6. Die Magnetisirung eines Ringes durch eine theilweise Bewickelung; von J. Sauter.

(Hierzu Taf. I Fig. 1—2.)

I.

Als Grundlage der Theorie des magnetischen Kreislaufes kann man folgende experimentellen Untersuchungen betrachten:

1. Einige Experimente von Oberbeck¹⁾, aus dessen Schrift über Fortpflanzung der magnetischen Induction entnommen; dieselben bezogen sich auf einen theilweise bewickelten Ring und ergaben für einen bewickelten Bogen von 26° einen Unterschied von nur 9 Proc. zwischen dem maximalen und dem minimalen Werthe des Kraftflusses am Umfang des ganzen Ringes. (Mit Kraftfluss bezeichne ich kurzweg das Flächenintegral der Induction über einen Querschnitt des magnetischen Kreislaufes.)

2. Einige Experimente von v. Ettingshausen²⁾, ebenfalls über die Streuung an einem theilweise bewickelten Ringe, speciell zur Prüfung einer Formel von Boltzmann³⁾; es zeigte sich für eine kleinere magnetisirende Kraft eine weitaus grössere Differenz des Kraftflusses als bei den Oberbeck'schen Versuchen; für eine grössere Kraft wurde diese Differenz geringer.

3. Eingehendere Messungen über den Verlauf der Streuung bei grossen Kräften an einem geschlitzten, total bewickelten Ringe von H. Lehmann⁴⁾; es wurde insbesondere die Schlitzweite variiert; im grossen und ganzen zeigte sich auch eine weitaus grössere Streuung als bei den Oberbeck'schen Versuchen.

Wünschbar erscheint nun eine Untersuchung des *Einflusses der Dimensionen des Ringes*.

Auf Anregung von Hrn. H. F. Weber unternahm ich eingehendere Versuche über die *Vertheilung des Kraftflusses*

1) Oberbeck, Habilitationsschrift, Halle 1878.

2) v. Ettingshausen, Wied. Ann. 8. p. 554.

3) Boltzmann, Wiener Anzeiger Nr. 22. 1878.

4) H. Lehmann, Wied. Ann. 48. p. 406.

an zwei geschlossenen, theilweise bewickelten Ringen von verschiedenen Dimensionsverhältnissen und untersuchte speciell den *Verlauf der Streuung bei variabler Stärke des magnetisirenden Stromes*.

Zur Verfügung standen mir zwei Ringe von beinahe quadratischem Querschnitte, mit zwei Seiten parallel zur Ringaxe; der erste bestand aus dünnem Eisendrahte, der zweite aus gestanzten Blechlamellen.

Die Dimensionen betrugen

beim ersten Ringe: Radius R des Mittelkreises 19,92 cm, Breite des Querschnittes in axialer Richtung 2,90 cm, Breite des Querschnittes in radialer Richtung 2,93 cm;

beim zweiten Ringe: $R = 7,50$ cm, Querschnittsbreite in axialer Richtung 2,82 cm, in radialer Richtung 3,00 cm.

Die magnetisirende Bewickelung erstreckte ich successiv über den ganzen, den halben, den vierten und den achten Theil des Umfanges; die Anzahl der Windungen betrug

beim ersten Ringe:

für Bewickelung über den ganzen Umfang	306
„ „ „ den halben Umfang	230
„ „ „ einen Quadranten	153
„ „ „ einen Bogen von 45°	115

beim zweiten Ringe:

für Bewickelung über den ganzen Umfang	164
„ „ „ den halben Umfang	75
„ „ „ einen Quadranten	48
„ „ „ einen Bogen von 45°	35.

Das inducirte System bestand bei jedem Ringe aus zwei längs des Umfanges verstellbaren Spulen. Beim ersten Ringe hatten die Spulen je 318 Windungen; ihre Breite betrug 2,8 cm, ihre Höhengausdehnung bis 1,8 cm über die Eisenfläche. Beim zweiten Ringe hatte jede Spule 100 Windungen; die Breite betrug 1,4 cm, die Höhengausdehnung bis 1,6 cm über die Eisenfläche. Zwei solche „Localspulen“ ermöglichen eine bequemere experimentelle Vergleichung der Kraftflüsse an zwei verschiedenen Querschnitten.

Auf die Messmethode brauche ich nicht einzugehen; durch den ersten Ausschlag des ballistischen Galvanometers wurde

der bei plötzlicher Commutirung des magnetisirenden Stromes inducirte electromotorische Impuls beobachtet; die Stärke des magnetisirenden Stromes wurde an der Tangentenboussole abgelesen; zur Aichung des Galvanometers diente ein Paar benachbarter kreisförmiger Spulen von bekanntem gegenseitigen Inductionscoefficienten.

Für jeden Ring bestimmte ich nun, abgesehen von der sich bei totaler Bewickelung ergebender Magnetisirungscurve:

1. Den Verlauf des maximalen Kraftflusses $\mathfrak{G}_{\max}$ und der „Streuung“ $\mathfrak{G}_{\max} - \mathfrak{G}_{\min} / \mathfrak{G}_{\max}$ bei zunehmender Stärke des magnetisirenden Stromes.

$\mathfrak{G}_{\max}$ entspricht dem mittleren Querschnitt des bewickelten Bogens, $\mathfrak{G}_{\min}$ der diametral gegenüberliegenden Stelle. Für diese Messung wurde eine solche Anordnung getroffen, dass abwechselnd die eine und die andere Localspule, eventuell beide in entgegengesetztem Sinne hintereinander geschaltet werden konnten.

2. Bei constanter Stärke des magnetisirenden Stromes den Verlauf der Variation des Kraftflusses am Umfang des Ringes.

Zu diesem Zwecke wurden beide Localspulen in entgegengesetztem Sinne hintereinander geschaltet und die eine Spule successiv an verschiedene in gleichen Intervallen gewählten Stellen des Umfanges gebracht, während die andere Spule an einer passenden Stelle festgehalten wurde; die Grösse der Intervalle betrug $11\frac{1}{4}^\circ$ beim ersten Ringe, 15° beim zweiten.

Von den Resultaten der Messungen sind in beiliegender Tafel graphisch dargestellt:

1. Die sogenannte Magnetisirungscurve, mit der magnetisirenden Kraft K als Abscisse und dem specifischen Momente M des Ringkörpers, d. h. dem magnetischen Momente pro Einheit des Ringvolumens als Ordinate.

2. Die Curven der Streuung bei variabler magnetomotorischer Kraft m ; als Ordinate, das Verhältniss $\mathfrak{G}_{\max} - \mathfrak{G}_{\min} / \mathfrak{G}_{\max}$, die Abscissenaxe gemeinsam mit der Magnetisirungscurve.

Die Resultate der Messungen der Variation des Kraftflusses am Umfange stelle ich durch das Ergebniss ihrer Analyse nach Fourier dar; als Anfangsrichtung für die Zählung der querschnittsbestimmenden Winkelcoordinate wurde der

mittlere Querschnitt des bewickelten Bogens genommen; daneben stehen die entsprechenden Werthe der mittleren magnetisirenden Kraft $m/2\pi R$.

Ich habe der Angabe der unmittelbar aufgenommenen Curven der Abhängigkeit von $\mathfrak{G}_{\max}$ und m diejenige des „mittleren“ durch die Beziehung

$$2\pi \mathfrak{G}_{\text{mittl}} = \int_0^{2\pi} \mathfrak{G} d\omega$$

definirten Kraftflusses vorgezogen; diese Grösse kann aus $\mathfrak{G}_{\max}$ abgeleitet werden, mit Hülfe der Streuung und des Variationsgesetzes am Umfange.

Tabelle A.

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_1 \cos \omega + \mathfrak{G}_2 \cos 2\omega + \mathfrak{G}_3 \cos 3\omega + \dots$$

α	$\frac{m}{2\pi R}$	$\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{G}_1}$	$\frac{\mathfrak{G}_3}{\mathfrak{G}_1}$	$\frac{\mathfrak{G}_4}{\mathfrak{G}_1}$
Erster Ring:				
180°	11,65	−0,0013	−0,0641	
180	7,88	−0,0007	−0,0588	
180	4,91	−0,0007	−0,0583	
180	3,055	−0,0003	−0,0600	
180	1,760	−0,0003	−0,0628	
90	10,14	+0,2460	+0,0602	
90	6,30	+0,2445	+0,0583	
90	4,665	+0,2345	+0,0613	
90	2,85	+0,2455	+0,0549	
90	1,255	+0,2715	+0,0720	+0,0002
45	7,87	+0,3140	+0,1450	+0,0735
45	5,14	+0,3220	+0,1425	+0,0745
45	3,52	+0,3160	+0,1365	+0,0695
45	1,633	+0,3290	+0,1345	+0,0535
Zweiter Ring:				
90°	10,16	+0,2240	+0,0501	
90	6,19	+0,2245	+0,0469	
90	3,20	+0,2230	+0,0462	
45	7,31	+0,3015	+0,1327	+0,0635
45	4,71	+0,2935	+0,1310	+0,0658
45	2,29	+0,2965	+0,1236	+0,0625

II.

Um die gewonnenen Messungsergebnisse auch theoretisch interpretieren zu können, habe ich folgende angenäherte Theorie zusammengestellt. Dieselbe ist speciell für die Magnetisirung eines Ringes von quadratischem Querschnitt durch eine theilweise Bewickelung ausgebildet; sie könnte aber leicht für andere Gestalt des Querschnittes und andere Magnetisirungsverhältnisse umgeändert werden.

Ich bezeichne mit R den Radius des Mittelkreises, d. h. des Ortes der Mittelpunkte der Querschnittsquadrate, mit $2c$ die Seitenlänge dieser Quadrate, mit x das „Dimensionsverhältniss“ c/R ; die Querschnittsfigur nehme ich derartig gegenüber der Ringaxe orientirt, dass zwei Seiten, die „Mantelseiten“ zu dieser Axe parallel werden.

Als Ausgangspunkt der Vereinfachung benutze ich die Bemerkung, dass, bei nicht allzu grossem x und nicht allzu kleinem bewickelten Bogen α , die vorkommenden Grössen specifisches Moment, electromagnetische Kraft, Induction u. s. w. im Querschnitt sowohl nach Grösse als nach Richtung wenig variiren und dass dafür der Werth am Umfange des Mittelkreises als maassgebend gilt.

Diesen Standpunkt einnehmend, bezeichne ich mit M_t und M_r die peripherische und radiale Componenten des specifischen Momentes am Umfang des Mittelkreises und stelle deren Verlauf durch zwei Fourier'sche Reihen dar:

$$(1) \quad \begin{aligned} M_t &= M_0 + M_1 \cos \omega + M_2 \cos 2 \omega + M_3 \cos 3 \omega + \dots, \\ M_r &= \mathfrak{M}_1 \sin \omega + \mathfrak{M}_2 \sin 2 \omega + \mathfrak{M}_3 \sin 3 \omega + \dots; \end{aligned}$$

als Argument ω nehme ich den Winkel zwischen dem laufenden Querschnitt und dem mittleren Querschnitt des bewickelten Theiles, als positive Richtung ω , die Richtung der electromagnetischen Kraft an der Stelle $\omega = 0$; M_t positiv soll der Richtung ω positiv, M_r positiv der centrifugalen Richtung entsprechen.

Dieselbe Darstellungsweise soll für die magnetisirende Kraft K^* und deren Bestandtheile benutzt werden. Ich unterscheide drei Bestandtheile: K , electromagnetische Kraft, herrührend von der stromdurchflossenen Bewickelung; H' und H'' , miteinander die „Rückwirkung“ H der magnetischen Endflächen

bildend; H'' wäre durch das Vorhandensein von M_r und H' durch die Veränderlichkeit von M_t mit ω bedingt.

Ich erinnere noch an die bekannten Beziehungen für die Entwicklung einer periodischen Function $f(\omega)$ in eine Fourier'sche Reihe:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= A_0 + \sum (B_p \cos p \omega + C_p \sin p \omega), \\ 2 \pi A_0 &= \int_0^{2\pi} f(\omega) d\omega, \quad \pi B_p = \int_0^{2\pi} f(\omega) \cdot \cos p \omega \cdot d\omega, \\ \pi C_p &= \int_0^{2\pi} f(\omega) \sin p \omega \cdot d\omega. \end{aligned}$$

Ich betrachte zunächst die electromagnetische Kraft und zwar im Falle einer einzigen magnetisirenden Windung an der Stelle $\omega = 0$; i wäre die Stromstärke.

Ist x klein, so wird der Mittelkreis ungefähr mit einer electromagnetischen Kraftlinie zusammenfallen, d. h. $\overline{K}_r$ wird überall sehr klein gegenüber $\overline{K}_t$ bleiben; das immer positiv bleibende $\overline{K}_t$ wird einen sehr grossen maximalen Werth für $\omega = 0$ bekommen, mit wachsendem ω sehr rasch fallen, um bei $\omega = \pi$ einen sehr kleinen maximalen Werth zu erreichen.

Daraus folgt, dass die ersten Coefficienten der Fourier'schen Cosinusreihe für $\overline{K}_t$ nur sehr langsam abnehmen werden, was am besten mittels der Betrachtung der Beziehung

$$\pi B_p = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega) \cos p \omega \cdot d\omega$$

einzusehen ist. Hat die Function $f(\omega)$ nur in der Gegend $\omega = 0$, d. h. in der Gegend $\cos p \omega = 1$, einen bedeutenden Werth, so ist das Integral für kleinere p wenig von

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\omega) d\omega$$

verschieden, d. h. vom doppelten Werthe des constanten Gliedes; letzteres kann ohne weiteres angegeben werden, wenn bemerkt wird, dass

$$R \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{K}_t d\omega$$

die magnetomotorische Kraft $4 \pi i$ darstellt.

Für die genaue Entwicklung von $\bar{K}_t$ ist Gebrauch zu machen von der Formel

$$K_t = \frac{i}{R} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \int_{-c'}^{+c'} \int_{-c'}^{+c'} \frac{T}{R+y} dy dz,$$

wo

$$T = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (R+y)^2 + z^2} - 2R(R+y) \cos \omega},$$

in der Weise, dass T in der Form einer Fourier'schen Reihe eingeführt wird. Diese Grösse T wäre die reciproke Distanz des durch ω definirten Punktes des Mittelkreises von dem in der Ebene $\omega = 0$ durch seinen Abstand $R+y$ von der Ringaxe und seine Höhe z über die Ebene des Mittelkreises bestimmten Punkte.

Die Seitenlänge des durch die Windung gebildeten Quadrates habe ich mit $2c'$ bezeichnet; es wäre $c' > c$.

Zu dieser Formel gelangt man, wenn man die stromführende Windung durch eine äquivalente magnetische Doppelfläche ersetzt, deren Belegungen auf zwei unendlich nahe Querschnittsebenen vertheilt wären; die Oberflächendichte auf der in die Richtung ω positiv fallenden Nordbelegung wäre $(i)/(R+y)R d\omega$ im Abstände $R+y$ von der Ringaxe, wo $d\omega$ den Winkel der Belegungsflächen bezeichnet.

Im Folgenden soll für die Entwicklung von $\bar{K}_t$ die Schreibweise

$$\bar{K}_t = \frac{i}{R} \sum (k_p \cos p \omega)$$

benutzt werden, wo die Zahlen k_p Functionen von $x' = c'/R$ wären; es würde $k_0 = 2$, und angenähert $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = 4$.

Der Uebergang von $\bar{K}_t$ auf das dem bewickelten Bogen α entsprechende K_t erfolgt dadurch, dass an Stelle von $i(J)/(\alpha) d\alpha_0$, an Stelle von $\omega \omega - \alpha_0$ gesetzt und von $\alpha_0 = -\alpha/2$ bis $\alpha_0 = \alpha/2$ integrirt wird; aus $\cos p \omega$ wird somit

$$\frac{2}{p} \sin \frac{p\alpha}{2} \cos p \omega,$$

und für K_t ergibt sich

$$(2) \quad R K_t = 2J + J \sum \frac{\sin \frac{1}{2} p \alpha}{\frac{1}{2} p \alpha} k_p \cos p \omega.$$

J wäre ein Zeichen für Ni , wo N die Anzahl der Windungen bedeute.

Für die Entwicklung von $\bar{K}_r$ in die Form

$$\bar{K}_r = \frac{i}{R} \sum (\mathfrak{k}_p \sin p \omega)$$

kann ein analoger Weg eingeschlagen werden; es wäre die Formel

$$\bar{K}_r = i \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{-c'}^{+c'} \int_{-c}^{+c'} \frac{T' dy dz}{R + y}$$

zu benutzen, wo T' aus T mittels folgender Operationen abgeleitet werden kann: man ersetzt y durch $r - R$, derivirt partiell nach R und ersetzt wieder r durch $R + y$.

Der Uebergang von $\bar{K}_r$ auf K_r erfolgt wie der Uebergang von $\bar{K}_i$ auf K_i und führt zur Formel

$$(2) \quad R K_r = J \sum \frac{\sin \frac{1}{2} p \alpha}{\frac{1}{2} p \alpha} \mathfrak{k}_p \sin p \omega.$$

Ich gehe jetzt zur Betrachtung der Rückwirkung H über, welche durch das Vertheilungsgesetz der Magnetisirung M bestimmt wird.

Dabei will ich folgende Annahmen über die kleinen Veränderungen der Magnetisirung im Laufe des Querschnittes benutzen:

1. Die Grösse der peripherischen und der radialen Componenten der Magnetisirung variire umgekehrt proportional dem Abstände von der Ringaxe; M_i , M_r wären nun die Werthe am Mittelpunkt des Querschnittes.

2. Die bei Unveränderlichkeit im Querschnitte überall normal zur Querschnittsebene bleibende Componente M_i soll nur noch am Mittelpunkte normal bleiben, an einem anderen Punkte bekomme sie eine kleine, dem Abstand vom Mittelpunkte proportionale Neigung; die verlängerten Richtungen sollen jedoch die Mittelpunktsnormale treffen; der Proportionalitätsfactor für die Neigung soll so gewählt werden, dass die Magnetisirung M_i solenoidale Vertheilung bekomme.

Diese Annahmen ergeben sich aus der Ueberlegung, dass die Magnetisirung nahezu solenoidal vertheilt ist, und dass ihre Niveauflächen wenig gegen die Querschnittsebenen geneigt

bleiben und endlich, dass die Magnetisierungslinien Neigungsvariationen wie die Kraftlinien eines durch weit entfernte Massen bedingten Kraftfeldes zeigen.

Die Dichtigkeitsvertheilung der Endflächen kann somit folgendermaassen ausgedrückt werden:

Jede Seite eines durch zwei unendlich benachbarte Querschnitte begrenzten quadratförmigen Stückes der Ringoberfläche ist gleichförmig mit magnetischer Masse geladen; die Ladungsmenge pro Längeneinheit beträgt

$$-\frac{c}{2} \frac{dM_t}{d\omega} \cdot \delta\omega$$

auf den zur Ringaxe senkrechten Seiten, und

$$\left(\pm M_r R - \frac{c}{2} \frac{dM_t}{d\omega} \right) \delta\omega$$

auf der äusseren, bez. inneren Mantelseite; $\delta\omega$ wäre der Winkelabstand der Begrenzungsquerschnitte.

(Das Flächenintegral der Magnetisierung über diesen Ringausschnitt wird dadurch gleich Null, zur Erfüllung der Solenoidalitätsbedingung).

Die Berechnung der mit H' bezeichneten Rückwirkung wird nun durch Zurückführung auf die Berechnung der Fernwirkung H' des mit der gleichförmigen Ladung λ pro Längeneinheit belegten Umfanges des Querschnittes $\omega = 0$ möglich. Es ergeben sich dabei die den früheren analogen Formeln

$$\begin{aligned} H'_t &= \frac{2\lambda}{c} \sum \left(\frac{1}{p} h'_p \sin p\omega \right) \\ &= -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{-c}^{+c} (T dz + T' dz + T dy + T' dy), \\ &\quad \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y=c & y=-c & z=c & z=-c \end{matrix} \\ \bar{H}'_r &= \frac{2\lambda}{c} \sum \left(\frac{1}{p} h'_p \cos p\omega \right) \\ &= -\frac{\lambda}{R} \int_{-c}^{+c} (T'' dz + T''' dz + T'' dy + T''' dy); \\ &\quad \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y=c & y=-c & z=c & z=-c \end{matrix} \end{aligned}$$

es wäre leicht einzusehen, dass bei kleinem x die Zahlen h'_p mit wachsendem p wie p^2 zunehmen.

Der Uebergang von $\overline{H}_t'$ auf H_t' erfolgt dadurch, dass an Stelle von λ zunächst

$$-\frac{c}{2} \cdot \frac{d(M_p \cos p \omega_0)}{d \omega_0} d \omega_0$$

oder

$$\frac{c}{2} M_p p \sin p \omega_0 d \omega_0,$$

an Stelle von ω $\omega - \omega_0$ gesetzt und von $\omega_0 = 0$ bis $\omega_0 = 2\pi$ integrirt wird, sodann das Resultat über alle Werthe von p summirt wird. Es ergibt sich

$$(3) \quad H_t' = - \sum \pi M_p h_p' \cos p \omega$$

und analog

$$(3) \quad H_r' = \sum \pi M_p h_p' \sin p \omega.$$

Die Berechnung von H'' wird auf die Berechnung der Fernwirkung $\overline{H''}$ eines Systems zweier magnetischen geradlinigen Stücke zurückgeführt: nämlich die beiden Mantelseiten des Querschnittes $\omega = 0$, die äussere mit der gleichförmigen Ladung $+\nu$ pro Längeneinheit, die innere mit $-\nu$. Die Formeln dafür würden lauten

$$\overline{H}_t'' = -\frac{\nu}{R} \sum (h_p'' \sin p \omega) = \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{-c}^{+c} \begin{pmatrix} T' & - & T' \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} dz, \\ y = -c \quad y = c$$

$$\overline{H}_r'' = -\frac{\nu}{R} \sum (h_p'' \cos p \omega) = \nu \sum \begin{pmatrix} T' & - & T' \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} dz. \\ y = -c \quad y = c.$$

Ueber den Verlauf von $\overline{H}_r''$ und $\overline{H}_t''$ am Umfange des Mittelkreises lässt sich bemerken, dass bei kleinem x der Mittelkreis ungefähr in einer magnetischen Niveaufläche liegt; $\overline{H}_t''$ bleibt daher sehr klein gegenüber $\overline{H}_r''$; man kann auch leicht einsehen, dass die Coefficienten h_p'' der Cosinusglieder nur langsam abnehmen und ungefähr gleich dem doppelten constanten Gliede werden.

Der Uebergang von $\overline{H''}$ auf H'' würde ergeben

$$(4) \quad H_t'' = \sum \mathfrak{M}_p \pi h_p'' \cos p \omega,$$

$$(4) \quad H_r'' = - \sum \mathfrak{M}_p \pi h_p'' \sin p \omega.$$

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich nun die Möglichkeit der Berechnung der Coefficienten M_p , $\mathfrak{M}_p$, sobald nebst den Daten J/R , α , x , x' , die Susceptibilität κ und explicite Ausdrücke der eingeführten Functionen von x gegeben sind.

Ersetzt man nämlich in den Beziehungen

$$M_t = \kappa (K_t + H_t' + H_t'')$$

$$M_r = \kappa (K_r + H_r' + H_r'')$$

M_t , M_r durch die Formeln (1), K_t , K_r durch (2), H_t' , H_r' durch (3), H_t'' , H_r'' durch (4), bemerkt man, dass diese Beziehungen für alle Werthe von ω gelten, dass infolge dessen die Coefficienten von $\cos p\omega$, bez. $\sin p\omega$ in beiden Gliedern gleich sein müssen, und drückt man diese Bedingung aus, so bekommt man nach M_p und $\mathfrak{M}_p$ lineare Gleichungen.

Eine solche Berechnung mit const. κ würde aber bei Streuungsproblemen nur für diejenige Region der Magnetisirungscurve zulässig sein, welche durch eine den Anfangspunkt der Coordinaten enthaltende Gerade ersetzbar ist; für jede andere Region würde sie, selbst bei geringer Streuung, also am Umfang des Ringes beinahe const. κ , für den variablen Theil von M_t unbrauchbar bleiben. Es sollte als Beziehung zwischen Magnetisirung und magnetisirender Kraft eine Annahme von der Form

$$M = \kappa' K^* + \delta$$

benutzt werden, wo die Constanten κ' und δ so gewählt werden können, dass die dargestellte Gerade irgend einer gewünschten Region entsprechen würde.

Die unmittelbare Durchführung der Rechnung mit der neuen Annahme würde besondere Umstände machen; bemerkt man aber, dass:

1. infolge der Kleinheit von M_r , M_t kaum von M und K_t^* kaum von K^* differiren;

2. die Untauglichkeit der Annahme κ const. durch die Betrachtung von M_t veranlasst wurde und sich nicht auf M_r beziehen kann;

So ersieht man auch die Möglichkeit, jede neue Schwierigkeit zu vermeiden. Man benutze nur die demnach brauchbaren Beziehungen

$$M_t = \delta + \kappa' (K_t + H_t' + H_t''),$$

$$M_r = \kappa (K_r + H_r' + H_r''),$$

wo zwischen κ , κ' , δ der Zusammenhang bestehe, dass

$$\kappa = \kappa' + \frac{m}{2\pi R} \delta.$$

Die Gleichungen nach den Coefficienten M_p , $\mathfrak{M}_p$ werden somit

$$(5) \quad M_0 = \delta + \kappa' \frac{2J}{R} = \frac{2J}{R} \kappa.$$

$$M_p \left(\frac{1}{\kappa'} + \pi h_p' \right) = \mathfrak{M}_p \pi h_p'' + \frac{J}{R} k_p \frac{\sin \frac{1}{2} p \alpha}{\frac{1}{2} p \alpha}$$

$$\mathfrak{M}_p \left(\frac{1}{\kappa'} + \pi h_p'' \right) = M_p \pi h_p' + \frac{J}{R} \mathfrak{k}_p \frac{\sin \frac{1}{2} p \alpha}{\frac{1}{2} p \alpha}$$

und aus ihrer Auflösung ergibt sich die Formel

$$(6) \quad M_p = \frac{J}{\pi R} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} p \alpha}{\frac{1}{2} p \alpha} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\pi \kappa} + h_p'' \right) k_p + h_p'' \mathfrak{k}_p}{\left(\frac{1}{\pi \kappa} + h_p'' \right) \left(\frac{1}{\pi \kappa'} + h_p' \right) - h_p'' h_p'}.$$

Bevor ich zur Herleitung der noch fehlenden expliciten Ausdrücke von k_p , $\mathfrak{k}_p$, h_p' , ... in Function von x übergehe, will ich aus dem bis jetzt Gewonnenen eine qualitative Discussion der Streuungsverhältnisse am theilweise bewickelten Ringe unternehmen; dabei soll x zwischen den Grenzen 0,05 und 0,20 bleiben.

Zu diesem Zwecke erlaube ich mir, die letzte Formel der Uebersichtlichkeit halber zu vereinfachen, indem ich h_p' durch $p^2 h_1'$, k_p durch 4 ersetze, $\mathfrak{k}_p$ überhaupt vernachlässige und M_i als Maass für den Kraftfluss betrachte; es ergibt sich nun die Formel

$$(6a) \quad 4J \frac{\sin \frac{1}{2} p \alpha}{\frac{1}{2} p \alpha} = R M_p \left(\frac{1}{\kappa'} + \pi p^2 h_1' \right).$$

Ausserdem, um einen Begriff über die Grössenordnung des Coefficienten h_1' zu geben, theile ich im voraus mit, dass für $x = 0,0732$ (dem ersten meiner Beobachtungsringe entsprechend) $h_1' = 0,0351$ und für $x = 0,194$ (dem zweiten Ring entsprechend) $h_1' = 0,155$ die Grösse κ' kann, je nach der Eisensorte und je nach der Region der Magnetisirungscurve Werthe von 20 bis 250 erreichend; maximal wird dieser Werth bei der Inflexionsregion derselben.

Ich will nun folgendes hervorheben:

1. Für $\alpha = 180^\circ$ findet man eine beinahe sinusförmige Vertheilung des variablen Theiles des Kraftflusses; die Rechnung giebt nämlich, wenn $1/\kappa'$ klein gegenüber $\pi h'_1$ bleibt,

$$\frac{1}{1^3} \cos \omega - \frac{1}{3^3} \cos 3 \omega + \frac{1}{5^3} \cos 5 \omega - \dots$$

Es ist interessant, dieses Gesetz mit dem Vertheilungsgesetz von K_i zu vergleichen, welches in der Form

$$\frac{1}{1} \cos \omega - \frac{1}{3} \cos 3 \omega + \frac{1}{5} \cos 5 \omega - \dots$$

darstellbar ist; dieselbe eine den constanten Werth $+\pi/4$ von $\omega = -\pi/2$ über 0 bis $+\pi/2$ und den constanten Werth $-\pi/4$ von $\omega = +\pi/2$ über π bis $3\pi/2$ einnehmende Function.

2. Der Einfluss von J und x auf das Vertheilungsgesetz des variablen Theiles des Kraftflusses ist äusserst gering. Dieser Umstand wird auch durch die Kleinheit von $1/\kappa'$ gegenüber $h'_1 \pi$ erklärt. Die Abweichungen von der Sinusform sind am geringsten in der maximalen Region von κ' .

3. Zwischen den Vertheilungsgesetzen des variablen Theiles bei verschiedenen α existirt eine einfache Beziehung

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha'} \cdot \frac{M_p : M_1}{M'_p : M'_1} = \frac{\sin \frac{1}{2} p \alpha}{\sin \frac{1}{2} p \alpha'}.$$

4. Die Abhängigkeit der Streuung

$$\frac{(M_r)_0 - (M_r)_\pi}{(M_r)_0}$$

von J ist am besten für den Fall $\alpha = 180^\circ$ zu verfolgen; es ergibt sich dann der angenäherte Werth

$$\frac{8}{\pi x} \left(\frac{1}{\kappa'} + \pi h'_1 \right)$$

Solange $1/\kappa'$ gegenüber $\pi h'_1$ klein bleibt, verläuft diese Grösse wie $1/x$; der minimale Werth kommt bei $x_{\max}$ vor; für grosse Kräfte nimmt x' rascher ab als x und die Streuung wird gleich Eins (den Messungen von Lehmann entsprechend).

5. Die Zunahme der Streuung bei abnehmendem α könnte auch interpretirt werden, aber in verwickelter Weise; würde man als grobes Maass der Streuung M_1/M_0 annehmen, so würde bei demselben J/R diese Grösse wie $\sin \frac{1}{2} \alpha / \frac{1}{2} \alpha$ variiren.

6. Der bedeutende Einfluss von x auf die Streuung ist leicht aus dem über die Werthe von h'_1 mitgetheilten abzuleiten.

7. Der Fehler, der beim Gebrauch der Annahme κ const. zur Berechnung der Streuung sich ergeben würde, wäre von derselben Grössenordnung wie das Verhältniss κ/κ' also unter Umständen 50 Proc.

8. Der durch die Beziehung

$$\mathfrak{G}_{\text{mittl.}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{G} d\omega$$

definierte mittlere Kraftfluss ist von dem Vertheilungsgesetz der inducirenden Windungen kaum abhängig. Diese Eigenschaft erklärt sich durch die Unabhängigkeit von M_0 und α .

III.

Behufs Gewinnung der gewünschten expliciten Formeln muss ein passender Ausdruck für die reciproke Distanz T aufgestellt werden; unmittelbar wäre

$$T = [R^2 + (R + y)^2 + z^2 - 2R(R + y)\cos\omega]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ich wähle die Form

$$\pi R T = \sum_0^{\infty} \left(q_p + Q_p \lg n \frac{y^2 + z^2}{(8R)^2} \right) \cos p\omega,$$

worin q_p und Q_p Reihen nach den positiven Potenzen der Grössen $\eta = y/R$ und $\zeta = z/R$ bedeuten; die Coefficienten dieser Reihen sind rationale Zahlen.

Schreibt man

$$\pi T = T_0 + 2 \sum_1^{\infty} T_p \cos p\omega,$$

so ergibt sich für T_p das elliptische Integral

$$\int_0^{\pi} T \cos p\omega \cdot d\omega;$$

reducirt man dasselbe auf die normalen Formen

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

so bekommt man die Entwicklungen von q_p und Q_p durch Anwendung der bekannten Formeln

$$F = \lg n \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 \left\{ \lg n \frac{4}{k'} - A' \right\} \\ + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k'^4 \left\{ \lg n \frac{4}{k'} - A'' \right\} + \dots, \\ E = 1 + \frac{1}{2} k'^2 \left\{ \lg n \frac{4}{k'} - \frac{1}{1 \cdot 2} \right\} \\ + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4} k'^4 \left\{ \lg n \frac{4}{k'} - A' - \frac{1}{3 \cdot 4} \right\} \\ + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{5}{6} k'^6 \left\{ \lg n \frac{4}{k'} - A'' - \frac{1}{5 \cdot 6} \right\} + \dots$$

wo

$$A^{(n)} = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{(2n-1)2n}$$

für den complementären Modulus $k' = \sqrt{1 - k^2}$ als Argument.

Von der ganzen Berechnung gebe ich nur die Reductionsformel

$$T_{p+1} = \frac{x^2 + y^2 + 2R(R+y)}{2R(R+y)} \cdot \frac{4p}{2p+1} T_p - \frac{2p-1}{2p+1} T_{p-1}$$

und die Entwicklungen von q_p , Q_p bis $p=4$: ich schreibe

$$q_p = p_{00} + p_{10} \eta + p_{20} \eta^2 + p_{02} \zeta^2 + p_{30} \eta^3 + p_{12} \eta \zeta^2 + p_{40} \eta^4 \\ + p_{22} \eta^2 \zeta^2 + p_{04} \zeta^4 \dots$$

und analog

$$Q_p = \sum P_{mn} \eta^m \zeta^n.$$

Tabelle B.

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
p_{00}	0	— 4	— 16 ₃	— 92 ₁₅	— 704 ₁₀₅
p_{10}	+ 1 ₂	+ 3	+ 11 ₃	— 61 ₁₅	+ 457 ₁₀₅
p_{20}	— 7 ₁₆	— 21 ₈	— 47 ₈	— 1451 ₁₂₀	— 6101 ₂₈₀
p_{02}	+ 1 ₁₆	— 1 ₈	— 23 ₈	— 211 ₂₄	— 731 ₄₀
p_{30}	+ 17 ₄₈	+ 31 ₁₂	+ 63 ₈	+ 73 ₄	+ 9033 ₂₈₀
p_{12}	— 1 ₈	+ 3 ₈	+ 21 ₄	+ 123 ₈	+ 627 ₂₀
p_{40}	— 1775 ₆₁₄₄	— 2665 ₁₀₂₄	— 89341 ₉₂₁₆	— 238225 ₉₂₁₆	— 3644635 ₆₄₅₁₂
p_{22}	+ 163 ₁₀₂₄	— 281 ₅₁₂	— 3757 ₅₁₂	— 13113 ₅₁₂	— 33437 ₅₁₂
p_{04}	— 21 ₂₆₄₈	+ 31 ₁₀₂₄	— 37 ₁₀₂₄	— 2433 ₁₀₂₄	— 11861 ₁₀₂₄

7*

	$p = 0$	$p = 0$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
P_{00}	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	-1	-1
P_{10}	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
P_{20}	$-\frac{5}{32}$	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{21}{16}$	$-\frac{41}{16}$	$-\frac{69}{16}$
P_{02}	$+\frac{1}{32}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{35}{16}$	$-\frac{63}{16}$
P_{30}	$+\frac{7}{64}$	$+\frac{19}{32}$	$+\frac{55}{32}$	$+\frac{115}{32}$	$+\frac{199}{32}$
P_{12}	$-\frac{3}{64}$	$+\frac{9}{32}$	$+\frac{45}{32}$	$+\frac{105}{32}$	$+\frac{189}{32}$
P_{40}	$-\frac{169}{2048}$	$-\frac{625}{1024}$	$-\frac{2185}{1024}$	$-\frac{5425}{1024}$	$-\frac{11305}{1024}$
P_{22}	$+\frac{51}{1024}$	$-\frac{165}{512}$	$-\frac{1005}{512}$	$-\frac{3045}{512}$	$-\frac{7245}{512}$
P_{04}	$-\frac{9}{2048}$	$+\frac{15}{1024}$	$-\frac{105}{1024}$	$-\frac{945}{1024}$	$-\frac{3465}{1024}$

Zu den gewünschten Formeln für k_p , $\mathfrak{k}_p$, $h'_p \dots$ führen nun Integrationen von T längs der Seiten oder über die Fläche des Querschnittes $\omega = 0$. Schwierigkeiten kommen nicht vor, sobald bemerkt wird, dass sich für

$$A_m = \int_{-c}^{+c} u^m \lg n \frac{u^2 + c^2}{(8R)^2} du$$

und

$$B_{mn} = \int_{-c}^{+c} \int_{-c}^{+c} z^n y^m \lg n \frac{y^2 + z^2}{(8R)^2} dy dz$$

die speciellen Werthe

$$A_0 = 2c \lg n \frac{x^2}{32} - (4 - \pi)c$$

$$A_2 = \frac{2}{3} c^3 \lg n \frac{x^2}{32} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{8}{9} \right) c^3$$

$$A_4 = \frac{2}{5} c^5 \lg n \frac{x^2}{32} - \left(\frac{52}{15} - \frac{\pi}{5} \right) c^5$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_{00} = 4c^2 \lg n \frac{x^2}{32} - (12 - 2\pi)c^2$$

$$B_{02} = \frac{4}{3} c^4 \lg n \frac{x^2}{32} - \left(\frac{20}{9} - \frac{\pi}{3} \right) c^4$$

$$B_{22} = \frac{4}{9} c^6 \lg n \frac{x^2}{32} - \left(\frac{2\pi}{9} - \frac{4}{9} \right) c^6$$

$$B_{04} = \frac{4}{5} c^6 \lg n \frac{x^2}{32} - \left(\frac{412}{225} - \frac{2\pi}{5} \right) c^6$$

$$\dots \dots \dots$$

ergeben.

Es ist selbstverständlich, dass vor Beginn der Integration die Form $T/R + y$ in eine Reihe derselben Form wie T zu entwickeln ist.

In Bezug auf die Formeln für $\mathfrak{f}_p$, $\mathfrak{h}'_p$, $\mathfrak{h}''_p$, wäre folgendes hinzuzufügen:

Der Uebergang von T auf T' erfolgt dadurch, dass aus einem Gliederpaar der Form

$$\frac{\eta^m \zeta^n}{\pi R^2} \left(p_{mn} + P_{mn} \lg n \frac{\eta^2 + \zeta^2}{64} \right)$$

ein Ausdruck der Form

$$-\frac{\eta^m \zeta^n}{\pi R^2} \left[\left(p_{mn} + P_{mn} \lg n \frac{\eta^2 + \zeta^2}{64} \right) \left(\frac{m}{\eta} + m + n + 1 \right) + 2 P_{mn} \left(1 + \frac{\eta}{\eta^2 + \zeta^2} \right) \right]$$

wird; ferner ergeben sich für

$$C_m = \int_{-c}^{+c} \frac{u^m du}{u^2 + c^2} \quad \text{und} \quad D_{mn} = \int_{-c}^{+c} \int_{-c}^{+c} \frac{y^m \zeta^n}{y^2 + \zeta^2} dy d\zeta$$

die speciellen Werthe

$$C_0 = \frac{\pi}{2c} \quad C_2 = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) c \quad C_4 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \right) c^3$$

$$D_{02} = 2c^2 \quad D_{04} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) c^4 \quad D_{22} = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) c^4$$

Noch eine Bemerkung ist in Bezug auf die Bildung von k_p zu machen. Das unmittelbare Resultat der Integration

$$\int_{-c}^{+c} \int_{-c}^{+c} \frac{T dy d\zeta}{R + y}$$

gibt das Potential $N = \sum n_p \cos p \omega$ des dermaassen mit nord-magnetischer Masse belegten Querschnittes $\omega = 0$, dass die Dichte wie $1/R + y$ variire und gleich 1 im Abstände 1 von der Ringaxe wäre; als Funktion von ω aufgefasst, zeigt sie eine Spitze an der Stelle $\omega = 0$, bleibt aber continuirlich; die erste Derivation nach ω kann somit Glied für Glied vorgenommen werden; sie ergiebt das Potential $S = - \sum p n_p \sin p \omega$

einer magnetischen Doppelfläche vom Momente 1 pro Flächeneinheit des Querschnittes $\omega = 0$, die Südfläche nach der Richtung ω positiv gewendet und das Potential mit dem Anfangswerthe 0 für $\omega = 0$; für $\omega = 2\pi$ wird es aber 4π , so dass eine Discontinuität eintritt und die zweite Derivation nicht mehr Glied für Glied erfolgen darf. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, hat man nur S in der Form

$$S = 2(\omega - \pi) + \sum \left(\frac{4}{p} - p n_p \right) \sin p \omega$$

zu schreiben, wo das Glied -2π mit der neuen Reihe die continuirliche Function $S - 2\omega$ darstellt. Die zweite nun Glied für Glied ausgeführte Ableitung ergibt die Beziehungen

$$k_0 = 2, \quad k_p = 4 - p^2 n_p.$$

Die gewünschten Ausdrücke gebe ich nun in tabellarischer Zusammenstellung (Tabelle C); dass dabei an Stelle von x bei k_p und $f_p x'$ eingesetzt werden soll, ist selbstverständlich.

In Tabelle D gebe ich noch die Werthe dieser Grössen k_p , f_p , k'_p , ... für die meinen Beobachtungsringen entsprechenden x und x' .

Tabelle C.

$$f(x) = \mathfrak{A} + \frac{1}{\pi} (A x^2 + B x^4 + C x^6 + \dots) \lg \frac{32}{x^2} + \frac{1}{\pi} (a x^2 + b x^4 + c x^6 + \dots)$$

$f(x)$	$\mathfrak{A}$	A	B	C	a	b	c
k_0	+2	0	0	0	0	0	0
k_1	+4	-4	-3	-3...	+10,28...	+10,4...	+9...
k_2	+4	-16	-20	-29	+62,47	+77,2	+111
k_3	+4	-36	-75	-146	+169,35	+307,4	+596
k_4	+4	-64	-208	-509	+337,64	+907,8	+2209
k'_1	0	+4	+2	+2	-14,28	-6,6	-6
k'_2	0	+16	+24	+32	-78,47	-84,2	-122
k'_3	0	+36	+114	+206	-205,35	-457,7	-848
k'_4	0	+64	+352	+856	-401,64	-1575,2	-3723
k''_1	0	+4	+3,5		-14,28	-12,4	
k''_2	0	+8	+17,5		-39,23	-70,2	
k''_3	0	+12	+56,25		-68,45	-258,9	
k''_4	0	+16	+131		-100,41	-667,5	

$f(x)$	$\mathfrak{M}$	A	B	C	a	b	c
f_1	0 + 2	+ 0,75				— 2,6 ...	
f_2	0 + 4	— 2,5			— 11,62 ...	+ 12,5	
f_3	0 + 6	— 13,75			— 22,22	+ 79,4	
f_4	0 + 8	— 37			— 34,20	+ 234,4	
b'_1	0 + 2	+ 0,5			— 9,14	— 1,5	
b'_2	0 + 4	+ 1			— 23,62	+ 7,6	
b'_3	0 + 6	+ 1,5			— 40,23	+ 40,3	
b'_4	0 + 8	+ 2			— 58,20	+ 108,5	
b''_1	+2 — 0,5	+ 0,4 ...			— 3,36	— 1,3	
b''_2	+2 — 6,5	— 4,3			+ 20,73	+ 17,8	
b''_3	+2 — 16,5	— 25,6			+ 72,97	+ 103,4	
b''_4	+2 — 30,5	— 83,4			+ 156,26	+ 357,2	
b'_0	+1 + 0,75	+ 0,3			— 1,25	— 1,0	

Tabelle D.

Erster Ring: $x = 0,0732$; $x' = 0,0792$.

	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
k_p	2	3,9522	3,8509	3,7204	3,5724
t_p	0	0,0279	0,0449	0,0575	0,0671
h'_p	0	0,0351	0,1046	0,1886	0,2778
b'_p	0	0,0141	0,0192	0,0209	0,0205
h''_p	0	0,0351	0,0525	0,0633	0,0703
b''_p	1,0090	1,9869	1,9388	1,8787	1,8109
Zweiter Ring; $x = 0,194$; $x' = 0,225$.					
k_p	2	3,742	3,297	2,818	2,340
t_p	0	0,159	0,226	0,258	0,278
h'_p	0	0,155	0,386	0,592	0,747
b'_p	0	0,053	0,047	0,034	0,004
h''_p	0	0,157	0,198	0,205	0,189
b''_p	1,046	1,920	1,718	1,509	1,314

Es wäre somit möglich, die charakteristische Grösse des als unvollkommener magnetischer Kreislauf betrachteten theilweise bewickelten Ringes, nämlich die „Streuung“

$$\frac{\mathfrak{G}_{\max} - \mathfrak{G}_{\min}}{\mathfrak{G}_{\max}},$$

zu berechnen; der Kraftfluss $\mathfrak{G}$ muss sich aber auf den Eisenquerschnitt beziehen.

Berücksichtigt man die nicht strenge Proportionalität von $\mathcal{G}$ und M , so wird der Werth der Streuung

$$\frac{2(M_1 + M_2 + \dots)}{M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + \dots} \left(1 + \frac{\delta}{M_{\max}} \cdot \frac{1}{1 + 4\pi\kappa'} \right),$$

wo $M_{\max}$ das spezifische Moment am Querschnitt $\omega = 0$ bezeichnet.

Zum Zwecke der Prüfung der Theorie habe ich durch besondere Nachversuche die Streuung an meinen Beobachtungsringen bestimmt, wenn das inducirte System aus einem unmittelbar über die Eisenfläche gewundenen Drahte besteht. Ich nahm bei jedem Ring je 20 Windungen an den Stellen $\mathcal{G}_{\max}$ und $\mathcal{G}_{\min}$.

Die Resultate sind nun in Tab. E neben den Resultaten der theoretischen Berechnung eingetragen. Man kann durch Vergleichung mit den Resultaten der zuerst ausgeführten Messungen ein Urtheil darüber gewinnen, welche Bedeutung die Ungleichheit des Eisenquerschnittes und des wegen der Verstellbarkeit grösseren Querschnittes der früheren Localspulen hat.

Tabelle E.

Erster Ring ($x = 0,0732$, $x' = 0,0792$).

α	$\frac{m}{2\pi R}$	κ'	δ	Streuung	
				berechnet	beobachtet
180°	11,65	29,5	+ 228	0,285	0,297
180	7,88	48,0	+ 52	0,283	0,286
180	4,91	81,1	- 160	0,323	0,326
180	3,055	76,5	- 147	0,505	0,484
180	1,760	28,6	- 20,9	0,653	0,630
90	10,14	32,3	+ 189	0,400	0,394
90	6,30	55,9	- 6	0,406	0,402
90	4,665	75,5	- 129	0,463	0,449
90	2,85	73,1	- 135	0,690	0,632
90	1,255	23,3	- 11,3	0,833	0,783
45	7,87	37,0	+ 138	0,428	0,448
45	5,14	67,8	- 88	0,478	0,479
45	3,52	81,1	- 160	0,607	0,588
45	1,633	32,2	- 26,0	0,838	0,797

Zweiter Ring ($x = 0,194$, $x' = 0,225$).

α	m $2\pi R$	x'	δ	Streuung	
				berechnet	beobachtet
180°	12,0	21,70	+ 489	0,0659	0,0678
180	6,72	54,8	+ 188	0,0531	0,0556
180	2,85	144,0	- 255	0,0819	0,0946
180	1,765	26,1	- 14,0	0,2131	0,2111
90	10,16	31,2	+ 384	0,0966	0,0956
90	6,19	67,0	+ 110	0,0822	0,0828
90	3,20	144,0	- 255	0,1084	0,1115
90	1,538	20,75	- 8,2	0,3498	0,334
45	7,31	46,9	+ 243	0,0992	0,103
45	4,71	106,6	- 98	0,0957	0,103
45	2,290	91,8	- 127	0,2072	0,236
45	0,955	19,75	- 6,9	0,450	0,500

IV.

Anwendung der Theorie auf den Fall des Gramme'schen Ringes.

Ich will noch zeigen, dass sich die mitgetheilte Theorie auch für die Interpretirung der Erscheinungen im Gramme'schen Ringe eignet und zwar durch Behandlung folgender Specialfälle:

1. die Magnetisirung eines Ringes durch ein homogenes zur Ebene des Mittelkreises parallel gerichtetes Kraftfeld;

2. die Magnetisirung eines total bewickelten Ringes, wenn in einer Hälfte des Umfanges die Stromrichtung gekehrt würde.

Erster Fall. Für die Behandlung des ersten Falles ist an Stelle der electromagnetischen Kraft K die Stärke A des homogenen Feldes einzuführen; um dieselbe Schreibweise für die gesuchte Magnetisirung und die davon abhängige Rückwirkung wie früher zu behalten, fixire man den Querschnitt $\omega = \pi/2$ da, wo die Richtung von A centrifugal wird; endlich werde noch bemerkt, dass die Berechnung, wie auch im zweiten Falle, mit der Annahme x const. zulässig bleibt.

Die Formeln werden nun

$$A_t = A \cos \omega, \quad A_r = A \sin \omega$$

$$M_t = M \cos \omega = A_t \left(\frac{1}{\pi x} + h_1'' \right) \frac{1}{\pi} - h_1'' h_1' \left(\frac{1}{\pi x} + h_1'' \right) \left(\frac{1}{\pi x} + h_1' \right),$$

$$M_r = \mathfrak{M} \sin \omega = A_r \frac{\left(\frac{1}{\pi \kappa} + h'_1 + \mathfrak{h}'_1 \right) \frac{1}{\pi}}{\left(\frac{1}{\pi \kappa} + \mathfrak{h}''_1 \right) \left(\frac{1}{\pi \kappa} + h'_2 \right) - h''_1 k'_1}$$

Wie die Componenten A_t , A_r , sind also die Componenten M_t , M_r sinusförmig vertheilt, aber mit dem Unterschiede, dass die Amplituden M und $\mathfrak{M}$ ungleich werden, und zwar wird bei kleinem x selbst bei schwachem κ das Verhältniss $\mathfrak{M}/M$ äusserst gering. In Tab. F gebe ich einige Zahlenwerthe von $\mathfrak{M}/M$.

An Hand dieser Zahlen kann nun behauptet werden, dass die Magnetisirung beinahe peripherisch gerichtet bleibt, bis in nächster Nähe der Querschnitte $\omega = \pi/2$ und $\omega = 3\pi/2$; damit wird die Anwendbarkeit der Theorie auf vorliegenden Fall gerechtfertigt (vgl. p. 92).

Bestimmteres über den Verlauf der Magnetisirungslinien ergibt sich noch durch die Betrachtung der sich hier vereinfachenden Ausdrücke

$$\delta_a = \left(\frac{x}{2} M + \mathfrak{M} \right) \frac{R \sin \omega}{R + c},$$

$$\delta_i = \left(\frac{x}{2} M - \mathfrak{M} \right) \frac{R \sin \omega}{R - c}$$

der Endflächendichte an der äusseren, bez. inneren Mantelfläche. Je nachdem $\mathfrak{M}/M$ grösser oder kleiner als $x/2$ ist, haben δ_a und δ_i für dasselbe ω entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen; verfolgt man die Magnetisirungslinien von der inneren Mantelfläche aus, so erreicht man die äussere Mantelfläche im ersten Falle, im zweiten Falle aber nicht. Der erste Fall kann nur bei kleinem x vorkommen, wenn κ einen gewissen von x abhängigen Werth überstiegen hat; für $x = 0,0732$ ist dieser Werth schon kleiner als 20; für $x = 0,194$ tritt der zweite Fall selbst bei $\kappa = \infty$ auf.

Betreffend der Betrachtung von M_t gebe ich, um ein Urtheil über die Bedeutung der selbstentmagnetisirenden Wirkung zu ermöglichen, einige Zahlenwerthe der Grösse $\bar{\kappa}$ an, welche an Stelle von κ in der Beziehung $M_t = \bar{\kappa} A_t$ auftreten würde (Tab. F). Aus diesen Zahlen ersieht man, dass diese Wirkung mit wachsendem x zunimmt; es dürfte somit von Interesse

sein, zu sehen, wie sich die Zunahme des Kraftflusses mit x verhält. Zu letzterem Zwecke gebe ich noch Zahlenwerthe des bei $A = 1$ und $R = 1$ erreichten Kraftflusses g (allgemein wäre $\mathfrak{G} = A R^2 g$) (Tab. F).

Tabelle F.

$x = 0,0732.$				$x = 0,194.$		
x	x	$\frac{\mathfrak{M}}{M}$	g	x	$\frac{\mathfrak{M}}{M}$	g
0	0	1	0,0214	0	1	0,1505
20	6,40	0,0320	1,73	2,06	0,106	3,91
50	7,86	0,0274	2,12	2,20	0,102	4,16
100	8,52	0,0258	2,29	2,24	0,101	4,24
150	8,79	0,0252	2,37	2,26	0,101	4,27
∞	8,79	0,0243	2,365	2,29	0,0996	4,33

Zweiter Fall. Im zweiten Fall bezeichne ich mit N die Anzahl der Windungen auf dem ganzen Umfange, mit $i/2$ die Stromstärke in einer derselben, mit $\omega = \pi/2$ und $\omega = 3\pi/2$ die Querschnitte, bei welchen die Aenderungen der Stromrichtung eintreten, und wähle als Richtung der positiven ω die Richtung der electromagnetischen Kraft am Querschnitte $\omega = 0$; am Querschnitte $\omega = \pi$ wird somit die electromagnetische Kraft gleich gross aber von der Richtung der negativen ω . Dieser Fall entspricht der Magnetisirung des Gramme'schen Ringes durch den Armaturstrom; i wäre die „Stärke des Armaturstromes“.

Für die Behandlung ist es nur nöthig, bei der Bildung des Ausdruckes der electromagnetischen Kraft K die Integration zum Uebergang von K auf K_i einerseits von $3\pi/2$ über 0 bis $+\pi/2$, anderseits von $3\pi/2$ über π bis $\pi/2$ zu erstrecken und beide Resultate zu addiren; dabei muss noch J durch $Ni/4$ ersetzt werden.

Als Ausdruck von K_i ergibt sich somit

$$K_i = \frac{Ni}{\pi R} \left(k_1 \cos \omega - \frac{1}{3} k_3 \cos 3\omega + \frac{1}{5} k_5 \cos 5\omega - \dots \right).$$

Vergleicht man denselben mit dem Ausdrucke von K_i im früher betrachteten Falle $\alpha = 180^\circ$, so kann man sofort einsehen, dass, für $0,05 < x < 0,2$, die Vertheilung von M_i angenähert durch

$$M_t = M_1 \left(\frac{1}{1^3} \cos \omega - \frac{1}{3^3} \cos 3 \omega + \frac{1}{5^3} \cos 5 \omega - \dots \right)$$

darstellbar wird, also wenig von der Sinusform abweicht. Vernachlässigt man die Wirkung der höheren Glieder von K_t und vergleicht man mit dem Ausdrucke von M im Falle des homogenen Feldes, so ergibt sich damit die Bestätigung folgender angenäherten Regel:

„In Bezug auf die magnetisirende Wirkung im Gramme'schen Ringe ist der Armaturstrom einem homogenen Felde von der Stärke $4Ni/\pi$ äquivalent.“

Zürich, den 17. Juni 1897.

(Eingegangen 25. Juni 1897.)

Sauter Fig. 1-2. Oberbeck Fig. 3-6.