LA COMPONENTE ORIZZONTALE DEL MOTO ISTANTANEO DELLA TERRA.

Nota di G. GIANFRANCESCHI.

1. — **Posizione del problema.**

In tutti i fenomeni nei quali ha influenza il moto della terra rispetto all'etere la prima cosa che si richiederebbe sarebbe proprio la conoscenza di questo moto. Da quando Fresnel esprime la sua persuasione che l'etere cosmico, che trasmette a noi le varie specie di energia raggianti, non prende parte al moto della terra, se non forse in piccolissima parte, si sperò, e non senza buone ragioni, di potere con esperienze dimostrare l'esistenza di questo vento di etere che sarebbe appunto l'effetto del moto della terra e della stabilità dell'etere. È noto che finora tutte le esperienze che sono state fatte a questo scopo hanno dato risultato negativo. Ma la speranza non è ancora svanita e di quando in quando si fanno nuovi tentativi. Generalmente si ricorre allo studio di fenomeni ottici. Quando si adopera una sorgente di luce prodotta sulla terra le esperienze non permettono di riscontrare se non un effetto di secondo grado, perchè quello di primo grado risulta compensato. Questo effetto di secondo grado potrebbe essere ancora apprezzabile, come lo era nelle famose esperienze di Michelson e Morley del 1887, ripetute in varie circostanze, fino alle ricerche di Morley e Miller nel 1905. Anche questo effetto non si è potuto riscontrare e questo risultato negativo fu il punto di partenza che condusse prima alla celebre ipotesi di Lorentz e Fitz-Gerald sulla contrazione dei corpi in moto e poi a tutta la teoria della Relatività.

Più promettenti appaiono le esperienze che si appoggiano alle osservazioni di fenomeni celesti ossia allo studio di sorgenti di luce che non siano connesse con la terra. Anche queste

hanno dato finora risultato negativo, ma non è ancora detta su questo l'ultima parola.

In questa mia nota mi propongo soltanto di risolvere un problema preliminare che permetta di scegliere le condizioni migliori nelle quali sia possibile studiare il problema fondamentale, tenendo conto di quello che sappiamo del moto della terra. Poichè importa, in tutti questi casi, di conoscere per quanto è possibile la velocità della terra in direzione ed in intensità, anzi, poichè in generale le esperienze che si fanno con sorgenti terrestri si riferiscono a cammini di raggi luminosi orizzontali, importa di conoscere la proiezione di quella velocità sul piano orizzontale.

E questo è appunto il problema che mi propongo: *determinare per ogni ora del giorno e per ogni giorno dell'anno la proiezione della velocità istantanea della terra sul piano orizzontale.*

La velocità della terra che viene qui in considerazione è quella risultante dal moto di traslazione della terra intorno al sole e dal moto di traslazione del sistema solare verso un punto determinato della sfera celeste.

Quando consideriamo questo moto rispetto alle stelle supponiamo che l'insieme di queste resti in quiete, in altri termini facciamo astrazione da qualunque possibile moto dell'insieme. Perciò che riguarda i moti propri delle stelle, questi non hanno influenza nel problema attuale, perchè i fenomeni ai quali ci riferiamo si compiono in un tempo piccolissimo e trascurabile rispetto a quello che porta seco una modificazione sensibile nella distribuzione delle stelle.

Nella trattazione del problema parlo spesso della sfera celeste. Il senso che dò a questa parola è quello stesso che sogliono dargli gli astronomi; cioè una sfera ideale sulla superficie della quale si immaginano proiettate le stelle, e nel cui centro si trova il sistema solare. Il raggio di questa sfera è talmente grande che le dimensioni del sistema solare si possono considerare trascurabili. Così pure immagino trascurabile ri-

petto a questo raggio il cammino compiuto dal sole in un anno, od anche in un piccolo numero di anni, in modo che tutto il sistema nostro si conserva sensibilmente nel centro della sfera. È facile persuadersi dell'ammissibilità di questa ipotesi. Prendendo come velocità del sistema solare nel suo moto traslatorio la velocità di 20 chilometri al secondo, il cammino percorso in un anno sta al cammino percorso nello stesso tempo dalla luce nel rapporto

$$\frac{v}{c} = \frac{2}{3} \frac{1}{10000} = \frac{1}{15000}.$$

e prendendo come raggio della sfera celeste una distanza misurata da 10 anni di luce, che è certamente un valore minimo della distanza media delle stelle dal sole, il cammino fatto dal sistema solare in un anno sarebbe soltanto $\frac{1}{150000}$ del raggio di questa sfera, e quindi veramente trascurabile.

2. — La traiettoria della terra.

Il moto di un punto della terra rispetto alle stelle fisse è la risultante di tre moti principali: quello di rotazione della terra intorno al proprio asse, quello di traslazione intorno al sole, quello di traslazione del sistema solare. Nel determinare la traiettoria terrestre basta considerare il moto del centro, quindi il primo moto di rotazione non entra qui in considerazione. Il moto della terra intorno al sole si può in un calcolo grossolano, come basta al caso presente, assimilare ad un moto circolare uniforme con velocità di 30 chilometri al secondo; quello di traslazione del sole si può considerare come un moto uniforme diretto verso Vega e con la velocità di 19,5 chilometri al secondo. Questa direzione fa col piano dell'eclittica un angolo di 61° circa; il piano che contiene questa direzione ed è perpendicolare all'eclittica incontra il piano di questa secondo un diametro che si allontana di poco dalla linea dei solstizi. Questa deviazione sarebbe di circa 8°, ma la tra-

slazione del sole non è esattamente verso Vega, è un po' più ad ovest tra Vega e la costellazione di Ercole, ciò che diminuisce la deviazione, in modo che si può supporre che quella intersezione coincida appunto con la linea dei solstizi, almeno finchè non sarà conosciuta con più precisione la direzione del moto solare. D'ora innanzi chiamerò con V questo punto della sfera celeste verso cui è diretto il sole; le coordinate equatoriali di questo punto sono le seguenti: ascens. retta 18^h , declinazione $+38^\circ$.

Rispetto allo Zodiaco il punto V si avvicina alla costellazione del Sagittario, e quando la terra si trova in questa costellazione il sole apparisce in quella diametralmente opposto, i Gemelli; quindi la direzione della traslazione del sole si piega verso la posizione che ha la terra nel solstizio di estate.

Allora la posizione relativa delle due traiettorie può rappresentarsi in proiezione come nella fig. 1. L'elisse EAIP

Fig. 1.

rappresenta l'eclittica e i punti segnati con queste lettere sono la posizione che ha la terra rispettivamente nel solstizio di estate, nell'equinozio di autunno, nel solstizio d'inverno e nell'equinozio di primavera. Il sole sta nel centro S, e la retta SV è

la traiettoria del sole, l'angolo VSE è l'angolo minimo che SV fa col piano dell'eclittica, ossia l'angolo di 61° . La velocità di traslazione della terra intorno al sole è in ogni istante diretta secondo la tangente all'eclittica; nei quattro punti delle stagioni è rappresentata dalle tangenti EE', AA', II', PP'. La velocità della terra è in ogni istante data dalla risultante della velocità sull'eclittica e di quella di traslazione del sistema solare. Queste due direzioni in E ed in I sono ad angolo retto, in A formano un angolo $\pi - \alpha$, in P un angolo α di 61° circa, nei punti intermedi un angolo variabile compreso fra il minimo α e il massimo $\pi - \alpha$.

Nell'ipotesi fatte è facile costruire la traiettoria del centro della terra. Per lo scopo che mi propongo conviene riferirsi a tre piani ortogonali scelti così. Per piano xy prendiamo il piano parallelo al piano dell'orizzonte per una latitudine di 42° ¹⁾, ma passante per il sole. Poichè il giacimento di questo piano cambia ad ogni istante rispetto ai moti del centro della terra, bisogna anche fissare il momento al quale il disegno si riferisce. Prenderò d'ora innanzi nelle figure la disposizione che ha il piano dell'orizzonte rispetto alla sfera celeste alla mezzanotte del solstizio di estate. L'asse x è scelto nella direzione nord sud è positivo verso sud, l'asse y da ovest verso est positivo verso est, e l'asse z verticale positivo verso lo zenit; sicchè il piano xz è il piano meridiano, e yz quello che prende il nome di primo verticale.

La fig. 2 dà le tre proiezioni della traiettoria terrestre sui tre piani coordinati così definiti. La proiezione II è fatta sul piano del meridiano. L'orizzonte si proietta tutto nell'asse x ; l'eclittica alla mezzanotte del solstizio estivo è tutta vista nel suo diametro EI, e la terra si trova in E, il sole in O.

¹⁾ Questa latitudine è presso a poco quella di Roma. Più esattamente la latitudine di Roma è di $41^\circ 53' 53''$.

Anche le esperienze di Michelson e Morley furono fatte ad una latitudine di circa 42° .

Fig. 2.

La direzione della traslazione del sole nell'ipotesi fatta, sta allora sul piano del meridiano ed è quindi vista nella sua vera grandezza, in $0V$, e fa con l'asse z un angolo di 4° circa ¹⁾.

Il moto della terra sull'eclittica viene visto qui come un moto armonico la cui ampiezza totale è data dal diametro EI . Se per comodità di disegno dividiamo tutto il periodo annuo in 16 parti è facile segnare su EI le posizioni che la terra prende in ciascuno dei punti di divisione; queste posizioni sono segnate con i numeri da uno a sedici contando zero nel punto E .

Mentre la terra ruota intorno al sole, questo si sposta da 0 verso V con moto uniforme. Le due velocità sono tali che mentre la terra compie un giro intiero intorno al sole, questo si è spostato di una distanza che è eguale a $4,1$ raggi della eclittica, ossia nella figura, da 0 fino al punto V . Anche questo intervallo lo dividiamo in 16 parti; e allora non avremo che a disegnare la risultante di un moto armonico lungo EI con uno uniforme lungo $0V$. La traiettoria risultante è una sinusoide inclinata. I punti segnati in questa curva rappresentano le posizioni che prende la terra nei corrispondenti punti di divisione dell'anno, e precisamente il punto 4 corrisponderà all'equinozio di autunno, il punto 8 al solstizio di inverno, il punto 12 all'equinozio di primavera e il punto 0 e 16 al solstizio di estate.

Mentre la terra si sposta lungo questa curva il sole va prendendo sulla $0V$ le posizioni segnate con i numeri corrispondenti.

Sul piano yz la proiezione si presenta come nel disegno I della stessa figura. L'eclittica si vede qui secondo un'elisse il cui asse maggiore sta su y . La terra percorre quest'elisse andando da E verso A . La direzione $0V$ si proietta sull'asse z . Riportiamo sull'elisse e su $0V$ i punti di divisione adoperati nel disegno II e determiniamo la traiettoria risultante facendo

¹⁾ Infatti l'altezza dell'equatore sull'orizzonte è di $90 - \varphi$, nel caso presente 48° , la declinazione del polo V verso il quale si muove il sole è di 38° sicchè l'altezza di V risulta $48 + 38 = 86^\circ$.

scorrere l'elisse lungo il suo asse minore in modo che il centro venga a prendere successivamente le posizioni segnate sull'asse z , e che rappresentano le posizioni successive del sole.

Finalmente nel disegno III si ha la proiezione della traiettoria terrestre sul piano orizzontale xy . L'eclittica si proietta in un'elisse il cui asse maggiore è secondo y ed eguale al diametro del cerchio di riferimento, e l'asse minore secondo x ed eguale alla proiezione di EI della proiezione II sullo stesso asse. La direzione OV si proietta su x nel senso positivo da O verso destra, e il cammino percorso dal sole in un anno viene visto nel piccolo segmento compreso tra O e il punto 16. Anche qui riportati sull'elisse i punti di divisione e fatto scorrere l'elisse lungo l'asse x si viene a costruire per punti la traiettoria.

3. — Vari metodi di soluzione.

La soluzione completa del problema richiede che si assegni la proiezione della velocità della terra per ogni istante dell'anno sul piano orizzontale in direzione, in senso ed in intensità. Poichè la proiezione della risultante di due moti è eguale alla risultante delle proiezioni dei moti componenti un primo metodo di soluzione potrebbe consistere in determinare separatamente la proiezione sul piano orizzontale del moto di traslazione solare, e poi quella del moto di traslazione della terra sull'eclittica. Tanto per l'uno come per l'altro, poichè il piano su cui si fa la proiezione, comunque si scelga, è sempre connesso con un punto della terra che prende parte al movimento, così la proiezione della velocità avrà sempre un'origine fissa nell'origine degli assi coordinati. Basterà dunque assegnare solo un altro punto per ogni istante. Per questo secondo punto conviene sempre scegliere il punto della sfera celeste verso cui è diretta la velocità istantanea, e che d'ora innanzi chiamerò *apice istantaneo* della velocità. Il problema consiste allora nel proiettare per ogni istante un punto determinato di una superficie sferica sopra un piano principale che passa per il

centro della sfera. I due moti traslatori non alterano la posizione relativa della sfera e del suo piano, il moto di rotazione diurna lo immaginiamo applicato alla superficie sferica, e quindi il piano conserva la sua giacitura rispetto al disegnatore.

In queste condizioni la traslazione solare ha una velocità sempre diretta verso un punto fisso della sfera. Questo punto si muove solo per effetto della rotazione diurna descrivendo un cerchio, e la proiezione di questo moto sul piano orizzontale sarà un'elisse di cui è facile assegnare gli elementi. Da un giorno all'altro questa proiezione resta sempre la stessa, però non resterà la stessa la distribuzione delle ore perchè mentre il moto diurna di rotazione risulta misurato col tempo siderale, la distribuzione delle ore in pratica vogliamo farla con quello solare.

Per il moto della terra sull'eclittica l'apice della velocità non è un punto fisso della sfera celeste, ma un punto che si va spostando continuamente e che descrive in un anno tutto il giro dello zodiaco. Se supponiamo che per un giorno resti fisso e cambi soltanto da un giorno all'altro, l'apice così definito descrive sulla sfera celeste per effetto del moto diurna un parallelo che sul piano orizzontale si proietta in una elisse, ma il parallelo e l'elisse si spostano da un giorno all'altro; in particolare l'elisse proiezione conserva sempre il suo asse maggiore nella direzione dell'asse y quello minore nella direzione di x , il centro si sposta lungo x e la curva resta sempre tangente in due punti al cerchio di riferimento.

La posizione dell'apice istantaneo sulla sfera celeste tanto per il primo come per il secondo moto è sempre facile a determinarsi perchè per il primo moto è un punto fisso di coordinate conosciute, per il secondo è sempre un punto dell'eclittica che si trova a 90° di distanza dalla posizione apparente del sole, e quindi le sue coordinate astronomiche si possono facilmente assegnare per ogni giorno dell'anno. La proiezione dell'uno e dell'altro apice sul piano orizzontale risulterebbe facile determinarla se di esso si conoscessero le coordinate altazi-

mutali. In questo caso l'*azimut* A dà subito la direzione della proiezione della velocità istantanea sul piano orizzontale e l'*altezza* h permette di assegnare anche la sua grandezza che sarebbe in ogni istante $v \cos h$, se v è la velocità del moto che si considera. Ma la posizione dei punti sulla sfera celeste è conosciuta ordinariamente in coordinate equatoriali ossia *ascensione retta* e *declinazione*. La soluzione del problema richiede dunque di trasformare per ogni punto le coordinate equatoriali in coordinate altazimutali. Questa trasformazione richiede un lavoro non breve; questa via di soluzione non è dunque la più pratica.

Si può invece ricorrere alla soluzione grafica che è molto rapida e che per la natura del problema dà risultati soddisfacentissimi.

Nella soluzione grafica il problema si riduce a disegnare sul piano orizzontale l'elisse proiezione del parallelo che descrive il punto V sulla sfera celeste, e quelli variabili che descrivono gli apici istantanei sull'eclittica, e segnare nell'uno e negli altri la distribuzione delle ore. I vettori uscenti dall'origine delle coordinate e che si arrestano ad un punto dell'elisse danno in direzione ed in senso la proiezione della velocità per il moto considerato e per il momento corrispondente al punto dell'elisse. Per ogni istante si hanno due vettori componenti sui quali si possono portare valori proporzionali alle velocità e determinare così la risultante.

Perciò che riguarda la grandezza della velocità i due moti componenti possono assumersi entrambi come moti uniformi; l'errore che così si commette è trascurabile nella soluzione per la natura del problema. Ne segue che i vettori che vanno dal centro delle coordinate sul piano orizzontale ad un punto di un'elisse, risulta proporzionale alla grandezza della proiezione della velocità corrispondente, di modo che il variare di questi vettori dà senz'altro il variare della componente orizzontale del moto a cui l'elisse si riferisce.

Fin qui se si considerano separatamente i due moti componenti. Ma il problema si può risolvere tenendo conto del moto risultante nello spazio e facendone la proiezione sul piano orizzontale. Anche in questo modo si può giungere alla soluzione tanto per via trigonometrica quanto per via grafica; questa seconda è sempre più rapida ed elegante ed è questa che riporterò qui.

Il procedimento è questo: si determina per ciascun momento il punto della sfera celeste verso cui è diretto il moto risultante del centro della terra, basterà determinarlo per un certo numero di punti in modo da individuarne il luogo geometrico, si fa la proiezione di questi punti sul piano orizzontale e infine si applica l'effetto della rotazione diurna, che consiste in un moto circolare uniforme di ciascun punto sulla sfera celeste, e un corrispondente moto ellittico sul piano orizzontale. Con ciò si viene ad avere la proiezione della velocità in direzione e senso e il modo di variare della intensità durante il giorno. Per avere la grandezza in vero valore bisogna separatamente assegnare il modo di variare della velocità risultante per il centro della terra e determinare così il fattore che si deve introdurre per la scala delle lunghezze nella lettura dei vettori ellittici sull'orizzonte.

Darò prima la soluzione di questo secondo quesito e poi quella del primo.

4. — La distribuzione della velocità.

In ogni istante la velocità del centro della terra è la risultante dei due moti, quello di traslazione del sole e quello della terra sull'eclittica. La fig. 1 ci mostra qual'è la posizione relativa di queste due componenti, la prima è diretta sempre secondo OV , l'altra è sempre tangente all'eclittica. Per determinare l'angolo che formano tra loro queste due direzioni basta osservare che esso è sempre eguale a quello formato da OV con un raggio perpendicolare a quello che dà la posizione della

terra e che ha lo stesso senso della velocità della terra lungo l'eclittica. Per esempio quando la terra è in T la sua velocità lungo l'eclittica è secondo TT' , l'angolo che questa direzione fa con OV è eguale all'angolo che fa con OV il raggio OT_1 che sta a 90° dal raggio OT nel senso dello spostamento della terra. Il raggio OT_1 va ruotando sull'eclittica col moto stesso della terra; la successione dei valori che va prendendo l'angolo VOT , è quella stessa dei valori che prende l'angolo delle due velocità componenti. Ora l'angolo VOT_1 si può determinare per ogni istante dell'anno con una semplicissima formola di trigonometria sferica.

Sulla sfera di centro O , e che ha per cerchio massimo il cerchio dell'eclittica, i tre angoli VOE , $EO T_1$ e VOT_1 determinano i tre archi di cerchio massimo BE , ET_1 , BT_1 ; ossia gli archi b, c, a . Quello che noi cerchiamo è il valore di a . Ora il triangolo sferico che ha questi tre archi come lati è evidentemente rettangolo in E perchè il piano VOE secondo le ipotesi scelte è perpendicolare al piano dell'eclittica. Di questo triangolo i due lati b e c sono conosciuti perchè b è la *latitudine celeste* di V e c è data dalla posizione della terra sull'eclittica; l'arco b conserva sempre lo stesso valore durante l'anno, l'arco c va prendendo tutti i valori da 0° a 360° . Dalla trigonometria sferica sappiamo che il coseno dell'ipotenusa a del triangolo sferico rettangolo i cui cateti sono b e c è sempre data dalla formola

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Graficamente si prende sopra un cerchio ausiliare un angolo eguale a b formato da due raggi e se ne determina il coseno geometrico, si proietta questo sopra un altro raggio che faccia un angolo c con quello su cui si è costruito il primo coseno, e si ha così sull'ultimo raggio un segmento che rappresenta il prodotto $\cos b \cos c$, ossia il coseno di a . L'angolo corrispondente a questo coseno è l'angolo VOT_1 che si cercava. Se ora sui raggi che formano questo angolo si portano

i valori della velocità di traslazione del sole sopra di uno, e quella del moto della terra sull'eclittica sopra l'altro si può subito costruire la diagonale che dà la velocità risultante. Questa operazione si può ripetere per quanti punti si vuole portando per c valori variabili da 0° a 360° e si ottengono altrettanti valori della velocità risultante.

Nella fig. 3 sono riportati i valori della risultante così ottenuta per 16 punti dell'anno corrispondenti ai 16 punti di

Fig. 3.

divisione dell'eclittica adoperati nella fig. 2, in altrettanti vettori uscenti da uno stesso centro e disposti a formare tra loro angoli eguali come sarebbero disposti i vari raggi OT_1 della fig. 3 ai quali corrispondono. Riunendo insieme con una curva le estremità di questi vettori si ha una linea che permette di assegnare il valore della velocità della terra sulla sua traiettoria reale per ogni giorno dell'anno.

Nell'ipotesi fatta dell'uniformità del moto della terra sull'eclittica quei sedici punti di divisione corrispondono a 16 giorni dell'anno distribuiti uniformemente. Nella tabella che

segue sono riportati i 16 punti col giorno che ad essi corrisponde e con la velocità della terra in chilometri per secondo.

TABELLA I.
Le velocità della terra.

Punti	Giorno	Velocità	Punti	Giorno	Velocità
0	21 giugno	36,0	9	12 gennaio	39,0
1	14 luglio	32,5	10	4 febbraio	41,0
2	6 agosto	29,5	11	27 »	42,5
3	28 »	27,0	12	21 marzo	43,0
4	20 settembre	26,0	13	13 aprile	42,5
5	13 ottobre	27,0	14	6 maggio	41,0
6	5 novembre	29,5	15	29 »	39,0
7	28 »	32,5	16	21 giugno	36,0
8	20 dicembre	36			

Delle frazioni di chilometri non è riportato che il mezzo chilometro perchè un'approssimazione maggiore sarebbe illusoria.

La curva della fig. 3 è simmetrica rispetto all'asse AP che unisce i punti 4 e 12. Il valore massimo della velocità si ha nel punto 12 che corrisponde all'equinozio di primavera con la velocità di 43 chilometri per secondo. Quel giorno infatti le due direzioni dei moti componenti formano un angolo minimo. Nel punto 4 invece, equinozio di autunno, si ha il valore minimo della velocità, 26 chilometri per secondo, perchè le due velocità componenti formano un angolo massimo.

5. — Il luogo degli apici istantanei.

In ogni istante il moto risultante della terra ha una direzione che si può individuare assegnando il punto della sfera celeste verso cui la terra si sposta. Questo punto è quello che per semplicità chiamo l'*apice istantaneo della velocità*. Questo

va spostandosi continuamente, e dopo un anno, per le ipotesi fatte, andrà a riprendere le stesse posizioni. Esso descrive dunque una curva chiusa che chiamerò il *luogo degli apici istantanei*. Vediamo come si può disegnare questa curva sulla sfera celeste e come si possa applicarla alla soluzione del problema.

Nella fig. 2 abbiamo la proiezione della traiettoria della terra su tre piani coordinati ortogonali, yz , xz , xy . Se per un punto qualunque della traiettoria conduciamo la tangente questa ci dà la direzione della velocità per quel punto. Anche di questa direzione la figura ci dà tre proiezioni. Due soltanto di queste ci bastano per individuare il punto della sfera celeste verso cui è diretta la velocità istantanea.

Determiniamo gli angoli che le proiezioni di quella velocità fanno con gli assi coordinati, e che si possono ricavare dal disegno. Chiamiamo α l'angolo che la proiezione di tale velocità sul piano orizzontale xy fa con l'asse x , con β l'angolo che la proiezione sul piano xz fa con lo stesso asse x , con γ quello che la proiezione sul piano yz fa con l'asse y , e finalmente con ξ l'angolo che la tangente nello spazio fa con la sua proiezione orizzontale. Quest'ultimo angolo giace sul piano perpendicolare al piano orizzontale xy passante per la direzione della velocità, che è sempre una retta uscente da 0, ed è quello che corrisponde all'*altezza astronomica* del punto in cui la velocità incontra la sfera celeste. Se chiamiamo con U la velocità risultante del centro della terra e con u la sua proiezione sul piano orizzontale si ha sempre $u = U \cos \xi$. Si fa presto a dimostrare che gli angoli α, β, γ , sono legati fra loro da queste relazioni

$$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} \beta \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} \gamma \sin \alpha$$

sicchè il valore dell'angolo ξ che ci importa conoscere si può determinare servendoci dell'una o dell'altra perchè tutti e tre gli angoli α, β, γ , sono conosciuti. In ogni caso l'una serve di controllo all'altra.

Conosciuto l'angolo ξ che è l'*altezza astronomica* del polo istantaneo della velocità del centro della terra, e l'angolo α che ne rappresenta l'*azimut*, la posizione del polo istantaneo sulla sfera celeste risulta individuata.

Praticamente per la determinazione dell'angolo ξ si procede in questo modo. Sopra tre cerchi ausiliari di raggio unitario immaginati giacenti sui tre piani fondamentali riportiamo rispettivamente gli angoli α, β, γ che ricaviamo dalla fig. 2, e precisamente l'angolo α sul piano xy , β su xz , e γ su yz . Questi tre angoli risultano formati dal semiasse a cui si riferiscono e da un raggio uscente dall'origine. Questi tre raggi costituiscono così le tre proiezioni della velocità istantanea del centro della terra che si suppone sempre nell'origine delle coordinate. Supponiamo aver disegnato queste tre posizioni per un punto determinato della traiettoria terrestre. Prendiamo sul cerchio II la tangente trigometrica dell'angolo β , riportiamola col suo valore sul raggio che dà la proiezione nel piano xy ossia il raggio che forma con x l'angolo α , proiettiamo il segmento così ottenuto sull'asse x e avremo così su questo prodotto $\text{tang } \beta \cos \alpha$, ossia il valore di $\text{tg } \xi$. La determinazione grafica di ξ quando se ne conosce la tangente si fa servendosi di un nuovo cerchio ausiliare con raggio eguale ai precedenti. E da questo stesso cerchio si ricava subito $\cos \xi$ che rappresenta in lunghezza la proiezione del raggio OP che va dal centro all'apice istantaneo che si considera, sulla direzione della velocità nel piano xy . Sicchè riportando questo segmento che misura $\cos \xi$ sul raggio disegnato nel cerchio III veniamo a determinare il punto proiezione del vertice istantaneo sul piano xy . Da questa proiezione si risale subito a quella sul cerchio II, e da questa all'altra sul cerchio I, e in questo modo la proiezione dell'apice istantaneo P sulla sfera è individuata mediante le sue tre proiezioni sui piani coordinati. Con un procedimento analogo ci si potrebbe servire della seconda formola che dà $\text{tang } \xi$.

Se si ripete questa operazione per un certo numero di punti scelti ad opportuni intervalli sulla traiettoria terrestre veniamo

ad ottenere altrettanti punti che appartengono al luogo degli apici istantanei sulla sfera celeste, e così a descrivere questa curva nelle sue tre proiezioni. L'apice istantaneo della velocità

Fig. 4.

descrive questa curva in un anno passando per le posizioni numerate nella fig. 4 nei giorni corrispondenti a quelli riportati nella tabella 1.

Le tre proiezioni del luogo dei poli disegnate nella fig. 4 si riferiscono alle circostanze fissate in principio cioè valgono per un osservatore che si trovi a 42° di latitudine nord, alla mezzanotte del solstizio di estate. Possono valere per qualunque longitudine purchè si prenda sempre l'ora del tempo locale e si ritenga trascurabile lo spostamento solare durante un giorno.

La curva così disegnata resta fissa sulla sfera celeste e partecipa quindi al moto apparente diurno. Per effetto di questo moto ciascun suo punto descrive in un giorno un cerchio parallelo all'equatore, cerchio che sul piano xz risulta proiettato nel suo diametro che è una corda del cerchio di riferimento, e sugli altri piani si proietta secondo un'elisse.

6. — La proiezione orizzontale della velocità istantanea.

Esaminiamo in particolare la proiezione sul piano xy , e vediamo come questa possa darci per ogni ora del giorno e per ogni giorno dell'anno la componente orizzontale della velocità istantanea della terra. Ricordiamo che i punti di divisione della curva assegnano il giorno in cui l'apice istantaneo ha quella posizione sulla sfera celeste, i giorni corrispondenti a ciascun punto sono quelli della tabella 1. Se il giorno per cui si vuole determinare la velocità coincide con uno di quelli della tabella la posizione sua è già segnata; se no, se ne può fissare la posizione con un semplice metodo di interpolazione, badando però che l'apice P non descriva la curva con velocità uniforme.

Supponiamo di studiare il moto della terra per il 28 novembre. A questo giorno corrisponde il punto 7 della curva. La posizione del punto corrispondente sulle altre proiezioni è già segnata, e in ogni caso è ben semplice il determinarlo. Importa di conoscere la proiezione sul piano xz . Sia questo il punto P segnato. Per questo punto conduciamo una corda al cerchio di riferimento, parallela al diametro QQ' che rappresenta l'equatore. Questa corda è la proiezione del parallelo

che l'apice P descrive sulla sfera celeste in quel giorno. Questa corda ci dà gli elementi necessari per disegnare sul piano xy l'elisse proiezione di quello stesso parallelo. L'asse maggiore di questo'elisse è perpendicolare all'asse x ed in lunghezza è eguale alla corda dell'altra proiezione. L'asse minore è su x ed eguale alla proiezione della stessa corda sullo stesso asse. Anche la proiezione del centro coincide con la proiezione del punto di mezzo di quella corda. L'elisse si può dunque facilmente disegnare. E allora i vettori uscenti dall'origine delle coordinate e che si arrestano ad un punto di quest'elisse ci danno le proiezioni orizzontali della velocità della terra sul piano dell'orizzonte in direzione ed in senso, ed anche in grandezza a meno di un fattore da determinarsi. Per avere questo fattore bisogna leggere sulla fig. 3 la velocità risultante della terra nel giorno voluto e determinare il fattore per cui bisogna moltiplicare il raggio del cerchio di riferimento della figura acciocchè risulti eguale a quel valore: in altri termini determinare la scala con cui bisogna leggere le lunghezze quel giorno.

Tutto questo risulta evidente se si ragiona così. La velocità effettiva del centro della terra si può rappresentare con un vettore uscente dall'origine delle coordinate e diretto verso l'apice istantaneo P . Per un osservatore che sta sul piano orizzontale che si considera, questo vettore per effetto del moto diurno va descrivendo la superficie laterale di un cono che ha il vertice nel centro delle coordinate e per direttrice il parallelo descritto dal punto P in quel giorno. In altre parole quel vettore va prendendo tutte le posizioni date dalle generatrici di quel cono. Sul piano orizzontale quelle generatrici si proiettano nei vettori che escono dal punto O e si arrestano ad un punto dell'elisse proiezione del parallelo descritto da P . L'elisse tocca in due punti il cerchio di riferimento, i vettori che vanno a quei due punti sono in vera grandezza eguali alle generatrici del cono detto sopra, quindi per quei punti la proiezione della velocità coincide in valore con la velocità risultante.

In ogni caso, anche quando i due punti di contatto non esistono la generatrice del cono è sempre eguale al raggio del cerchio di riferimentó, e i vettori corrispondenti sul piano xy ne sono sempre la vera proiezione, importa quindi solo determinare la scala in cui si deve leggere il raggio del cerchio in modo che coincida con la velocità della terra in quel giorno affinchè i vettori letti con quella scala, diano la proiezione cercata anche in intensità.

Rimane ad esaminare come saranno distribuite le ore sui paralleli che rappresentano il moto diurno degli apici istantanei. È evidente che se ci volessimo riferire al tempo siderale, la questione della distribuzione delle ore sarebbe già risolta, perchè le ore sono sempre fisse sopra gli stessi meridiani. Ma vogliamo invece riferirci al tempo solare e calcolare sempre il mezzogiorno e la mezzanotte quando il sole si trova sul meridiano dell'osservatore.

Per l'apice segnato col numero zero, o sedici, sappiamo già, per le condizioni in cui è stato posto il problema, che la posizione disegnata è quella che esso possiede alle 24 del solstizio di estate. Allora sarà facile disegnare sul parallelo corrispondente i punti che segnano le altre ore del giorno. Poichè il moto di rotazione diurno si compie con velocità angolare uniforme basterà disegnare il parallelo nella sua vera forma circolare, dividerlo in 24 parti a cominciare dal punto conosciuto e riportare i punti di divisione sull'elisse proiezione.

Per tutti gli altri paralleli si potrà procedere egualmente quando si conosca l'ora per un punto di esso. È facile vedere che dalla posizione dell'apice 16 alle 24 si può dedurre l'ora in cui gli altri apici segnati prenderanno la posizione disegnata anche nella proiezione. Infatti l'apice istantaneo della velocità percorre in un anno tutta la linea che ne rappresenta il luogo, e la percorre nel senso stesso in cui vediamo il sole percorrere l'eclittica; in un sedicesimo di anno ne percorre il tratto corrispondente all'intervallo che passa tra due numeri consecutivi.

In questo intervallo di tempo anche il sole nel suo moto apparente sull'eclittica ha percorso un sedicesimo di giro e quindi la distribuzione delle ore ha proceduto di un sedicesimo di giorno nel senso stesso. Quindi il punto 1 che il 21 giugno si trovava nella posizione segnata in proiezione alle ore 24, dopo un sedicesimo di anno occuperà quella posizione alle ore $24 - \frac{1}{16} 24$. E per gli altri punti analogamente in modo che il punto d'ordine n occuperà la posizione del disegno alle ore $24 - \frac{n}{16} 24$. Se il luogo degli apici istantanei fosse stato diviso in 24 parti lo spostamento da un punto al successivo sarebbe di un'ora. Sicchè se i punti di divisione vengono segnati da 1 a 24 nel senso delle ore crescenti, come è accennato nel disegno in cifre romane, i punti di divisione col loro numero proprio individuano senz'altro la distribuzione delle ore sui paralleli corrispondenti.

La posizione dell'apice istantaneo, col numero che porta seco ci dà dunque il modo di fissare la posizione corrispondente ad ogni ora del giorno per il vettore proiezione della velocità. È da notare che per la simmetria della figura tutti i paralleli, eccetto i due estremi corrispondono a due posizioni dell'apice istantaneo. Su questi dunque avremo due distribuzioni diverse delle ore, secondochè si considera l'uno o l'altro degli apici.

Se si disegna in scala più grande la proiezione III della fig. 4 con i 24 punti di divisione e con la distribuzione delle ore su ciascuno dei 13 elissi che risultano, e si uniscono con curve i punti che corrispondono alle ore eguali sui vari paralleli, si vengono ad avere due sistemi di curve, uno per gli apici istantanei che si trovano dalla parte delle y positive, e l'altro per gli altri. Le due curve che corrispondono ad una stessa ora vengono ad incontrarsi ai due estremi nei punti dell'elisse massimo da una parte, e in quelli dell'elisse minimo dall'altra. Nella figura sono disegnate le due curve che corrispondono all'ora 6; la curva che si spinge verso E ossia

verso y positivo appartiene ai poli istantanei che stanno dalla parte delle y negative ossia verso ovest.

Da un disegno del cerchio orizzontale fatto in scala molto più ampia e con 24 punti di divisione e con tutti gli elissi corrispondenti, sono stati ricavati i valori che riporto nella tabella 2. In essa sono assegnate le ore nelle quali la proiezione orizzontale della velocità istantanea della terra prende le direzioni segnate su ciascuna colonna, e i valori corrispondenti della componente orizzontale. Da quanto si è detto risulta che questi valori sono quelli che corrispondono al centro della terra. Ma, poichè la velocità di un punto qualunque della superficie terrestre non differisce da quella del centro se non per una quantità che si può supporre trascurabile rispetto alla velocità risultante, così quei valori possono applicarsi anche al punto in cui si trova l'osservatore. In questo modo si viene a tener conto del moto rotatorio diurno soltanto per ciò che riguarda la giacitura del piano orizzontale. Del resto si farebbe presto ad aggiungere anche il contributo della velocità di rotazione che per un punto qualunque della terra è sempre diretta verso est.

Nella prima colonna della tabella sono segnati i punti di divisione del luogo degli apici istantanei con i giorni che vi corrispondono, nelle altre le ore e i minuti primi in tempo solare in cui la componente orizzontale prende le direzioni segnate in cima alla colonna, e in chilometri ed ettometri il valore corrispondente della proiezione della velocità.

Per una parte dell'anno i paralleli descritti dall'apice istantaneo si proiettano in elissi che giacciono tutti nel semipiano delle x negative. La proiezione della velocità non prende mai in quel tempo la direzione verso est, nè quella verso ovest. Non esiste neppure una vera direzione sud; ho messo nella tabella in questo caso i numeri negativi che misurano il vettore che va dall'origine delle coordinate al punto dell'elisse che ad esse più si avvicina.

TABELLA II.

La componente orizzontale della velocità.

Giorno	a nord			ad est			a sud		ad
	ore	min.	chilo- metri	ore	min.	chilo- metri	ore min.	chilo- metri	ore mi
24 21 giugno	XVI	10	31,6	XXIII	50	30,9	IV 10	13,8	VIII
23 6 luglio	XV	50	31,0	0	5	24,3	III 50	8,5	VII
22 21 »	XV	40	30,3	0	55	16,4	III 40	3,6	VI
21 6 agosto	XV	55	29,0	—	—	—	III 55	— 1,3	—
20 21 »	XVI	30	27,3	—	—	—	IV 30	— 4,9	—
19 6 settemb.	XVII	15	25,7	—	—	—	V 15	— 7,7	—
18 21 »	XVIII	0	25,0	—	—	—	VI 0	— 9,2	—
17 6 ottobre	XVIII	45	25,8	—	—	—	VI 45	— 7,7	—
16 21 »	XIX	35	27,3	—	—	—	VII 35	— 4,9	—
15 6 novemb.	XX	0	29,0	—	—	—	VIII 0	— 1,3	—
14 21 »	XX	10	30,3	V	25	16,4	VIII 10	+ 3,6	X
13 6 dicembre	XX	15	31,0	IV	30	24,3	VIII 15	8,5	XII
12 21 »	XX	5	31,6	III	45	30,9	VIII 5	13,8	XII
11 6 gennaio	XIX	40	30,8	II	50	34,6	VII 40	18,3	XII
10 21 »	XIX	15	30,4	II	0	38,5	VII 15	22,6	XII
9 6 febbraio	XVIII	50	30,0	I	5	40,8	VI 50	25,5	XII
8 21 »	XVIII	30	29,4	0	40	41,7	VI 30	27,0	XII
7 6 marzo	XVIII	15	29,4	0	20	42,5	VI 15	28,2	XII
6 21 »	XVIII	0	29,0	0	0	43,0	VI 0	29,0	XII
5 6 aprile	XVII	40	29,4	XXIII	45	42,5	V 40	28,2	XI
4 21 »	XVII	20	29,4	XXIII	30	41,7	V 20	27,0	XI
3 6 maggio	XVII	5	30,0	XXIII	30	40,8	V 5	25,5	X
2 21 »	XVI	45	30,4	XXIII	30	38,5	IV 45	22,6	X
1 6 giugno	XVI	25	30,8	XXIII	35	34,6	IV 25	18,3	IX

Per la maggior parte dell'anno invece i paralleli descritti dall'apice istantaneo incontrano il piano orizzontale xy ed hanno quindi un arco che giace al disotto dell'orizzonte. Sulla proiezione orizzontale gli elissi corrispondenti toccano il cerchio di riferimento in due punti che corrispondono all'intersezione del parallelo col cerchio dell'orizzonte. A questi due punti corrispondono due istanti che si possono chiamare il *sorgere* e il *tramontare* dell'apice istantaneo. In quei momenti la velocità istantanea della terra giace tutta sul piano dell'orizzonte.

All'equinozio di primavera l'apice istantaneo è un punto vicinissimo all'equatore sicchè sorge esattamente ad est e tramonta ad ovest come una stella equatoriale, restando così dodici ore sotto l'orizzonte. Da quel giorno si va sollevando sopra l'equatore verso il polo nord, quindi le due posizioni del sorgere e del tramonto si avvicinano contemporaneamente alla direzione nord e diminuisce il tempo in cui resta al disotto dell'orizzonte. Il 6 agosto sorge a 16° ad est del nord e tramonta a 16° ad ovest restando sotto l'orizzonte soltanto tre ore. Nei giorni successivi questo ravvicinamento continua, in modo che 9 giorni dopo, ossia il 15 agosto i due momenti vengono a coincidere, e alle $16^h 30'$ l'apice istantaneo lambisce l'orizzonte nella sua culminazione inferiore. Da quel giorno non si abbassa più fino all'orizzonte e la sua culminazione inferiore avviene sempre più in alto fino all'equinozio di autunno dopo il quale torna ad abbassarsi. Il 27 ottobre arriva a lambire l'orizzonte alle $19^h 50'$ e da allora i due momenti del sorgere e del tramonto tornano ad essere distinti e sempre più lontani dal nord fino all'equinozio di primavera.

Nella tabella 3 sono riportati i giorni, le ore del sorgere e del tramonto e le direzioni corrispondenti a quei momenti misurate per ambedue in gradi di distanza dalla direzione nord. Nella prima colonna sono riportati i punti di divisione del luogo dei vertici istantanei, nella seconda il giorno corrispondente, nella terza e quarta i momenti nei quali l'apice istantaneo sorge e tramonta, nella quinta la direzione della velocità in quel momento data in distanza angolare dalla direzione nord, e nell'ultima il valore della velocità nei giorni corrispondenti.

TABELLA III.

*I momenti nei quali la velocità della terra
giace sul piano dell'orizzonte.*

Punto	Giorno	Sorgere ore min.	Tramonto ore min.	Dire- zione	Velocità chilom.
6	21 marzo	XXIV 0	XII 0	90°	43,0.
5	6 aprile	XXIII 35	XI 45	89 30'	42,5
4	21 »	XXIII 5	XI 35	88	41,8
3	6 maggio	XXII 40	XI 30	84 30	41,0
2	21 »	XXII 5	XI 25	78	39,2
1	6 giugno	XXI 25	XI 25	71	37,3
24	21 »	XX 45	XI 35	62	36,0
23	6 luglio	XIX 50	XI 50	50 30	33,2
22	21 »	XVIII 40	XII 40	36	31,0
21	6 agosto	XVII 25	XIV 25	16	29,5
—	15 »	XVI 30	XVI 30	0° 0'	28,2
—	27 ottobre	XIX 50	XIX 50	0° 0'	28,2
15	6 novembre	XXI 30	XVIII 30	16	29,5
14	21 »	XXIII 10	XVII 10	36	31,0
13	6 dicembre	XXIV 15	XVI 15	50 30	33,2
12	21 »	XXIV 40	XV 30	62	36,0
11	6 gennaio	XXIV 40	XIV 40	71	37,3
10	21 »	XXIV 35	XIII 55	78	39,2
9	6 febbraio	XXIV 25	XIII 15	84 30	41,0
8	21 »	XXIV 15	XII 45	88	41,8
7	6 marzo	XXIV 10	XII 20	89 30	42,5
6	21 »	XXIV 0	XII 0	90 0	43,0

7. — Soluzione del problema per qualunque latitudine.

La curva degli apici istantanei è una linea che resta fissa sulla sfera celeste, e i suoi punti si possono individuare mediante le coordinate celesti equatoriali. Non è difficile dedurre queste coordinate dalle proiezioni della curva date nella fig. 4. I punti di divisione della curva nella proiezione sul piano xz trasportati sul cerchio meridiano permettono subito la lettura delle declinazioni. Per le ascensioni rette si richiede una nuova proiezione sul piano dell'equatore, ed è facile ottenerla dalla proiezione orizzontale sul piano xy . È in questo modo, da figure più grandi che non sono qui riprodotte, che ho dedotto i valori delle coordinate equatoriali dei 24 punti di divisione riportati nella tabella 4.

Naturalmente trattandosi di soluzione grafica non è possibile raggiungere un'approssimazione molto grande. Ma una maggiore approssimazione sarebbe sempre illusoria perchè non è conosciuto con precisione il punto della sfera celeste verso cui si muove il centro del nostro sistema solare..

La curva così individuata non è legata alla latitudine del luogo, ciò che dipende dalla latitudine sono le proiezioni di quella e i valori che se ne deducono. Ma è sempre facile disegnare per qualunque latitudine le proiezioni di una curva individuata sulla sfera celeste per mezzo delle coordinate equatoriali dei suoi punti.

TABELLA IV.

*Le coordinate equatoriali degli apici istantanei
del moto terrestre.*

Punti	Giorno	Ascensione retta	Declinazione
0 24	21 giugno	331° 30'	+ 19° 40'
1	6 »	320 30	13
2	21 maggio	309 45	7 30
3	6 »	299 30	4 0
4	21 aprile	289 30	1 30
5	6 »	279 40	0 30
6	21 marzo	270 0	— 0 15
7	6 »	260 20	+ 0 30
8	21 febbraio	250 30	1 30
9	6 »	240 30	4 0
10	21 gennaio	230 15	7 30
11	6 »	219 30	13 0
12	21 dicembre	208 30	19 40
13	6 »	197 0	27 0
14	21 novembre	185 0	36 0
15	6 »	168 0	46 0
16	21 ottobre	147 0	54 40
17	6 »	121 0	61 15
18	21 settembre	90 0	63 40
19	6 »	59 0	61 15
20	21 agosto	33 0	54 40
21	6 »	12 0	46 0
22	21 luglio	355 0	36 0
23	6 »	343 0	27 0

Prendiamo per esempio la proiezione sul piano xz data nel cerchio II della fig. 4. Per passare dalla latitudine di 42° per la quale il disegno è fatto ad un'altra qualsiasi, non c'è che da far ruotare di un angolo determinato gli assi ortogonali x e z . Infatti la proiezione è fatta sopra il meridiano che contiene l'asse dei solstizi, l'equatore è visto nel suo diametro QQ' , e l'asse della sfera celeste sta sul piano del disegno. L'angolo che questo asse fa col semiasse negativo delle x è eguale all'angolo φ latitudine del luogo, 42° nel caso presente, e quindi l'angolo che l'equatore fa con l'asse x è $90 - \varphi$. La longitudine non influisce, salvo grandezze trascurabili, purchè ci si riferisca in ogni caso al tempo solare del luogo. E allora per passare da questa latitudine ad un'altra qualunque basterà far ruotare gli assi ortogonali in modo che essi formino con l'equatore e quindi con l'asse celeste l'angolo voluto. E passare da questa alle altre proiezioni non presenta nessuna nuova difficoltà. Le tabelle 1, 2 e 3 risultano modificate nei valori riportati, la tabella 4 nò perchè è indipendente dalla latitudine.