dots, y, z, t, u)$, convergente dans le voisinage de l'origine, s'annule à l'origine, on peut l'écrire dans un domaine δ de l'origine (sauf un cas d'exception que l'on peut éviter par un changement linéaire de variables) sous la forme:

$$\sigma(x, \dots, y, z, t, u) = P(u)\sigma_1(x, \dots, y, z, t, u)$$

où $P(u)$ est un polynôme en u de degré m , dans lequel le coefficient de u^m est l'unité, les autres coefficients étant des séries entières en x, \dots, y, z, t , convergentes dans δ , et s'annulant toutes à l'origine, et où σ_1 est une série entière en x, \dots, y, z, t, u convergente dans δ et ne s'annulant pas dans δ .

De là résulte que les zéros de $\sigma(x, \dots, y, z, t, u)$ forment dans le voisinage de l'origine une multiplicité à $2(n-1)$ paramètres réels.

Si $\sigma(x, \dots, y, z, t, u)$ et $\sigma'(x, \dots, y, z, t, u)$ sont deux séries entières en x, \dots, y, z, t, u s'annulant à l'origine, deux cas peuvent se présenter: ou bien ces deux séries admettent un diviseur commun (au sens donné à ce mot par M. WEIERSTRASS); leurs zéros communs forment alors, dans le voisinage de l'origine, une multiplicité à $2(n-1)$ paramètres réels; ou bien il n'y a pas de diviseur commun; les zéros communs à σ et σ' forment alors, dans le voisinage de l'origine, une multiplicité à $2(n-2)$ paramètres réels; dans ce dernier cas si le nombre des variables est $n=2$, l'origine est un zéro commun isolé.

La fraction $\frac{\sigma(x, \dots, y, z, t, u)}{\sigma'(x, \dots, y, z, t, u)}$ est dite irréductible à l'origine si σ et σ' n'ont pas de diviseur commun, c'est-à-dire si leurs zéros forment une multiplicité à $2(n-2)$ paramètres réels dans le voisinage de l'origine.

La fraction $\frac{W}{V}$ sera dite irréductible en un point (a, \dots, b, c, d, e) où les fonctions W et V sont régulières, si W et V étant développées suivant les puissances entières de $x-a, \dots, y-b, z-c, t-d, u-e$, la fraction obtenue est irréductible au point (a, \dots, b, c, d, e) , au sens qui vient d'être donné à ce mot; la fraction $\frac{W}{V}$ sera irréductible à l'intérieur de (s_1, s_2, \dots, s_n) , où W et V sont supposées régulières, si elle est irréductible en tout point intérieur à (s_1, s_2, \dots, s_n) ; ou bien, ce qui revient au même, si dans le voisinage de tout zéro commun à W et V intérieur à (s_1, s_2, \dots, s_n) les zéros communs à W et V forment une multiplicité à $2(n-2)$ dimensions; dans le cas de deux variables ($n=2$), les zéros communs devront être des points isolés.

Voici une dernière propriété connue des fractions dont les deux termes sont des fonctions régulières; si W, V, W_1, V_1 sont quatre fonctions régulières dans une même aire et si les deux fractions $\frac{W}{V}, \frac{W_1}{V_1}$ sont toutes les deux irréductibles et égales entre elles à l'intérieur de cette aire, le quotient $\frac{V}{V_1}$ est régulier et différent de 0 à l'intérieur de l'aire considérée.

16. Soit Φ une fonction des n variables complexes x, \dots, y, z, t, u

n'admettant à l'intérieur de (S_1, S_2, \dots, S_n) que des singularités non essentielles; ce qui signifie que si (a, \dots, b, c, d, e) est un point quelconque intérieur à (S_1, S_2, \dots, S_n) , on aura, à l'intérieur d'un cercle $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ de centre (a, \dots, b, c, d, e) et de rayon convenablement choisi:

$$\Phi = \frac{w_{a, \dots, b, c, d, e}}{v_{a, \dots, b, c, d, e}}$$

où $w_{a, \dots, b, c, d, e}$ et $v_{a, \dots, b, c, d, e}$ sont deux séries entières en $x - a, \dots, y - b, z - c, t - d, u - e$, convergentes à l'intérieur de $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ et choisies de telle sorte que la fraction précédente soit irréductible à l'intérieur du cercle $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$; ce dernier cercle peut toujours être supposé de rayon assez petit pour être tout entier intérieur à (S_1, S_2, \dots, S_n) . Dès lors, si $(a', \dots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$, on aura dans le voisinage de ce point:

$$\frac{w_{a, \dots, b, c, d, e}}{v_{a, \dots, b, c, d, e}} = \frac{w_{a', \dots, b', c', d', e'}}{v_{a', \dots, b', c', d', e'}}$$

ces deux fractions étant irréductibles, on en conclut que le quotient $\frac{w_{a, \dots, b, c, d, e}}{v_{a', \dots, b', c', d', e'}}$ est régulier et différent de 0 au point $(a', \dots, b', c', d', e')$.

On peut, d'après cela, appliquer aux fonctions $v_{a, \dots, b, c, d, e}$ le théorème VI: il existe une fonction V de x, \dots, y, z, t, u , régulière à l'intérieur de (s_1, s_2, \dots, s_n) et telle que le quotient $\frac{V}{v_{a, \dots, b, c, d, e}}$ soit régulier et différent de 0 au point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à (s_1, \dots, s_n) ; soit:

$$\frac{V}{v_{a, \dots, b, c, d, e}} = \lambda_{a, \dots, b, c, d, e};$$

on a également dans le domaine du point (a, \dots, b, c, d, e)

$$\Phi = \frac{w_{a, \dots, b, c, d, e}}{v_{a, \dots, b, c, d, e}}$$

d'où:

$$\Phi \cdot V = w_{a, \dots, b, c, d, e} \cdot \lambda_{a, \dots, b, c, d, e},$$

égalité qui montre que le produit $\Phi \cdot V$ est une fonction W régulière en

tout point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à (s_1, s_2, \dots, s_n) ; par conséquent l'on a :

$$\Phi = \frac{W}{V},$$

W et V étant régulières à l'intérieur de (s_1, s_2, \dots, s_n) .

La fraction $\frac{W}{V}$ est irréductible à l'intérieur de (s_1, \dots, s_n) ; car on a dans le domaine de tout point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à (s_1, s_2, \dots, s_n) :

$$V = v_{a, \dots, b, c, d, e} \cdot \lambda_{a, \dots, b, c, d, e},$$

$$W = w_{a, \dots, b, c, d, e} \cdot \lambda_{a, \dots, b, c, d, e};$$

$\lambda_{a, \dots, b, c, d, e}$ ne s'annulant pas au point (a, \dots, b, c, d, e) , la fraction $\frac{W}{V}$ est irréductible en ce point comme la fraction $\frac{w_{a, \dots, b, c, d, e}}{v_{a, \dots, b, c, d, e}}$.

On a donc le théorème suivant:

Théorème VII. *Si une fonction Φ des n variables x, \dots, y, z, t, u , n'admet à l'intérieur de (S_1, S_2, \dots, S_n) que des singularités non essentielles, elle est égale à l'intérieur de (s_1, s_2, \dots, s_n) à la fraction $\frac{W}{V}$ dont les deux termes sont des fonctions régulières à l'intérieur de (s_1, s_2, \dots, s_n) et qui est irréductible à l'intérieur de (s_1, s_2, \dots, s_n) .*

17. Dans les théorèmes précédents, il a été constamment supposé que (s_1, s_2, \dots, s_n) étaient des aires connexes, limitées par des contours fermés, et, par conséquent, d'étendue finie; il a été supposé de plus que (s_1, s_2, \dots, s_n) étaient respectivement intérieures à S_1, S_2, \dots, S_n ; de telle sorte que les périmètres de s_1, s_2, \dots, s_n peuvent être choisis aussi voisins que l'on veut des périmètres de S_1, S_2, \dots, S_n mais non confondus avec eux. La suite du présent travail a pour but de démontrer que tous les théorèmes précédents subsistent lorsque s_1, s_2, \dots, s_n sont confondus avec S_1, S_2, \dots, S_n , ces dernières aires étant limitées par des contours fermés ou non fermés, dont la nature sera précisée plus loin.

Cette extension, dans le cas général, exigeant la démonstration de plusieurs propositions préliminaires, fera l'objet de la quatrième partie.

Dans le cas particulier où chacune des aires S_1, S_2, \dots, S_n est un cercle, le problème est plus simple, et je vais l'exposer dans les paragraphes suivants.

18. **Théorème VII.** Soit γ un ensemble de cercles $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, tracés respectivement sur les plans des n variables x, \dots, y, z, t, u et ayant pour centres les origines des coordonnées dans les différents plans et des rayons finis ou infinis. On suppose qu'à chaque point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à γ correspondent:

1° un cercle $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ de centre (a, \dots, b, c, d, e) compris à l'intérieur de γ ;

2° une fonction $f_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ et telle que si $(a', \dots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$, les deux fonctions $f_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ et $f_{a', \dots, b', c', d', e'}(x, \dots, y, z, t, u)$ soient équivalentes au point $(a', \dots, b', c', d', e')$.

Il existe une fonction monotrope et sans espace lacunaire $F(x, \dots, y, z, t, u)$ définie à l'intérieur de γ et équivalente en tout point intérieur à γ à la fonction qui correspond à ce point.

Théorème VIII. Au lieu de supposer, comme dans l'énoncé précédent chacune des fonctions $f_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, on peut supposer que chacune d'elles est le logarithme d'une fonction $v_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ régulière à l'intérieur de $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ et telle que si $(a', \dots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ le quotient

$$\frac{v_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)}{v_{a', \dots, b', c', d', e'}(x, \dots, y, z, t, u)}$$

soit régulier et différent de 0 au point $(a', \dots, b', c', d', e')$.

Il existe alors une fonction $F(x, \dots, y, z, t, u)$ définie à un multiple près de $2i\pi$ à l'intérieur de γ , et équivalente en chaque point intérieur à γ à la fonction correspondant à ce point.

Démonstration du théorème VII. J'imagine à l'intérieur de chacun des n cercles γ_p ($p = 1, 2, \dots, n$) de l'énoncé, une suite indéfinie de cercles concentriques $\gamma_p^1, \gamma_p^2, \dots, \gamma_p^m, \dots$ dont les rayons vont en croissant avec l'indice supérieur, de telle sorte que γ_p^m ait pour limite γ_p lorsque m augmente indéfiniment; dans le cas où le cercle γ_p a un rayon infini, le rayon de γ_p^m devra augmenter indéfiniment avec m ; je désignerai par γ^m l'ensemble des n cercles $\gamma_1^m, \gamma_2^m, \dots, \gamma_n^m$. D'après les notations et con-

ventions adoptées, nous dirons que $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^m, \dots$ est une suite infinie de cercles, tous intérieurs à γ , dont chacun est intérieur au suivant, et tels que γ^m ait pour limite γ pour m augmentant indéfiniment: cette dernière condition revient à dire que si (a, \dots, b, c, d, e) est un point quelconque intérieur à γ , on peut choisir m assez grand pour que le point considéré soit à l'intérieur de γ^m .

Le cercle γ^m étant intérieur à γ , il existe, d'après le théorème IV, une fonction monotrope et sans espace lacunaire, φ_m , des variables x, \dots, y, z, t, u , définie à l'intérieur de γ^m et équivalente en tout point intérieur à γ^m à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point. Il est clair qu'on aura une autre fonction satisfaisant aux mêmes conditions en retranchant de φ_m un polynôme quelconque entier en x, \dots, y, z, t, u . A chaque cercle γ^m ($m = 1, 2, \dots + \infty$) correspond ainsi une fonction φ_m .

Considérons la différence

$$\varphi_{m+1} - \varphi_m = \delta_m;$$

elle est régulière en tout point intérieur à γ^m , car en un tel point φ_{m+1} et φ_m sont équivalentes à une même fonction; δ_m peut donc être considérée comme une série entière en x, \dots, y, z, t, u convergente dans γ^m . J'appelle Δ_m la série obtenue en remplaçant dans δ_m chaque terme par son module.

Soit $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_m, \dots$ une suite indéfinie de nombres positifs dont la somme constitue une série convergente.

Je dis que les fonctions de la suite indéfinie: $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m, \dots$ peuvent être choisies de telle sorte qu'à l'intérieur de γ^{m-1} on ait:

$$\Delta_m < \varepsilon_m. \quad (m=2, 3, \dots, \infty)$$

En effet, supposons que les $\mu - 1$ premières fonctions: $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_\mu$ satisfassent à la condition précédente; je vais montrer que $\varphi_{\mu+1}$ peut être choisie de façon à y satisfaire également.

Il existe en effet une fonction $\phi_{\mu+1}$ de x, \dots, y, z, t, u monotrope et sans espace lacunaire définie à l'intérieur de $\gamma^{\mu+1}$ et équivalente en tout point intérieur à $\gamma^{\mu+1}$ à la fonction qui correspond à ce point dans l'énoncé. On devra prendre pour $\varphi_{\mu+1}$ une fonction équivalente à $\phi_{\mu+1}$ à l'intérieur de $\gamma^{\mu+1}$, et satisfaisant de plus à l'inégalité prescrite.

Je pose:

$$\psi_{\mu+1} - \varphi_{\mu} = \zeta_{\mu};$$

ζ_{μ} sera régulière dans γ^{μ} : c'est donc une série entière en x, \dots, y, z, t, u convergente dans γ^{μ} .

Je décompose la série ζ_{μ} en deux parties: l'une P_{μ} comprenant les premiers termes de la série, jusqu'à un certain rang qui sera déterminé ultérieurement, et l'autre δ_{μ} comprenant les autres termes:

$$\zeta_{\mu} = P_{\mu} + \delta_{\mu}.$$

Si Δ_{μ} désigne la série obtenue en remplaçant chaque terme de δ_{μ} par son module, on sait que le nombre des termes de P_{μ} peut être choisi assez grand pour qu'à l'intérieur de $\gamma^{\mu-1}$ (qui est compris dans le cercle de convergence γ^{μ} de la série), on ait:

$$\Delta_{\mu} < \varepsilon_{\mu}.$$

Posant alors: $\varphi_{\mu+1} = \psi_{\mu+1} - P_{\mu}$, j'obtiens une fonction $\varphi_{\mu+1}$ qui est équivalente à $\psi_{\mu+1}$ à l'intérieur de $\gamma_{\mu+1}$ et telle que:

$$\varphi_{\mu+1} - \varphi_{\mu} = \delta_{\mu}$$

et qu'à l'intérieur de $\gamma^{\mu-1}$, on ait:

$$\Delta_{\mu} < \varepsilon_{\mu}.$$

La fonction $\varphi_{\mu+1}$ ainsi déterminée satisfait aux conditions imposées.

On déterminera ainsi de proche en proche toutes les fonctions $\varphi_{\mu+2}$, $\varphi_{\mu+3}$, ... satisfaisant à la condition prescrite.

Je définis une fonction $F(x, \dots, y, z, t, u)$ à l'intérieur de γ par la condition suivante: à l'intérieur de γ^p ($p \geq 2$) on a:

$$(1) \quad F(x, \dots, y, z, t, u) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}$$

la série: $\sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}$ est une fonction régulière à l'intérieur de γ^p ; car à l'intérieur de ce cercle on a la suite d'inégalités:

$$\Delta_{m+r} < \varepsilon_{m+r}. \quad (r=1, 2, \dots, \infty)$$

Dès lors, d'après une propriété connue des séries à double entrée, la série $\sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}$ peut être ordonnée suivant les puissances entières et positives de x, \dots, y, z, t, u et conduit ainsi à une série convergente dans γ^p .

L'expression (1) définit donc une fonction bien déterminée à l'intérieur de γ^p . Il reste à montrer que deux quelconques des expressions de $F(x, \dots, y, z, t, u)$ fournissent bien la même fonction. Soit (k étant un entier positif) les deux expressions:

$$F(x, \dots, y, z, t, u) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}$$

et:

$$F(x, \dots, y, z, t, u) = \varphi_{p+k+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+k+r}$$

dont la première définit $F(x, \dots, y, z, t, u)$ à l'intérieur de γ^p et la deuxième à l'intérieur de γ^{p+k} ; elles définissent donc simultanément $F(x, \dots, y, z, t, u)$ à l'intérieur de γ^p ; pour vérifier que ces deux expressions sont identiques, il suffit de se rappeler que:

$$\delta_{p+r} = \varphi_{p+r+1} - \varphi_{p+r}.$$

La fonction $F(x, \dots, y, z, t, u)$ satisfait à toutes les conditions de l'énoncé; car si (a, \dots, b, c, d, e) est un point intérieur à γ , ce point est intérieur à γ^p , p étant choisi assez grand. La fonction est donc définie dans le domaine du point (a, \dots, b, c, d, e) par:

$$F(x, \dots, y, z, t, u) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r},$$

la série du second membre étant une fonction régulière dans γ^p , $F(x, \dots, y, z, t, u)$ est équivalente au point (a, \dots, b, c, d, e) à φ_{p+1} et par suite à $f_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$.

Démonstration du théorème VIII. Cette démonstration est analogue à la précédente: la seule différence consiste en ce que les fonctions $\varphi_m, \varphi_{m+1}, F(x, \dots, y, z, t, u)$ ne sont considérées comme définies qu'à un multiple près de $2i\pi$. Il n'en est pas de même des séries δ dont chacune est déterminée sans ambiguïté. On est, en effet, conduit à poser comme

dans la démonstration précédente, les notations conservant un sens analogue:

$$\phi_{\mu+1} - \phi_{\mu} = \zeta_{\mu};$$

chacune des déterminations de $\phi_{\mu+1} - \phi_{\mu}$ est régulière dans γ^{μ} ; ζ_{μ} désignera le développement en série de l'une quelconque de ces déterminations, choisie arbitrairement; on décompose ensuite ζ_{μ} :

$$\zeta_{\mu} = P_{\mu} + \delta_{\mu};$$

δ_{μ} est ainsi définie sans aucune ambiguïté.

19. Dans le cas du théorème VIII, en posant:

$$V(x, \dots, y, z, t, u) = e^{R(x, \dots, y, z, t, u)},$$

par un raisonnement déjà fait, $V(x, \dots, y, z, t, u)$ est une fonction régulière dans γ ; ou si l'on veut, est une série entière en x, \dots, y, z, t, u convergente dans γ . D'où le théorème:

Théorème IX. *Si à chaque point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à γ correspondent:*

1° *un cercle $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ de centre (a, \dots, b, c, d, e) et intérieur à γ ;*

2° *une fonction $v_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)$ régulière dans $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ et telle que si $(a', \dots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a, \dots, b, c, d, e}$ le quotient $\frac{v_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)}{v_{a', \dots, b', c', d', e'}(x, \dots, y, z, t, u)}$ soit régulier et différent de 0 au point $(a', \dots, b', c', d', e')$.*

Il existe une série entière en x, \dots, y, z, t, u , $V(x, \dots, y, z, t, u)$ convergente dans γ et telle que, en tout point (a, \dots, b, c, d, e) intérieur à γ , le quotient $\frac{V(x, \dots, y, z, t, u)}{v_{a, \dots, b, c, d, e}(x, \dots, y, z, t, u)}$ soit régulier et différent de 0.

Théorème X. *Si une fonction Φ des n variables x, \dots, y, z, t, u n'admet à l'intérieur de γ que des singularités non essentielles, elle est le quotient de deux séries entières convergentes dans γ , et telles que la fraction obtenue soit irréductible dans γ .*

Par une démonstration identique à celle du paragraphe 16, où l'on remplace (S_1, S_2, \dots, S_n) et (s_1, s_2, \dots, s_n) tous les deux par γ , on voit que Φ est le quotient de deux fonctions régulières dans γ , et par suite

le quotient de deux séries entières en x, y, \dots, z, t, u convergentes dans γ .

20. Supposons que les n cercles $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, qui composent γ , aient tous des rayons infinis; le théorème précédent devient le théorème de M. POINCARÉ:

Si une fonction Φ des n variables x, \dots, y, z, t, u n'admet à distance finie que des singularités non essentielles, elle est le quotient de deux fonctions entières de x, \dots, y, z, t, u , telles que la fraction obtenue soit irréductible en tout point à distance finie.

IV.

Généralisation des théorèmes précédents.

21. J'ai indiqué précédemment le but de cette quatrième partie. L'objet des propositions préliminaires que je vais établir est le suivant: je me suis servi dans la démonstration du théorème VII d'une propriété bien connue: si une fonction $f(x, \dots, y, z, t, u)$ des n variables complexes x, \dots, y, z, t, u est régulière à l'intérieur et sur le périmètre de n cercles tracés sur les plans respectifs des n variables, il existe un polynôme entier x, \dots, y, z, t, u tel que sa différence avec la fonction $f(x, \dots, y, z, t, u)$ ait, à l'intérieur des n cercles, un module plus petit qu'un nombre positif ε donné à l'avance. Il s'agit d'étendre cette proposition au cas où, aux n cercles, on substitue n contours fermés quelconques; si chacun de ces n contours est à connexion simple, je montrerai que le polynôme existe encore; si les contours sont à connexion multiple, en général le polynôme répondant à la question n'existe pas; mais on peut, au lieu du polynôme, trouver une fonction rationnelle de x, \dots, y, z, t, u satisfaisant à la condition précédente.

J'entends par contour fermé simple, une ligne complexe fermée, ne présentant aucune boucle; d'après cela un contour fermé simple partage

tout le plan en deux aires connexes: l'une *intérieure* au contour, l'autre *extérieure*, la première d'étendue *finie*, la seconde d'étendue *infinie*.

22. Je donnerai d'abord la démonstration sommaire des deux propositions suivantes.

Soient Γ et Γ' deux cercles tracés respectivement sur les plans des deux variables x et y , ayant pour centres les origines des coordonnées et pour rayons R et R' .

1°. Si $f(x, y)$ est une fonction des deux variables x et y régulière pour x intérieur à Γ et pour y extérieur à Γ' ; si, de plus, $f(x, y)$ tend vers 0 pour y augmentant indéfiniment, x conservant une valeur constante intérieure à Γ , la fonction $f(x, y)$ est développable suivant une série entière en x et $\frac{1}{y}$, absolument convergente pour x dans Γ et y extérieur à Γ' ; soit:

$$f(x, y) = \sum A_{\alpha\beta} x^\alpha y^{-\beta}. \quad (\alpha=0,1,2,\dots,+\infty, \beta=1,2,\dots,+\infty)$$

J'exprimerai plus brièvement les conditions auxquelles $f(x, y)$ est supposée satisfaire dans cet énoncé, en disant qu'elle est régulière pour x dans Γ et y extérieur à Γ' et qu'elle s'annule pour $y = \infty$.

Le théorème à démontrer revient au suivant: si l'on pose:

$$y = \frac{R'^2}{y'}$$

la fonction: $f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right)$ est régulière pour (x, y') intérieur à (Γ, Γ') . Il ne peut y avoir de doute que pour la valeur $y' = 0$.

Je trace un cercle γ' concentrique à Γ' et de rayon $\rho > R'$; comme $f(x, y)$ s'annule pour $y = \infty$, on aura pour x intérieur à Γ et y extérieur à γ' :

$$f(x, y) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{f(x, z) dz}{z - y}$$

l'intégrale étant prise le long de γ' dans le sens direct. En remplaçant y par $\frac{R'^2}{y'}$, il vient, pour x intérieur à Γ et y' intérieur à un cercle γ'_1 concentrique à Γ' et de rayon $\rho_1 = \frac{R'^2}{\rho}$:

$$f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right) = -\frac{1}{2i\pi} y' \int_{\gamma'} \frac{f(x, z) dz}{y'z - R'^2};$$

on voit par cette expression que pour $y' = 0$, $f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right)$ est régulière: le théorème est ainsi démontré.

2°. Si $f(x, y)$ est régulière pour x et y extérieurs à Γ et Γ' et si elle tend vers 0 pour x augmentant indéfiniment, y conservant une valeur constante extérieure à Γ' et pour y augmentant indéfiniment, x conservant une valeur constante extérieure à Γ ; $f(x, y)$ est développable en série entière en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ absolument convergente à l'extérieur de Γ et Γ' , et de la forme:

$$f(x, y) = \sum A_{\alpha\beta} x^{-\alpha} y^{-\beta}. \quad (\alpha=1,2,\dots,+\infty, \beta=1,2,\dots,+\infty)$$

J'exprimerai plus brièvement les conditions auxquelles satisfait par hypothèse $f(x, y)$ en disant qu'elle est régulière pour (x, y) extérieur à (Γ, Γ') et qu'elle s'annule pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$.

En posant: $x = \frac{R^2}{x'}$, $y = \frac{R'^2}{y'}$, le théorème revient au suivant: $f\left(\frac{R^2}{x'}, \frac{R'^2}{y'}\right)$ est régulière pour (x', y') intérieur à (Γ, Γ') ; on a, effet, pour x extérieur à Γ et y extérieur au cercle γ' concentrique à Γ et de rayon $\rho > R'$:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{f(x, z) dz}{z - y}$$

ou, pour y' intérieur à γ'_1 concentrique à Γ' et de rayon $\frac{R'^2}{\rho}$:

$$f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right) = -\frac{1}{2i\pi} y' \int_{\gamma'} \frac{f(x, z) dz}{y'z - R'^2};$$

cela montre que $f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right)$ est régulière pour x extérieur à Γ et y' intérieur à Γ' ; comme cette fonction s'annule pour $x = \infty$, en vertu de 1°, $f\left(\frac{R^2}{x'}, \frac{R'^2}{y'}\right)$ sera régulière pour (x', y') intérieur à (Γ, Γ') .

23. **Proposition I.** *Soient:*

C et C' deux contours fermés simples tracés sur les plans des deux variables x et y ;

a et c deux points du plan de la variable x extérieurs à C ;

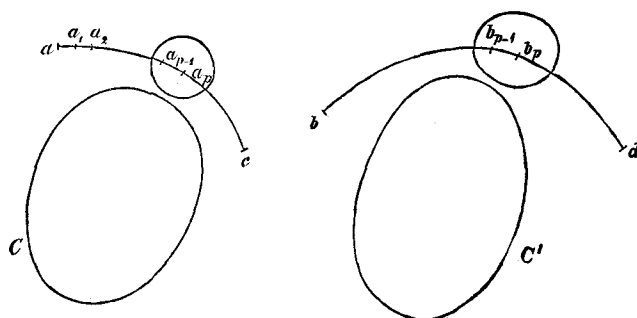
b et d deux points du plan de la variable y extérieurs à C' ;

$f(x, y)$ une fonction de x et y qui est régulière excepté pour les valeurs $x = a$ et $y = b$ et qui s'annule pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-c}$, $\frac{1}{y-d}$, $Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)$ tel qu'en tout point (x, y) intérieur à (c, c') , on ait:

$$\text{mod.} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right) \right] < \varepsilon.$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.



Sur le plan de la variable x je trace une ligne ac partant de a et aboutissant à c , tout entière extérieure au contour C ; et sur le plan de la variable y , je trace d'une façon analogue la ligne bd extérieure au contour C' . Je marque sur la ligne ac , en allant de a vers c , n points a_1, a_2, \dots, a_n , et sur bd , n points b_1, b_2, \dots, b_n , en allant de b vers d . Je suppose n choisi assez grand et les points assez rapprochés pour que la condition suivante soit remplie: dans les deux suites de points: $a, a_1, a_2, \dots, a_n, c$ et $b, b_1, b_2, \dots, b_n, d$, la distance de deux points consécutifs quelconques est inférieure à une longueur R , plus petite elle-même que les distances des lignes ac et C d'une part, bd et C' d'autre part; de telle sorte que les cercles de rayon R et de centres a_p, b_p , laissent à leur extérieur les contours C et C' et comprennent à leur intérieur respectivement les points a_{p-1} et b_{p-1} . Les cercles le rayon R ayant pour

centres les points a_1, a_2, \dots, a_n, c et b_1, b_2, \dots, b_n, d seront désignés dans la démonstration simplement par leurs centres.

Je considère les cercles a_1 et b_1 ; les points a et b étant intérieurs à ces cercles, la fonction $f(x, y)$ est développable en série entière en $\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}$, absolument convergente à l'extérieur et sur le périmètre des cercles a_1 et b_1 . J'appelle $P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right)$ le polynôme formé par les premiers termes de ce développement, pris en nombre assez grand pour que, à l'extérieur des cercles a_1 et b_1 , on ait:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right) \right] < \frac{\varepsilon}{n+1};$$

le polynôme P_1 ne renferme pas de terme indépendant de $\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}$.

Les points a_1 et b_1 étant intérieurs aux cercles a_2 et b_2 , $P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right)$ est développable en série entière en $\frac{1}{x-a_2}, \frac{1}{y-b_2}$ absolument convergente à l'extérieur et sur le périmètre des cercles a_2 et b_2 ; soit $P_2\left(\frac{1}{x-a_2}, \frac{1}{y-b_2}\right)$ le polynôme formé par les premiers termes du développement pris en nombre assez grand pour que l'on ait à l'extérieur des cercles a_2 et b_2 :

$$\text{mod} \left[P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right) - P_2\left(\frac{1}{x-a_2}, \frac{1}{y-b_2}\right) \right] < \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

En poursuivant ce raisonnement on obtient une suite de $(n+1)$ polynômes satisfaisant aux $(n+1)$ inégalités:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right) \right] < \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ à l'extérieur des cercles } a_1 \text{ et } b_1,$$

$$\text{mod} \left[P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right) - P_2\left(\frac{1}{x-a_2}, \frac{1}{y-b_2}\right) \right] < \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ à l'extérieur de } a_2 \text{ et } b_2,$$

.....

$$\text{mod} \left[P_{n-1}\left(\frac{1}{x-a_{n-1}}, \frac{1}{y-b_{n-1}}\right) - P_n\left(\frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_n}\right) \right] < \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ à l'extérieur de } a_n \text{ et } b_n,$$

$$\text{mod} \left[P_n\left(\frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_n}\right) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right) \right] < \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ à l'extérieur de } c \text{ et } d.$$

Ces inégalités sont simultanément vérifiées à l'intérieur de (C, C') ; on en conclut, le module de la somme étant moindre que la somme des modules:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right) \right] < \varepsilon \text{ à l'intérieur de } (C, C').$$

Le théorème énoncé est donc démontré.

24. **Remarque.** La démonstration précédente suppose que chacun des points c et d est à distance finie: je vais montrer que c ou d , séparément ou tous les deux à la fois peuvent être rejetés à l'infini, $\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}$ devant être alors remplacés respectivement par x et par y .

Je trace en effet un cercle Γ de centre x_0 enveloppant C et je suppose le point c pris à distance finie mais à l'extérieur de Γ ; je trace un cercle γ de centre d et de rayon assez petit pour que C' lui soit complètement extérieur.

Le polynôme $Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)$ du théorème précédent est développable en série entière en $x-x_0$ et $\frac{1}{y-d}$ absolument convergente pour x intérieur à Γ ou sur son périmètre et pour y extérieur à γ ou sur son périmètre. Soit $Q_1\left(x-x_0, \frac{1}{y-d}\right)$ le polynôme formé par les premiers termes de ce développement, pris en nombre assez grand: on aura pour x intérieur à Γ et y extérieur à γ , et à fortiori pour (x, y) intérieur à (C, C') :

$$\text{mod} \left[Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right) - Q_1\left(x-x_0, \frac{1}{y-d}\right) \right] < \varepsilon$$

et comme:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right) \right] < \varepsilon \text{ pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C'),$$

on en conclut:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q_1\left(x-x_0, \frac{1}{y-d}\right) \right] < 2\varepsilon \text{ pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C'),$$

$Q_1\left(x - x_0, \frac{1}{y - d}\right)$ est un polynôme entier en x et $\frac{1}{y - d}$, ce qui montre que le point c peut être supposé rejeté à l'infini.

Pour montrer que les deux points c et d peuvent être rejetés à l'infini simultanément, je trace les cercles Γ et Γ' de centres arbitraires x_0 et y_0 et enveloppant respectivement C et C' ; je suppose c et d pris à distance finie mais extérieurs à Γ et Γ' ; le polynôme $Q\left(\frac{1}{x - c}, \frac{1}{y - d}\right)$ est développable en série entière en $x - x_0, y - y_0$, absolument convergente dans Γ, Γ' et sur leurs périmètres; soit $Q_2(x - x_0, y - y_0)$ le polynôme formé par l'ensemble des premiers termes du développement pris en nombre assez grand: on aura pour (x, y) intérieur à (C, C') :

$$\text{mod}[f(x, y) - Q_2(x - x_0, y - y_0)] < 2\varepsilon;$$

Q_2 étant un polynôme entier en x et y , on voit que c et d peuvent être rejetés tous deux à l'infini.

Proposition II. *Soient:*

C_1 et C'_1 deux contours fermés simples pris respectivement sur les plans des deux variables x et y ;

C et C' deux contours fermés simples complètement intérieurs respectivement à C_1 et C'_1 ;

$f(x, y)$ une fonction des deux variables x et y régulière en tout point intérieur à (C_1, C'_1) ;

a un point extérieur à C_1 , à distance finie ou infinie;

b un point extérieur à C'_1 à distance finie ou infinie;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x - a}, \frac{1}{y - b}, Q\left(\frac{1}{x - a}, \frac{1}{y - b}\right)$ tel qu'en tout point intérieur à (C, C') , on ait:

$$\text{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x - a}, \frac{1}{y - b}\right)\right] < \varepsilon$$

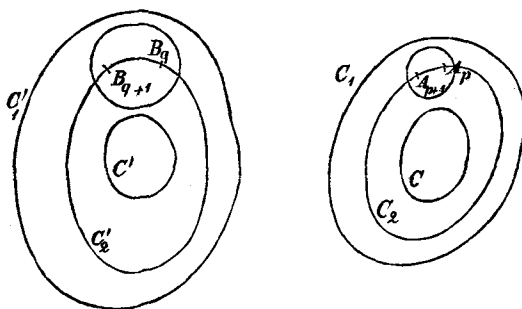
ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Je trace le contour fermé simple C_2 enveloppant C et enveloppé

par C_1 ; et le contour fermé simple C'_2 enveloppant C' et enveloppé par C_1 . Le théorème de CAUCHY donne pour (x, y) intérieur à (C_1, C'_2) :

$$f(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'_2} \frac{f(x, z) dz}{z - y}.$$

Je partage le contour d'intégration C'_2 en n parties consécutives $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots, B_{n-1}B_n, B_nB_1$ assez petites pour que chacune



d'elles B_qB_{q+1} soit comprise à l'intérieur d'un cercle γ'_q laissant à son extérieur les contours C'_1 et C' et par conséquent compris entre ces deux contours. Je pose

$$f_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{B_qB_{q+1}} \frac{f(x, z) dz}{z - y}$$

le chemin d'intégration étant B_qB_{q+1} ; cette fonction $f_q(x, y)$ est régulière pour x intérieur à C_1 et pour y non situé sur B_qB_{q+1} ; de plus elle s'annule pour $y = \infty$. On a d'ailleurs pour (x, y) intérieur à (C_1, C'_2) :

$$(1) \quad f(x, y) = \sum f_q(x, y). \quad (q=1, 2, \dots, n)$$

J'applique le théorème de CAUCHY à la fonction $f_q(x, y)$ et au contour C_2 ; j'aurai pour x intérieur à C_2 et y quelconque mais non situé sur B_qB_{q+1} :

$$f_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_2} \frac{f_q(z, y) dz}{z - x}.$$

Je partage C_2 en m parties $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_mA_1$, telles que chacune d'elles A_pA_{p+1} soit intérieure à un cercle γ_p laissant à son extérieur les contours C et C_1 et je pose:

$$\varphi_{pq}(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{A_pA_{p+1}} \frac{f_q(z, y) dz}{z - x}$$

A_pA_{p+1} étant le chemin d'intégration. La fonction $\varphi_{pq}(x, y)$ est régulière tant que x et y ne sont pas situés respectivement sur A_pA_{p+1} et B_qB_{q+1} . De plus $\varphi_{pq}(x, y)$ s'annule pour $y = \infty$ comme $f_q(x, y)$, et s'annule évidemment pour $x = \infty$.

On a pour x intérieur à C_2 et y non situé sur B_qB_{q+1} :

$$(2) \quad f_q(x, y) = \sum \varphi_{pq}(x, y). \quad (p=1, 2, \dots, m)$$

Les égalités (1) et (2) sont simultanément vérifiées pour (x, y) intérieur à (C_2, C_2) : on en conclut, pour (x, y) intérieur à (C_2, C_2) , l'égalité:

$$f(x, y) = \sum \sum \varphi_{pq}(x, y). \quad (p=1, 2, \dots, m; q=1, 2, \dots, n)$$

Si j'appelle a_p et b_q les centres respectifs des cercles γ_p et γ'_q , la fonction $\varphi_{pq}(x, y)$, régulière à l'extérieur de ces cercles et s'annulant pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$ est développable en série entière en $\frac{1}{x - a_p}$ et $\frac{1}{y - b_q}$ absolument convergente à l'extérieur et sur le périmètre de ces cercles. J'appelle $P_{pq}\left(\frac{1}{x - a_p}, \frac{1}{y - b_q}\right)$ le polynôme formé par les premiers termes de ce développement, pris en nombre assez grand pour que à l'extérieur de γ_p et γ'_q et à fortiori à l'intérieur de (C, C') , on ait:

$$\text{mod} \left[\varphi_{pq}(x, y) - P_{pq}\left(\frac{1}{x - a_p}, \frac{1}{y - b_q}\right) \right] < \frac{\varepsilon}{2mn} \quad [\text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C')].$$

Or le polynôme $P_{pq}\left(\frac{1}{x - a_p}, \frac{1}{y - b_q}\right)$ qui n'a pas de terme indépendant de $\frac{1}{x - a_p}$ et $\frac{1}{y - b_q}$, n'a pas d'autre point singulier que $x = a_p$ extérieur à C et $y = b_q$ extérieur à C' et de plus s'annule pour x ou y infini.

D'après la proposition I, il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$ et $\frac{1}{y-b}$, $Q_{pq}\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$, tel que:

$$\text{mod} \left[P_{pq}\left(\frac{1}{x-a_p}, \frac{1}{y-b_q}\right) - Q_{pq}\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right) \right] < \frac{\varepsilon}{2mn} \quad [\text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C')].$$

En additionnant cette inégalité avec la précédente, il vient:

$$\text{mod} \left[\varphi_{pq}(x, y) - Q_{pq}\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right) \right] < \frac{\varepsilon}{mn} \quad [\text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C')].$$

J'imagine écrites les mn inégalités analogues à la précédente obtenues en faisant $p = 1, 2, \dots, m$, $q = 1, \dots, n$; elles donnent, en remarquant que:

$$\sum \sum \varphi_{pq}(x, y) = f(x, y) \quad (p=1, 2, \dots, m; q=1, 2, \dots, n)$$

et que $\sum \sum Q_{pq}\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$ est un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{y-b}$, soit $Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right) \right] < \varepsilon \quad [\text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C')].$$

C'est le théorème énoncé.

Si a et b sont tous deux à l'infini, on aura au lieu de $Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$ un polynôme entier en x et y .

Proposition III. Soient:

C et C' deux contours fermés simples tracés sur les plans des deux variables x et y ;

a et c deux points du plan de la variable x extérieurs à C ;

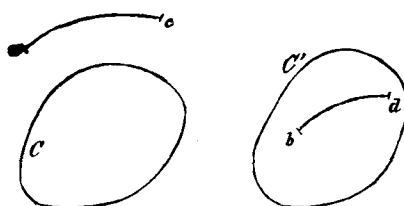
b et d deux points du plan de la variable y intérieurs à C' ;

$f(x, y)$ une fonction des deux variables x et y , régulière en tout point excepté pour les valeurs $x = a$ et $y = b$ et s'annulant pour x infini ainsi que pour y infini;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-c}$ et $\frac{1}{y-d}$, $Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)$ tel que en tout point (x, y) intérieur à C et extérieur à C' , on ait:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right) \right] < \varepsilon$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.



Je trace une ligne ac partant de a et aboutissant à c , extérieure à C ; et d'une façon analogue une ligne bd intérieure à C' . Pour le reste, la démonstration est identique à celle de la proposition I. Le point c peut être rejeté à l'infini.

Proposition IV. Soient:

C_1 et C'_1 deux contours fermés simples tracés respectivement sur les plans des deux variables x et y ;

C un contour fermé simple intérieur à C_1 ;

C' un contour fermé simple enveloppant C'_1 ;

$f(x, y)$ une fonction des deux variables x et y régulière pour x intérieur à C_1 et y extérieur à C'_1 et qui s'annule pour $y = \infty$;

a un point du plan de la variable x extérieur à C_1 , à distance finie ou infinie;

b un point du plan de la variable y intérieur à C'_1 ;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{y-b}$, $Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$ tel que en tout point (x, y) intérieur à C et extérieur à C' , on ait:

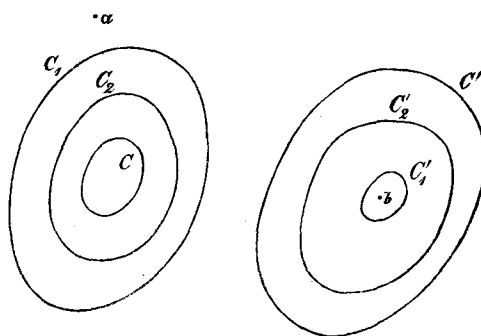
$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right) \right] < \varepsilon$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Je trace le contour fermé simple C'_2 enveloppant C'_1 et enveloppé par C' ; on a, en remarquant que $f(x, y)$ s'annule pour $y = \infty$:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{C'_2} \frac{f(x, z) dz}{z - y} \text{ pour } x \text{ intérieur à } C_1 \text{ et } y \text{ extérieur à } C'_2,$$

l'intégrale est prise le long de C'_2 dans le sens direct. Pour la suite, la démonstration est identique à celle de la proposition II.



25. Les deux propositions suivantes se démontrent encore comme les précédentes.

Proposition V. Soient:

C et C' deux contours fermés simples tracés respectivement sur les plans des deux variables x et y ;

a et c deux points du plan de la variable x intérieurs à C ;

b et d deux points du plan de la variable y intérieurs à C' ;

$f(x, y)$ une fonction régulière excepté pour les valeurs $x = a$ et $y = b$, et qui s'annule pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}, Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)$ tel que en tout point (x, y) extérieur à (C, C') on ait:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right) \right] < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Proposition VI. *Soient:*

C_1 et C'_1 deux contours fermés simples tracés sur les plans respectifs des variables x et y ;

C et C' deux contours fermés simples enveloppant chacun des deux précédents;

a et b deux points intérieurs respectivement à C_1 et C'_1 ;

$f(x, y)$ une fonction des deux variables x et y régulière pour (x, y) extérieur à (C_1, C'_1) et s'annulant pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{y-b}$, $Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$ tel que en tout point (x, y) extérieur à (C, C') , on ait:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right) \right] < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

26. Voici quelques notations employées dans l'énoncé et la démonstration de la proposition suivante:

S désigne une aire connexe prise sur le plan de la variable x et limitée par $n + 1$ contours fermés simples $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$, dont le premier C_0 enveloppe S et chacun des n autres est enveloppé par S ;

C_0^1 désigne un contour fermé simple enveloppant C_0 ;

C_0^2 désigne un contour fermé simple enveloppant C_0^1 ;

C_p^1 ($p = 1, 2, \dots, n$) désigne un contour fermé simple enveloppé par C_p , et C_p^2 désigne un contour fermé simple enveloppé par C_p^1 ; S_1 désigne l'aire limitée par les $(n + 1)$ contours $C_0^1, C_1^1, C_2^1, \dots, C_n^1$; et S_2 l'aire limitée par les $(n + 1)$ contours $C_0^2, C_1^2, \dots, C_n^2$; de cette sorte S est complètement intérieure à S_1 , et S_1 elle-même complètement intérieure à S_2 .

Les notations $S', C_0', C_1', \dots, C_m'$; $S_1', C_0^{1'}, C_1^{1'}, \dots, C_m^{1'}$; $S_2', C_0^{2'}, \dots, C_m^{2'}$, ont une signification analogue relativement au plan de la variable y .

Proposition VII. *Soient:*

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, $(n + 1)$ points du plan de la variable x dont le premier a_0 est extérieur à C_0^2 ; et dont chacun des n autres a_p ($p = 1, 2, \dots, n$) est intérieur au contour C_p^2 ;

$b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$, $(m + 1)$ points du plan de la variable y situés d'une façon analogue relativement aux $(m + 1)$ contours $C_0^{2'}, C_1^{2'}, \dots, C_m^{2'}$;

$f(x, y)$ une fonction de x et y régulière à l'intérieur de l'aire (S_2, S_2') .

Il existe un polynôme $Q\left(\frac{1}{x-a_0}, \frac{1}{x-a_1}, \dots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \frac{1}{y-b_1}, \dots, \frac{1}{y-b_m}\right)$ entier en $\frac{1}{x-a_0}, \frac{1}{x-a_1}, \dots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \frac{1}{y-b_1}, \dots, \frac{1}{y-b_m}$, et tel que en tout point (x, y) intérieur à (S, S') , on ait:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a_0}, \dots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \dots, \frac{1}{y-b_m}\right) \right] < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

J'applique à la fonction $f(x, y)$ et au périmètre de l'aire S_1' du plan de la variable y le théorème de CAUCHY: j'aurai ainsi pour (x, y) intérieur à (S_2, S_1')

$$f(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0^{1'}} \frac{f(x, z) dz}{z - y} + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1^{1'}} \frac{f(x, z) dz}{z - y} + \dots + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_m^{1'}} \frac{f(x, z) dz}{z - y},$$

le sens des intégrations étant direct pour le contour $C_0^{1'}$ et indirect pour les m contours $C_1^{1'}, C_2^{1'}, \dots, C_m^{1'}$.

Je pose:

$$\varphi_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_q^{1'}} \frac{f(x, z) dz}{z - y} \quad (q=0, 1, 2, \dots, m)$$

de telle sorte qu'on aura pour (x, y) intérieur à (S_2, S_1') :

$$(1) \quad f(x, y) = \Sigma \varphi_q(x, y). \quad (q=0, 1, 2, \dots, m)$$

Considérons la fonction $\varphi_q(x, y)$, $(q = 0, 1, 2, \dots, m)$; son expression:

$$\varphi_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_q^{1'}} \frac{f(x, z) dz}{z - y}$$

montre qu'elle est régulière pour x intérieur à S_2 et pour y quelconque mais non situé sur $C_q^{1'}$ qui est une coupure relative à la seule variable y ; de plus $\varphi_q(x, y)$ s'annule pour $y = \infty$.

J'applique à nouveau le théorème de CAUCHY à la fonction $\varphi_q(x, y)$, ($q = 0, 1, 2, \dots, m$) et au périmètre de l'aire S_1 du plan de la variable x ; on aura pour x intérieur à S_1 et y non situé sur $C_q^{1'}$:

$$\varphi_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0^1} \frac{\varphi_q(z, y) dz}{z - x} + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1^1} \frac{\varphi_q(z, y) dz}{z - x} + \dots + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_n^1} \frac{\varphi_q(z, y) dz}{z - x},$$

le sens des intégrations étant direct pour C_0^1 et indirect pour les n contours C_1^1, \dots, C_n^1 .

Je pose:

$$\psi_{pq}(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_p^1} \frac{\varphi_q(z, y) dz}{z - x}; \quad (p=0, 1, 2, \dots, n)$$

de telle sorte que pour x intérieur à S_1 et y non situé sur $C_q^{1'}$, on aura:

$$(2) \quad \varphi_q(x, y) = \Sigma \psi_{pq}(x, y). \quad (p=0, 1, 2, \dots, n)$$

Considérons la fonction $\psi_{pq}(x, y)$; son expression:

$$\psi_{pq}(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_p^1} \frac{\varphi_q(z, y) dz}{z - x}$$

montre qu'elle est régulière dans toute l'étendue des deux plans des variables x et y en exceptant la coupure C_p^1 du plan de la variable x et la coupure $C_p^{1'}$ du plan de la variable y , (coupure qu'admet la fonction $\varphi_q(z, y)$ elle-même); de plus $\psi_{pq}(x, y)$ s'annule pour $x = \infty$ et s'annule aussi pour $y = \infty$ comme la fonction $\varphi_q(z, y)$.

Comparons les égalités (1) et (2) qui ont lieu simultanément pour (x, y) intérieur à (S_1, S_1') ; il vient:

$$(3) \quad f(x, y) = \Sigma \Sigma \psi_{pq}(x, y) \quad (p=0, 1, 2, \dots, n; q=0, 1, 2, \dots, m)$$

pour (x, y) intérieur à (S_1, S_1') et à fortiori pour (x, y) intérieur à (S, S') .

On obtient ainsi pour $f(x, y)$, à l'intérieur de (S, S') une expression qui est la somme de $(m+1)(n+1)$ fonctions $\psi_{pq}(x, y)$, ($p = 0, 1, 2, \dots, n$; $q = 0, 1, 2, \dots, m$); je classe ces fonctions en quatre groupes:

1° la fonction $\psi_{00}(x, y)$ qui ne cesse d'être régulière que sur les

coupures C_0^1 et $C_0^{1'}$; elle est en particulier régulière pour (x, y) intérieur à $(C_0^1, C_0^{1'})$; comme le contour (C_0, C_0') est intérieur à $(C_0^1, C_0^{1'})$, il existe (proposition II) un polynôme Q_{00} entier en $\frac{1}{x - a_0}, \frac{1}{y - b_0}$ tel que à l'intérieur de (C_0, C_0') et à fortiori à l'intérieur de (S, S') , on ait:

$$(4) \quad \text{mod} [\phi_{00}(x, y) - Q_{00}] < \frac{\varepsilon}{(m+1)(n+1)} \quad [\text{à l'intérieur de } (S, S')];$$

2° le second groupe est composé des m fonctions $\phi_{0q}(x, y)$ ($q = 1, 2, \dots, m$); chacune de ces fonctions $\phi_{0q}(x, y)$ est régulière pour x intérieur à C_0^1 et y extérieur à $C_q^{1'}$ et s'annule pour $y = \infty$; il existe (proposition IV) un polynôme Q_{0q} entier en $\frac{1}{x - a_0}, \frac{1}{y - b_q}$ tel que pour x intérieur à C_0 et y extérieur à C_q' , et à fortiori pour (x, y) intérieur à (S, S') on ait: ($q = 1, 2, \dots, m$)

$$(5) \quad \text{mod} [\phi_{0q}(x, y) - Q_{0q}] < \frac{\varepsilon}{(m+1)(n+1)} \quad \text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (S, S');$$

3° le troisième groupe, analogue au précédent, est composé des n fonctions $\phi_{p0}(x, y)$ ($p = 1, 2, \dots, n$); chacune de ces fonctions $\phi_{p0}(x, y)$ est régulière pour x extérieur à C_p^1 et y intérieur à $C_0^{1'}$ et s'annule pour $x = \infty$; il existe un polynôme Q_{p0} entier en $\frac{1}{x - a_p}$ et $\frac{1}{y - b_0}$ tel que l'on ait: ($p = 1, 2, \dots, n$)

$$(6) \quad \text{mod} [\phi_{p0}(x, y) - Q_{p0}] < \frac{\varepsilon}{(n+1)(m+1)} \quad \text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (S, S');$$

4° les mn fonctions $\phi_{pq}(x, y)$ ($p = 1, 2, \dots, n; q = 1, 2, \dots, m$) dont chacune $\phi_{pq}(x, y)$ est régulière pour (x, y) extérieur à $(C_p^1, C_p^{1'})$ et s'annule pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$; il existe (proposition VI) un polynôme Q_{pq} entier en $\frac{1}{x - a_p}, \frac{1}{y - b_q}$ tel que à l'extérieur de (C_p, C_q') et à fortiori à l'intérieur de (S, S') , on ait: ($p = 1, 2, \dots, n; q = 1, 2, \dots, m$)

$$(7) \quad \text{mod} [\phi_{pq}(x, y) - Q_{pq}] < \frac{\varepsilon}{(n+1)(m+1)} \quad \text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (S, S').$$

J'imagine écrites les $(m+1)(n+1)$ inégalités analogues à (4), (5), (6)

et (7): elles sont simultanément vérifiées pour (x, y) intérieur à (S, S') ; je les additionne en remarquant que $\Sigma \Sigma Q_{pq}$ ($p = 0, 1, 2, \dots, n; q = 0, 1, 2, \dots, m$) est un polynôme entier en $\frac{1}{x-a_0}, \frac{1}{x-a_1}, \dots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \frac{1}{y-b_1}, \dots, \frac{1}{y-b_m}$, soit: $Q\left(\frac{1}{x-a_0}, \dots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \dots, \frac{1}{y-b_m}\right)$ et que, à l'intérieur de (S, S') , on a, d'après l'égalité (3):

$$f(x, y) = \Sigma \Sigma \phi_{pq}(x, y). \quad (p=0, 1, 2, \dots, n; q=0, 1, 2, \dots, m)$$

Il vient:

$$\text{mod} \left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a_0}, \frac{1}{x-a_1}, \dots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \frac{1}{y-b_1}, \dots, \frac{1}{y-b_m}\right) \right] < \varepsilon$$

à l'intérieur de (S, S') . C'est le théorème énoncé.

27. Aux propositions préliminaires qui viennent d'être démontrées, j'ajouterai la suivante, qui est connue.

Proposition VIII. *Soient:*

S et S' deux aires connexes prises sur les plans respectifs des deux variables x et y;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \dots$ une suite indéfinie de nombres positifs formant une série convergente;

$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_m(x, y), \dots$ une suite indéfinie de fonctions toutes régulières à l'intérieur de (S, S') et telles que, en tout point (x, y) intérieur à (S, S') , on ait:

$$\text{mod} [f_m(x, y)] < \varepsilon_m. \quad (m=1, 2, \dots, \infty)$$

Si l'on pose:

$$\Phi(x, y) = \Sigma f_m(x, y) \quad (m=1, 2, \dots, \infty)$$

la fonction $\Phi(x, y)$ est régulière à l'intérieur de (S, S') .

28. Avant de démontrer le théorème qui est l'objet de cette quatrième partie, il importe de préciser la nature des contours auxquels il s'applique et d'indiquer à leur sujet quelques remarques.

Soit S une aire connexe qui a pour périmètre une ligne fermée connexe L ; je suppose d'abord que S soit intérieure à L ; L peut présenter des boucles, et peut par conséquent ne pas être un contour fermé

simple; mais je suppose que L puisse être considérée comme la limite d'une suite indéfinie de contours fermés simples $C_1, C_2, \dots, C_m, \dots$ tous intérieurs à L et dont chacun enveloppe le précédent; j'entends par là, d'une façon précise, que si A est un point quelconque intérieur à S on peut choisir m assez grand pour que A soit intérieur à C_m .

De même si S est l'aire extérieure à L , je supposerai que L peut être considérée comme la limite d'une suite indéfinie de contours fermés simples $C_1, C_2, \dots, C_m, \dots$ enveloppant tous L et dont chacun est enveloppé par le précédent. Dans ces conditions L peut être supposée se réduire à une ligne non fermée, sans boucle, AB , limitée aux points A et B et qui est alors considérée comme un contour fermé indéfiniment aplati; l'aire S extérieure à L comprend dans ce cas tout le plan à l'exclusion des points situés sur AB . D'une façon analogue L pourra être supposée se réduire à un seul point A ; l'aire S comprend alors tout le plan à l'exclusion du point A .

Les considérations précédentes s'étendent sans difficulté à une aire à connexion multiple; soit, en effet, S une aire connexe dont le périmètre est composé de $(n + 1)$ lignes fermées connexes L_0, L_1, \dots, L_n , dont la première L_0 enveloppe S et dont chacune des n autres est enveloppée par S ; chacune des n lignes L_1, L_2, \dots, L_n peut être supposée réduite à une ligne AB ou à un point unique A , comme il vient d'être expliqué. Je trace le contour fermé simple C_p^0 intérieur à L_0 et enveloppant les n lignes L_1, L_2, \dots, L_n , et je trace n contours fermés simples $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^n$ dont chacun enveloppe l'une des lignes L_1, L_2, \dots, L_n et laisse à son extérieur tous les autres contours et lignes tracés. J'appelle S_p l'aire qui a pour périmètre $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^n$. On suppose que S puisse être considérée comme la limite d'une suite indéfinie d'aires $S_1, S_2, \dots, S_p, \dots$ dont chacune S_p est limitée par $(n + 1)$ contours fermés simples comme il vient d'être indiqué et dont chacune est complètement intérieure à la suivante; de telle sorte que si A est un point quelconque intérieur à S , il sera aussi intérieur à S_p si p est choisi assez grand.

La ligne L_0 a été supposée fermée; on pourra supposer qu'elle n'est pas une ligne fermée pourvu qu'elle puisse être considérée comme la limite d'une suite de contours fermés simples au sens qui a été donné à cette expression. Par exemple, L_0 pourrait être un cercle de rayon

infini, ou bien encore une hyperbole, en supposant S extérieure à cette hyperbole.

Dans les théorèmes suivants S désigne une aire du plan de la variable x limitée par $(n + 1)$ lignes $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ satisfaisant aux conditions précédentes et S' désigne une aire du plan de la variable y limitée d'une façon analogue par les $(m + 1)$ lignes L'_0, L'_1, \dots, L'_m .

Théorème XI. *On suppose qu'à chaque point (a, b) intérieur à (S, S') correspondent:*

1° *deux cercles: I'_{ab} de centre a et $\gamma_{a,b}$ de centre b , respectivement intérieurs à S et S' ;*

2° *une fonction $f_{ab}(x, y)$ des deux variables x et y monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de (I'_{ab}, γ_{ab}) et telle que si (a', b') est un point intérieur à (I'_{ab}, γ_{ab}) la fonction $f_{ab}(x, y)$ soit équivalente au point (a', b') à la fonction $f_{a'b'}(x, y)$.*

Il existe une fonction $F(x, y)$ de x et y monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de (S, S') et équivalente en tout point (a, b) intérieur à (S, S') à la fonction $f_{ab}(x, y)$ correspondant à ce point.

Théorème XII. *Au lieu de supposer que chacune des fonctions $f_{ab}(x, y)$ de l'énoncé précédent est monotrope et sans espace lacunaire, on peut supposer que chacune d'elles $f_{ab}(x, y)$ est le logarithme d'une fonction $v_{ab}(x, y)$ régulière à l'intérieur de (I'_{ab}, γ_{ab}) et telle que si (a', b') est un point intérieur à (I'_{ab}, γ_{ab}) le quotient $\frac{v_{ab}(x, y)}{v_{a'b'}(x, y)}$ soit régulier et différent de 0 au point (a', b') .*

Il existe alors une fonction $F(x, y)$ définie à l'intérieur de (S, S') à un multiple près de $2i\pi$ et équivalente en tout point (a, b) intérieur à (S, S') à la fonction $f_{ab}(x, y)$.

Démonstration du théorème XI. Soit: $S_1, S_2, \dots, S_p, \dots$ la suite indéfinie d'aires ayant pour limite S et dont chacune est composée d'après les indications du précédent paragraphe, et soit $S'_1, S'_2, \dots, S'_p, \dots$ la suite analogue ayant pour limite S' .

Chacune des aires (S_p, S'_p) ($p = 1, 2, \dots, \infty$) étant intérieure à (S, S') , il existe (théorème I) une fonction de x et y monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de (S_p, S'_p) et équivalente en tout point intérieur à (S_p, S'_p) à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point. Il est clair que l'on obtiendra une nouvelle fonction satisfaisant

aux mêmes conditions que φ_p en retranchant de φ_p une fonction quelconque de x et y régulière à l'intérieur de (S_p, S'_p) .

Considérons la différence:

$$\varphi_{p+1} - \varphi_p = \delta_p,$$

δ_p sera une fonction régulière à l'intérieur de (S_p, S'_p) .

Soit $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_p, \dots$ une suite indéfinie de nombres tous positifs formant une série convergente.

Je dis que les fonctions $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_p, \dots$ peuvent être choisies de telle sorte que l'on ait à l'intérieur de (S_{p-1}, S'_{p-1}) :

$$\text{mod}(\delta_p) < \varepsilon_p. \quad (p=1, 2, \dots, \infty)$$

En effet μ étant un entier positif au moins égal à 2, supposons que les $(\mu - 1)$ premiers fonctions $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_\mu, \dots$ satisfassent à la condition précédente: je vais montrer qu'on peut choisir la fonction $\varphi_{\mu+1}$ de telle sorte qu'elle y satisfasse également.

Il existe, en effet, une fonction $\phi_{\mu+1}$ de x et y monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur de $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$ et équivalente en tout point intérieur à $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$ à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point.

Il faudra prendre pour $\varphi_{\mu+1}$ une fonction équivalente à $\phi_{\mu+1}$ à l'intérieur de $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$ et choisie de telle sorte que, à l'intérieur de $(S_{\mu-1}, S'_{\mu-1})$, on ait:

$$\text{mod}[\varphi_{\mu+1} - \varphi_\mu] < \varepsilon_\mu.$$

Je considère pour cela la différence:

$$(1) \quad \phi_{\mu+1} - \varphi_\mu = \zeta_\mu$$

qui est régulière à l'intérieur de (S_μ, S'_μ) .

Je prends alors dans le plan de la variable x sur le périmètre ou à l'extérieur de L_0 un point a_0 à distance finie ou infinie; si L_0 est un cercle de rayon infini ce choix ne peut se faire qu'en prenant pour a_0 le point ∞ . Sur le périmètre ou à l'intérieur de chacune des lignes L_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) je prends un point quelconque a_ν ; si la ligne L_ν se réduit à un point A , ce choix ne peut se faire qu'en prenant pour a_ν le point A lui même. D'une façon analogue, je prends dans le plan de la variable y les $(m + 1)$ points b_0, b_1, \dots, b_m . Les aires $S_{\mu-1}$ et $S'_{\mu-1}$ sont

limitées, la première par $(n + 1)$ contours fermés simples $C_{\mu-1}^0, C_{\mu-1}^1, \dots, C_{\mu-1}^n$ et la seconde par $(m + 1)$ contours simples $C_{\mu-1}^{0'}, C_{\mu-1}^{1'}, \dots, C_{\mu-1}^{m'}$; les points a_0 et b_0 sont extérieurs respectivement à C_{μ}^0 et $C_{\mu}^{0'}$; $(S_{\mu-1}, S'_{\mu-1})$ est intérieure à (S_{μ}, S'_{μ}) et la fonction ζ_{μ} est régulière à l'intérieur de (S_{μ}, S'_{μ}) .

Il existe alors (proposition VII) un polynôme P entier en $\frac{1}{x - a_0}$, $\frac{1}{x - a_1}, \dots, \frac{1}{x - a_n}, \frac{1}{y - b_0}, \dots, \frac{1}{y - b_m}$ tel que, à l'intérieur de $(S_{\mu-1}, S'_{\mu-1})$, on ait:

$$\text{mod}(\zeta_{\mu} - P) < \varepsilon_{\mu}.$$

Je pose:

$$\varphi_{\mu+1} = \psi_{\mu+1} - P.$$

Comme P est une fonction régulière à l'intérieur de (S, S') et à fortiori à l'intérieur de $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$ la fonction $\varphi_{\mu+1}$ est équivalente à $\psi_{\mu+1}$ à l'intérieur de $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$.

L'égalité (1) devient:

$$\varphi_{\mu+1} - \varphi_{\mu} = \zeta_{\mu} - P$$

avec:

$$\text{mod}(\zeta_{\mu} - P) < \varepsilon_{\mu} \text{ à l'intérieur de } (S_{\mu-1}, S'_{\mu-1})$$

et en posant:

$$\zeta_{\mu} - P = \delta_{\mu}$$

j'aurai:

$$\varphi_{\mu+1} - \varphi_{\mu} = \delta_{\mu}$$

avec:

$$\text{mod}(\delta_{\mu}) < \varepsilon_{\mu} \text{ à l'intérieur de } (S_{\mu-1}, S'_{\mu-1}).$$

On a ainsi déterminé la fonction $\varphi_{\mu+1}$ satisfaisant aux conditions requises. On déterminera de même de proche en proche la suite indéfinie de fonctions $\varphi_{\mu+2}, \varphi_{\mu+3}, \dots$.

Je définis une fonction $F(x, y)$ à l'intérieur de (S, S') par la condition suivante: on a, à l'intérieur de (S_p, S'_p) ($p = 2, 3, \dots, \infty$)

$$(3) \quad F(x, y) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{p-\infty} \delta_{p+r}.$$

On a ainsi une infinité d'expressions de la fonction $F(x, y)$; il faut montrer que chacune d'elles a un sens bien déterminé et que toutes définissent la même fonction.

La série du second membre de (3) est une fonction régulière de x et y à l'intérieur de (S_p, S'_p) ; car on a, à l'intérieur de (S_p, S'_p) , la suite indéfinie d'inégalités:

$$\text{mod}(\delta_{p+r}) < \varepsilon_{p+r}. \quad (r=1, 2, 3, \dots, \infty)$$

La suite des ε_{p+r} étant une série convergente, il en résulte (proposition VIII) que la série:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}$$

est une fonction régulière de x et y à l'intérieur de (S_p, S'_p) comme chacun des termes qui la composent.

L'expression (3) a donc un sens bien déterminé; il reste à montrer que deux quelconques des expressions de $F(x, y)$ fournissent la même fonction. Soit (k étant un entier positif) les deux expressions:

$$F(x, y) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}$$

et

$$F(x, y) = \varphi_{p+k+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+k+r};$$

elles définissent $F(x, y)$ respectivement à l'intérieur de (S_p, S'_p) et (S_{p+k}, S'_{p+k}) ; elles définissent donc simultanément $F(x, y)$ à l'intérieur de (S_p, S'_p) ; pour vérifier qu'elles donnent la même fonction il suffit de se rappeler que:

$$\delta_{p+r} = \varphi_{p+r+1} - \varphi_{p+r}.$$

La fonction $F(x, y)$ satisfait aux conditions de l'énoncé. Car si (a, b) est un point quelconque intérieur à (S, S') , on peut prendre p assez grand pour que (a, b) soit intérieur à (S_p, S'_p) ; dès lors $F(x, y)$ est définie dans le domaine de (a, b) par l'égalité:

$$F(x, y) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}.$$

La série du second membre est une fonction régulière au point (a, b) ; donc, en ce point, $F(x, y)$ est équivalente à φ_{p+1} et par suite à la fonction $f_{ab}(x, y)$ de l'énoncé.

Démonstration du théorème XII. Elle est analogue à la précédente avec cette différence que les fonctions $F(x, y)$, φ , ψ ne sont définies qu'à un multiple près de $2i\pi$; il n'en est pas de même des fonctions δ dont chacune est définie sans ambiguïté. On sera en effet conduit comme pour la démonstration précédente à poser:

$$\psi_{\mu+1} - \varphi_{\mu} = \xi_{\mu}.$$

On prendra pour ξ_{μ} l'une quelconque des déterminations de la différence $\psi_{\mu+1} - \varphi_{\mu}$; chacune de ces déterminations est une fonction régulière dans (S_{μ}, S'_{μ}) ; le polynôme P se détermine comme précédemment et l'on pose:

$$\delta_{\mu} = \xi_{\mu} - P;$$

δ_{μ} est ainsi définie sans ambiguïté.

29. Du théorème précédent on déduit les deux suivants par un mode de raisonnement déjà donné.

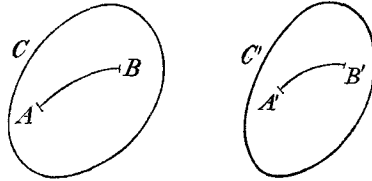
Théorème XIII. *Il existe une fonction $V(x, y)$ régulière en tout point (a, b) intérieur à (S, S') et telle que le quotient $\frac{v_{ab}(x, y)}{V(x, y)}$ soit régulier et différent de 0 au point (a, b) .*

Théorème XIV. *Si une fonction $\Phi(x, y)$ n'admet à l'intérieur de (S, S') que des singularités non essentielles, elle est le quotient de deux fonctions W et V régulières à l'intérieur de (S, S') et telles que la fonction obtenue est irréductible à l'intérieur de (S, S') .*

Il est à remarquer que dans l'énoncé précédent aucune hypothèse n'est faite sur la nature des singularités que peut admettre $\Phi(x, y)$ sur le périmètre de (S, S') ; ce périmètre peut être une ligne de points singuliers essentiels pour la fonction $\Phi(x, y)$.

30. Je signale un cas particulier du théorème précédent pour montrer un exemple de l'application qu'on peut en faire.

Soient C et C' deux contours fermés simples pris respectivement sur les plans des deux variables x et y ; AB une ligne sans boucle intérieure à C et limitée aux points A et B ; $A'B'$ une ligne analogue intérieure



à C' ; soit $\Phi(x, y)$ une fonction de x et y qui n'admet à l'intérieur de C et C' que des singularités non essentielles; excepté sur les lignes AB , $A'B'$ qui peuvent être des lignes de points singuliers essentiels. En considérant AB et $A'B'$ comme des contours fermés indéfiniment aplatis, le théorème précédent, appliqué à cet exemple, montre que $\Phi(x, y)$ est le quotient de deux fonctions régulières à l'intérieur de C et C' , sauf sur les lignes AB et $A'B'$.

31. Je me suis borné dans cette quatrième partie, pour éviter des complications de notations qui m'ont paru inutiles, à considérer le cas de deux variables complexes. Les mêmes démonstrations s'étendent sans aucune difficulté au cas de n variables complexes.

Caen, le 28 octobre 1893.

