SOPRA ALCUNE QUESTIONI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE.

Nota di C. BURALLI-FORTI, in Torino.

Adunanza del 23 gennaio 1898.

Nelle mie due Note « *Il metodo del Grassmann nella geometria proiettiva* (*) » ho cercato dimostrare come dagli elementi del *Calcolo Geometrico* di Grassmann e dagli elementi della teoria delle *corrispondenze lineari*, si possano dedurre, e in modo assai semplice, le ordinarie proprietà che si studiano nella geometria proiettiva. In un mio libro (**), di recente pubblicazione, ho pure cercato dimostrare come le ordinarie proprietà delle curve, degli involuipi e delle superficie rigate, si ottengano in modo semplice ed elegante dagli elementi del calcolo di Grassmann. In questa breve Nota mi propongo identico scopo per ciò che riguarda la teoria delle superficie, facendo vedere come alcune ben note proprietà delle superficie possano ottenersi per via semplice ed elementare, senza presupporre note questioni speciali di analisi infinitesimale e senza far uso,

(*) Questi *Rendiconti*, t. X (1896) e t. XI (1897).

(**) *Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, (Paris, Gauthier-Villars, 1897). Citerò questo libro con l'indicazione m. l.

o direttamente, o indirettamente, di sviluppi complicati (*). In sì piccola mole non posso aver certamente riunite tutte le eleganti proprietà di cui è ricca la geometria differenziale: ne ho scelte alcune, ma si può facilmente comprendere come con i medesimi mezzi — che sono di una estrema semplicità — si possano trattare le altre. Avrò raggiunto lo scopo che mi sono proposto, se il lettore potrà convincersi che molte delle questioni dell'attuale Geometria differenziale superiore, possono entrare a far parte delle ordinarie ed elementari applicazioni geometriche del Calcolo.

1. Sia $P(u, v)$ un punto funzione continua, insieme alle sue derivate, delle variabili u, v in un dato campo, nel quale supporremo sempre che sia

$$P'_u P'_v \neq 0:$$

il punto P descrive allora, col variare di u, v nel dato campo, una superficie in ogni cui punto P il piano tangente è parallelo al bivettore $P'_u P'_v$.

Se poniamo

$$K = \left| \frac{P'_u P'_v}{\text{mod}(P'_u P'_v)} \right|$$

allora K è un vettore unità parallelo alla normale alla superficie in P e il cui verso può esser preso come *verso positivo* sulla normale. Il vettore dP è normale a K , perchè dP giace sul piano tangente in P , e quindi

$$(1) \quad dP|K = 0$$

(*) Il lettore, per rendersi esatto conto della semplicità delle dimostrazioni, deve osservare che io mi valgo (insieme agl'elementi della teoria delle corrispondenze lineari) solo della *parte teorica* contenuta nel mio libro già citato, parte che, pur contenendo implicitamente *tutti* i sistemi di coordinate lineari, può essere comodamente svolta in 10 lezioni, e non richiede altre nozioni all'infuori della geometria elementare, dell'algoritmo algebrico, e degli elementi di Calcolo differenziale e integrale.

che differenziata da

$$(2) \quad d^2 P|K = -dP|dK.$$

Avendosi ancora in particolare che

$$(1)' \quad P'_u|K = 0 \quad \text{e} \quad P'_v|K = 0$$

si ha, derivando la prima rispetto a v e la seconda rispetto ad u ,

$$(3) \quad P'_u|K'_v = P'_v|K'_u.$$

2. Per ogni relazione $f(u, v) = 0$ tra u e v , P descrive una linea sulla superficie: questa linea è *linea di curvatura*, quando la rigata descritta da PK è sviluppabile, cioè quando (m. 1, pag. 99) $d(PK).d(PK) = 0$. Osservando che $d(PK) = (dP)K + P(dK)$ si ha che la retta PK descrive una sviluppabile quando $K(dP)(dK) = 0$, cioè quando i vettori K, dP, dK sono complanari: ma essendo K un vettore unità, dK è normale a K e giace quindi sul piano tangente in P , e per ciò la precedente condizione equivale al parallelismo dei vettori dP, dK , cioè a

$$(4) \quad (dP)(dK) = 0,$$

che è quindi l'equazione differenziale delle linee di curvatura.

Abbiamo già osservato che il vettore dK sta (qualunque sieno gli incrementi du, dv) sul piano tangente in P , e che quindi i vettori dP, dK sono complanari. Possiamo allora considerare, sul piano tangente in P , l'omografia

$$(5) \quad \sigma = \begin{pmatrix} K'_u & K'_v \\ P'_u & P'_v \end{pmatrix}.$$

Dall'essere

$$(6) \quad dP = P'_u du + P'_v dv \quad \text{e} \quad dK = K'_u du + K'_v dv$$

si deduce che

$$(7) \quad \sigma(dP) = dK.$$

Se i è l'operazione che nel piano tangente in P fa ruotare ogni vettore di un angolo retto (e il verso positivo della rotazione può esser determinato dipendentemente dal verso di K), allora $i\sigma$ è una omografia per il cui invariante (*) si ha:

$$\text{inv. } i\sigma = \frac{P'_s(iK'_s) - P'_v(iK'_v)}{P'_s P'_v},$$

che per la (3) dà

$$\text{inv. } i\sigma = 0.$$

L'omografia $i\sigma$ è dunque una *involuzione*; ma questa ammette o una sola o infinite coppie di raggi coniugati ortogonali, e quindi σ , o ammette due soli raggi uniti ortogonali, o tutti i suoi raggi sono uniti. Da questo e dalla (4) e (7) risulta che: *per ogni punto P della superficie o passano due sole linee di curvatura che ivi si tagliano ad angolo retto, o ve ne passano infinite (**).*

(*) Cfr. G. Peano: « *Trasformazioni lineari dei vettori di un piano* ». Atti Acc. Torino, 1895.

(**) Osservando: che

$$\begin{aligned} dP|dP &= (P'_s)^2 du^2 + 2(P'_s|P'_v) du dv + (P'_v)^2 dv^2 \\ - d^2 P|K &= dP|dK = (P'_s|K'_s) du^2 + 2(P'_s|K'_v) du dv + (P'_v|K'_v) dv^2: \end{aligned}$$

che il discriminante della forma differenziale quadratica $dP|dP$ è

$$(\text{mod } P'_s)^2 (\text{mod } P'_v)^2 - [\text{mod } P'_s, \text{mod } P'_v \cos(P'_s, P'_v)]^2 = [\text{mod } (P'_s P'_v)]^2:$$

che, se le linee corrispondenti a valori costanti di u o di v sono linee di curvatura ortogonali, sono nulli i coefficienti di $du dv$ nelle due forme $dP|dP, dP|dK$: allora il lettore può confrontare la dimostrazione geometrica da noi data del noto teorema sull'esistenza delle linee di curvatura, con l'ordinaria dimostrazione basata sul noto teorema di analisi: « se di due forme differenziali quadratiche una almeno è definita allora si può, o in un sol modo o in infiniti modi, cambiare le variabili in guisa che si annullino i coefficienti medii delle due forme ».

3. Se s è l'arco della curva descritta da $P(ds = \text{mod } dP)$, allora per le formule di Frenet (m. l. pag. 121) si ha che d^2P/ds^2 vale il prodotto della prima curvatura in P per un vettore unità N parallelo alla normale principale e di verso determinato (eccettuati certi punti singolari che noi non consideriamo). Essendo φ l'angolo dei vettori N , K , diamo alla prima curvatura $1/\rho$ (*curvatura assoluta*), un segno determinato ponendo

$$-\frac{d^2P}{ds^2} \Big| K = \frac{1}{\rho} \cos \varphi,$$

ovvero per la (2)

$$(8) \quad \frac{dP}{ds} \Big| \frac{dK}{ds} = \frac{1}{\rho} \cos \varphi.$$

Il valore assoluto della curvatura della *sezione normale* in P , corrispondente alla direzione dP , vale il rapporto tra il modulo della componente normale di d^2P [la qual componente è $(d^2P|K)K$, ovvero per la (2), $-(dP|dK)K$] e il modulo di dP : attribuiamo un segno a questa curvatura, *curvatura normale*, $1/r$, ponendo

$$(9) \quad \frac{1}{r} = \frac{dP|dK}{dP|dP} = \frac{dP|dK}{ds|ds}.$$

Questa combinata con la (8) dà

$$(10) \quad \rho = r \cos \varphi$$

che dimostra il *teorema di Meunier*.

Per la *curvatura tangenziale* (o *geodetica*) $1/g$ abbiamo

$$(10)' \quad \frac{1}{g} = \frac{\sin \varphi}{\rho} = \frac{\tan \varphi}{r}$$

dalla quale si deduce subito che: *il raggio di curvatura tangenziale*

di un parallelo di una superficie di rivoluzione è uguale alla parte di tangente al meridiano compresa fra il punto di contatto e l'asse.

La superficie che si considera sia la sviluppabile osculatrice di una curva gobba Q per la quale i vettori unità T, N, B sono quelli che compariscono nelle formule di Frenet. Sia Q_1 il punto che descrive una curva piana di egual arco e di egual curvatura (flessione) di Q . Posto

$$P = Q + bT \quad \text{e} \quad P_1 = Q_1 + bT_1,$$

il punto P_1 descrive la *trasformata* di P quando si distende la sviluppabile nel piano (m. l. pag. 113), e le curve P, P_1 hanno egual arco. Per le formule di Frenet si ha

$$\frac{d^2 P}{ds^2} = xT + yN + zB \quad \text{e} \quad \frac{d^2 P_1}{ds_1^2} = xT_1 + yN_1,$$

e non abbiamo bisogno di calcolare effettivamente i numeri x, y, z . Da queste formule si ha per le curvature in P e P_1 ,

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{1}{\rho_1} = \sqrt{x^2 + y^2};$$

ma poichè

$$\frac{d^2 P}{ds^2} B = xTB + yNB,$$

e il vettore B è parallelo a K , si ha, prendendo i moduli dei due membri,

$$\frac{\sin \varphi}{\rho} = \frac{1}{\rho_1},$$

la quale dimostra un noto *teorema di Catalan* (Comptes Rendus, 1843) che si suole anche enunciare dicendo: *la curvatura tangenziale in P vale la curvatura ordinaria della trasformata piana*. Se la sup. considerata è un cono descritto dalla retta QT , allora la precedente

dimostrazione sussiste essendo Q un punto fisso e sostituendo all'elemento di arco di Q il mod dT ; per un cilindro si supponga essere la curva Q una sezione retta della sup., QT la binormale, QN la tangente e QB la normale principale in Q (m. l. pag. 126) (*).

Altra forma notevole della curvatura tangenziale in P , per una superficie qualunque, è

$$\frac{1}{g} = \frac{dP}{ds} \frac{d^2P}{ds^2} K \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{g} = \frac{1}{\rho} TNK$$

(*) Ecco un'altra dimostrazione del teorema di Catalan. La sup. sia descritta dalla retta PI , ove I è un vettore unità funzione dell'arco s di P . Distesa la sup. su di un piano sieno P_1, I_1 gli elementi corrispondenti a P, I . Si ha

$$TI = T_1 I_1,$$

essendo i vettori T, N, B relativi alla curva P , e quindi, derivando,

$$\frac{1}{\rho} NI + T \frac{dI}{ds} = \frac{1}{\rho_1} N_1 I_1 + T_1 \frac{dI_1}{ds}.$$

Facciamo lo sviluppo sul piano tangente lungo PI , facendo coincidere P_1 e I_1 con P ed I : risulta che per il valore considerato di s, T_1 e dI_1/ds coincidono con T e dI/ds . Osservando che se U, V, W sono vettori si ha

$$UVW = (U|W)|V - (U|V)|W,$$

essendo i prodotti regressivi sviluppati sul piano all'infinito, allora, moltiplicando la formula precedente per $|T$, si ottiene, dopo aver soppressi i termini nulli e quelli comuni ai due membri,

$$\frac{1}{\rho} N|TI = \frac{1}{\rho_1} N_1|TI_1.$$

Se θ è l'angolo, non nullo, che T fa con I , la formula ora ottenuta dà

$$\frac{1}{\rho} \sin \varphi \sin \theta = \frac{1}{\rho_1} \sin \theta,$$

(perchè $|TI$ è parallelo a K) ovvero

$$\frac{\sin \varphi}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}.$$

dalla quale si deducono facilmente note proprietà delle linee a curvatura tangenziale costante (*circoli geodetici* secondo il Darboux).

Se le linee coordinate u, v sono linee di curvatura ortogonali, allora per le curvature normali $1/r_1, 1/r_2$ corrispondenti alle *direzioni principali* P'_u, P'_v si ha dalla (9)

$$(11) \quad \frac{1}{r_1} = \frac{P'_u | K'_u}{P'_u | P'_u}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{P'_v | K'_v}{P'_v | P'_v}$$

le quali, per essere i vettori K'_u, K'_v rispettivamente paralleli ai vettori P'_u, P'_v [formula (4)] dànno

$$(11)' \quad K'_u = \frac{1}{r_1} P'_u, \quad K'_v = \frac{1}{r_2} P'_v.$$

Se P è un *ombelico* ($r_1 = r_2$), allora, in virtù delle (11)', l'omografia σ si riduce al numero $1/r_1$, e, in conseguenza, per il punto P passano infinite linee di curvatura. Si ha pure facilmente che: *le superficie per le quali ogni linea è linea di curvatura sono solamente quelle per le quali ogni punto P è un ombelico*. Per ogni punto di tali superficie deve esistere un numero $1/r$, funzione di u, v , tale che

$$dK = \frac{1}{r} dP:$$

questa, differenziata e moltiplicata per dP (che non è nullo), dà

$$\left(d^2 K - \frac{1}{r} d^2 P \right) dP = 0:$$

non essendo, in generale, i vettori $dP, d^2 P, d^2 K$ complanari, la precedente relazione è soddisfatta solamente quando per ogni valore di u, v si ha che $d^2 K - \frac{1}{r} d^2 P = 0$; ora questa combinata con

la penultima formula differenziata, dà $\left(d \frac{1}{r} \right) dP = 0$, ovvero

$d\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, o $1/r = \text{cost.}$ Se $1/r = 0$, allora $dK = 0$ e K è un vettore costante, cioè la sup. descritta da P è un piano: se $1/r \neq 0$, allora l'equazione $dK = \frac{1}{r} dP$, integrata, dà $P = O + rK$, ove O è un punto fisso, e quindi P descrive una sfera. Segue da ciò che: *soltanto per i piani e per le sfere ogni linea è linea di curvatura* (*).

Dalle formule (9), (11)' si ha che

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} (P'_1)^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{1}{r_2} (P'_2)^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2;$$

detto ψ l'angolo che dP fa con P'_1 , allora, dallo sviluppo del prodotto interno $\frac{dP}{ds} | P'_1$ [cfr. formule (6)], si ha subito che i coefficienti di $1/r_1$, $1/r_2$ valgono, rispettivamente, $\cos^2 \psi$, $\sin^2 \psi$ e quindi la formula precedente dà

$$(12) \quad \frac{1}{r} = \frac{\cos^2 \psi}{r_1} + \frac{\sin^2 \psi}{r_2}$$

che è la *formula di Eulero*, dalla quale deduconsi le ordinarie proprietà della *Indicatrice di Dupin*.

Quando le curvature principali in P non sono nulle, allora l'involuzione delle direzioni dei diametri coniugati dell'*indicatrice di Dupin* coincide con l'involuzione $i\sigma$ come risulta subito dalle formule (11)'. Da ciò si deduce che: *in ogni punto P di una curva della sup., la tangente e la generatrice della sviluppabile circoscritta lungo essa curva sono diametri coniugati della indicatrice di Dupin.*

(*) Quando in ogni punto P , $r_1 = r_2$, allora i coefficienti delle forme differenziali quadratiche $dP|dP$, $dP|dK$, sono proporzionali, e viceversa. L'indeterminazione considerata nel teorema di analisi citato nella nota al n° 2, ha pure luogo solamente nel caso della proporzionalità dei coefficienti delle due forme.

Si osservi che l'essere $dP|dK$ identicamente nullo, caratterizza il fatto che il punto P descrive un piano, il che può anche esprimersi dicendo (n° 4): *soltanto nel piano ogni linea è asintotica.*

Infatti: il piano tangente in P è la posizione della forma

$$P|K;$$

la generatrice della sviluppabile in questo piano sta anche sul piano (m. l. pag. 85)

$$d(P|K) = dP|K + P|dK = P|dK,$$

e quindi la generatrice considerata passa per P ed è normale a dK , cioè ha la direzione coniugata di dP rispetto all'involuzione $i\sigma$ (*).

4. Se le linee coordinate u, v sono linee di curvatura ortogonali, allora dalle (5), (11)' si ha

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} P'_1, & \frac{1}{r_1} P'_2 \\ P'_1, & P'_2 \end{pmatrix} :$$

quindi per il *determinante* (rapporto delle aree corrispondenti) e per l'*invariante* di σ si ha

$$\det. \sigma = \frac{1}{r_1 r_2}, \quad \text{inv. } \sigma = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

le quali dicono che il determinante e l'invariante di σ sono, rispettivamente, la *curvatura di Gauss* (o *curvatura totale*) e la *curvatura media* della sup. nel punto P .

Se la sup. descritta da P è a curvatura nulla, allora, a causa della continuità supposta per P e per le sue derivate, o $1/r_1$ o $1/r_2$ è costantemente nullo, cioè la sup. è rigata (m. l., pag. 106): ma se P descrive una generatrice di una rigata gobba la retta PK non

(*) Risulta pure facilmente che i *sistemi coniugati* sono quelli per i quali $P'_1|K'_2 = P'_2|K'_1 = 0$, ovvero $\frac{d^2 P}{du dv} \Big| K = 0$.

descrive una sviluppabile, e quindi: *le sole superficie a curvatura nulla sono le rigate sviluppabili.*

Sia O un punto fisso; allora il punto $Q = O + K$ descrive la *rappresentazione sferica* della sup. P . Se $dP, d'P$ sono due direzioni uscenti da P , le direzioni corrispondenti nella rappresentazione sferica sono $dK, d'K$. Ora, affinchè da

$$dP|d'P = (P'_u)^2 du d'u + (P'_v)^2 dv d'v = 0$$

si abbia come conseguenza

$$dK|d'K = \frac{1}{r_1^2} (P'_u)^2 du d'u + \frac{1}{r_2^2} (P'_v)^2 dv d'v = 0,$$

è necessario e sufficiente che sia

$$\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 0;$$

per ciò: *tutte le direzioni ortogonali in P si conservano ortogonali nella rappresentazione sferica, solamente, per gli ombelichi della sup. e per tutti i punti delle superficie a curvatura media nulla (*)*.

Se il punto P descrive una asintotica, cioè una curva il cui piano osculatore in P coincide col piano tangente in P , allora il bivettore $dP.d^2P$, che è parallelo al piano osculatore in P , è parallelo al bivettore $|K|$: ma poichè dP è parallelo a $|K|$, si ha che l'equazione differenziale delle *asintotiche* è

$$d^2P|K = 0$$

ovvero per la (2)

$$dP|dK = 0,$$

(*) In questi due casi σ si riduce ad un numero, o σ è un'involuzione. Ciò dimostra il teorema di geometria proiettiva: se due fasci di raggi proiettivi e sovrapposti hanno due raggi uniti ortogonali, allora, dire che a due raggi ortogonali dell'un fascio corrispondono raggi ortogonali nell'altro fascio, equivale a dire che i due fasci formano una involuzione.

la quale confrontata con la (9) dice che: *le asintotiche sono le linee a curvatura normale nulla (*)*.

Il vettore K è parallelo alla binormale dell'asintotica in P , e quindi, per le formule di Frenet, $\left(\frac{dK}{ds}\right)^2$ è il *quadrato della torsione in P* . Ora si ha [cfr., quanto abbiamo detto per ottenere la (12)]

$$\left(\frac{dK}{ds}\right)^2 = (K'_u)^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + (K'_v)^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{\cos^2 \psi}{r_1^2} + \frac{\sin^2 \psi}{r_2^2},$$

la quale confrontata con la (12) ove si ponga $1/r = 0$ dà

$$\left(\frac{dK}{ds}\right)^2 = -\frac{1}{r_1 r_2},$$

che dimostra il *teorema di Enneper*. Se osserviamo che

$$dP|dK = (P'_u|K'_u)du^2 + (P'_v|K'_v)dv^2$$

(essendo u, v coordinate coniugate) e che per $dP|dK = 0$ si hanno per du/dv due valori di egual modulo e di segno contrario, risulta subito che: *se per P passano due asintotiche, le loro torsioni in P sono eguali e di segno contrario*.

5. Da una nota forma (**) della variazione dell' $\int ds$

$$\delta \int_Q^R ds = \left| \frac{dP}{ds} \right| \delta P - \int_Q^R \frac{d^2 P}{ds^2} |\delta P| ds$$

(*) Se per P passano due asintotiche queste hanno per tangenti i raggi doppi dell'involuzione $i\sigma$. Risulta che per ogni punto di una sup. a curvatura media nulla passano due asintotiche che ivi si tagliano ad angolo retto (cfr. nota precedente).

Si può anche dire che il punto P descrive una asintotica, solo quando la linea descritta da P è di stringimento per la rigata PK . Infatti il punto centrale sulla retta PK è, posto $U = |K(dK)$, (m. l., pag. 97),

$$PKU \cdot (P dK - K dP) = PKU(dK) \cdot P - PKU(dP) \cdot K;$$

e perchè sia $KU(dP) = 0$ è necessario e sufficiente che sia $dP|dK = 0$ poichè U è appunto un vettore, del piano tangente, normale a dK .

(**) Peano: *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, vol. II, pag. 321.

risulta subito che in ogni punto di una *geodetica*, la normale principale coincide con la normale alla superficie. Se P descrive una geodetica, e l'arco QR ha *lunghezza costante*, allora

$$\left| \frac{dP}{ds} \right| \delta P = 0,$$

e quindi, se Q descrive una traiettoria ortogonale delle geodetiche descritte da P col variare di Q , anche R descrive una traiettoria ortogonale delle stesse geodetiche, e si ha così una nota proprietà delle linee *geodeticamente parallele* e dei *cerchi geodetici*.

Se il punto P descrive una geodetica allora $\frac{d^2 P}{ds^2}$, che è parallelo alla normale principale, è parallelo a K e quindi

$$(13) \quad K \frac{d^2 P}{ds^2} = 0$$

è l'*equazione differenziale delle geodetiche*. Sotto altra forma si ha per la stessa equazione

$$(13)' \quad K \cdot dP \cdot d^2 P = 0$$

perchè il piano osculatore in P è parallelo al bivettore $dP \cdot d^2 P$.

Se P descrive una geodetica che sia pure linea di curvatura, cioè per la quale si abbia $dP \cdot dK = 0$, allora differenziando la (13)' si ha $K \cdot dP \cdot d^3 P = 0$, che combinata con la (13)' dice che i vettori dP , $d^2 P$, $d^3 P$ sono complanari, cioè che (m. l., pag. 67) P descrive una curva piana. Dunque: *ogni linea geodetica che è linea di curvatura è una curva piana*. Se P descrive una geodetica piana, allora i vettori K , dP , $d^2 P$, $d^3 P$ sono complanari, e quindi differenziando la (13)' si ha $dK \cdot dP \cdot d^2 P = 0$: questa è verificata quando $d^2 P = 0$, o quando il vettore dK sta sul piano osculatore della curva, cioè quando $dP \cdot dK = 0$. Dunque: *ogni linea geodetica piana o è una retta o è una linea di curvatura*.

Il punto P descriva una geodetica (non rettilinea) e sia B il

vettore unità parallelo alla binormale in σ : si ha, determinando anche il verso di B ,

$$B = \left| \frac{dP}{ds} \right| K,$$

da cui si deduce

$$\frac{dB}{ds} = \left| \frac{d^2P}{ds^2} \right| K + \left| \frac{dP}{ds} \right| \frac{dK}{ds} = \left| \frac{dP}{ds} \right| \frac{dK}{ds},$$

poichè d^2P/ds^2 è parallelo a K . Essendo il modulo di dB/ds il valore assoluto della torsione della geodetica in B , poniamo, attribuendo così un segno a questa torsione $1/\tau$,

$$(14) \quad \frac{1}{\tau} K = \left| \frac{dP}{ds} \right| \frac{dK}{ds}$$

la quale, in virtù della (4) dimostra che: *le linee di curvatura sono le linee che hanno in ogni loro punto la torsione geodetica nulla.*

Se u, v sono linee di curvatura ortogonali si ha dalla (14)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} K &= \left| (P'_* K'_* + P'_* K'_*) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \right| = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \left| P'_* P'_* \right| = \\ &= \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} (\text{mod } P'_*) (\text{mod } P'_*) K = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{sen } \psi \cos \psi K, \end{aligned}$$

da cui si deduce

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{sen } 2\psi;$$

e questa dimostra, insieme ad altre proprietà, che: *due geodetiche ortogonali hanno nel loro punto d'incontro torsioni eguali in valore assoluto e di segno contrario.*

Il punto

$$P_i = P - r_i K$$

descrive una falda dell'*evoluta* della sup. P (*). Se u, v sono linee di curvatura ortogonali, allora dalle (11)' si ha

$$\frac{dP_1}{du} = P'_u - r_1 K'_u - \frac{dr_1}{du} K = - \frac{dr_1}{du} K$$

$$\frac{dP_1}{dv} = P'_v - r_1 K'_v - \frac{dr_1}{dv} K = (r_2 - r_1) K'_v - \frac{dr_1}{dv} K$$

e quindi

$$\frac{dP_1}{du} \frac{dP_1}{dv} = (r_1 - r_2) \frac{dr_1}{du} K K'_v (**).$$

Risulta da questa che la normale in P_1 all'*evoluta* è parallela a P'_u ; ma la tangente in P_1 alla curva considerata è parallela a K e il piano osculatore è parallelo a KK'_u e in conseguenza: *gli spi-*

(*) Se u, v sono linee di curvatura ortogonali, allora

$$PK[P'_u K + P K'_u] = P P'_u K \cdot K - K P K'_u \cdot P =$$

$$PK K'_u \left\{ P - \frac{PK P'_u}{P K K'_u} K \right\} = PK K'_u \{ P - r_1 K \},$$

il che prova essere P_1 il punto che descrive lo spigolo di regresso della sviluppabile descritta da PK quando P descrive la linea di curvatura $v = \text{cost.}$ Si osservi che il piano osculatore in P_1 è

$$K(P K'_u + P'_u K) = - P K K'_u,$$

cioè il piano normale alla sup. P uscente da P e parallelo alla direzione P'_u .

(**) Se osserviamo che

$$\frac{d^2 P_1}{du dv} = - \frac{dr_1}{du} K'_v - \frac{d^2 r_1}{du dv} K$$

e quindi che

$$\frac{d^2 P_1}{du dv} | K'_u = 0$$

risulta subito che: nelle due falde dell'*evoluta* le linee corrispondenti alle linee di curvatura della sup. P , formano un sistema coniugato.

goli di regresso delle sviluppabili luogo delle normali ad una superficie lungo le sue linee di curvatura, sono geodetiche della superficie evoluta ()*.

Il punto P descriva una sup. di rivoluzione di cui l'asse è la posizione della forma (costante) di seconda specie a ad invariante nullo e di modulo uno. Se P descrive sulla sup. una linea per ogni punto della quale la normale principale giace nel piano meridiano corrispondente, allora

$$P \frac{d^2 P}{ds^2} a = 0,$$

da cui si deduce che

$$P \frac{dP}{ds} a = \text{cost.}$$

perchè la derivata rispetto ad s del primo membro di questa è appunto il primo membro della formola precedente. Decomposto il vettore $\frac{dP}{ds}$ nella somma di due vettori, uno parallelo alla tangente al parallelo che passa per P e l'altro parallelo alla tangente al meridiano che passa per P , si ha

$$P \left(\frac{dP}{ds} \right)_p a + P \left(\frac{dP}{ds} \right)_m a = \text{cost.};$$

ma poichè $P \left(\frac{dP}{ds} \right)_m a = 0$, si ha ancora

$$P \left(\frac{dP}{ds} \right)_p a = \text{cost.}$$

Ora il modulo di $P \left(\frac{dP}{ds} \right)_p$ vale il seno dell'angolo che dP fa

(*) Dalle formule precedenti si deducono assai facilmente altre note proprietà della superficie evoluta.

col meridiano uscente da P , e poichè la minima distanza delle due linee ortogonali $P \left(\frac{dP}{ds} \right)_p$, a , è il raggio del parallelo che passa per P , la formula precedente dimostra il *teorema di Clairaut* (*), e anzi dimostra ancora che l'essere costante la quantità indicata nel teorema di Clairaut è condizione che *caratterizza i paralleli e le geodetiche* della superficie di rivoluzione.

6. I metodi fin qui adoperati permettono di risolvere assai facilmente anche le questioni relative alle *congruenze di rette*. Ne daremo qualche esempio.

(*) Questa dimostrazione è una semplice traduzione in linguaggio geometrico di una dimostrazione che il prof. F. Castellano dà, da alcuni anni, del teorema di Clairaut nelle sue lezioni di Meccanica razionale.

Un'altra dimostrazione assai semplice dello stesso teorema è la seguente. Sia u l'arco di meridiano e v l'angolo che il semi-meridiano fa con un semi-meridiano fisso. La quantità considerata nel teorema di Clairaut è

$$\frac{dP}{ds} | P'_v$$

Osservando che P'_u è normale a $P''_{u,v}$, che P'_v è normale a $P''_{v,v}$, si ha che

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dP}{ds} | P'_v \right) = \frac{d^2 P}{ds^2} | P'_v + (P'_u | P''_{v,v} + P'_v | P''_{u,v}) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds};$$

se O è il centro del parallelo e r ne è il raggio, allora $P''_{v,v}$ è il prodotto di r per il vettore unità parallelo a $P - O$ e quindi $P'_u | P''_{v,v} = -r \sin(K, O - P)$, ed essendo $P''_{u,v}$ il prodotto di $dr/du = \sin(K, O - P)$ per il vettore unità parallelo a P'_v si ha che $P'_v | P''_{u,v} = r \sin(K, O - P)$; si ha dunque

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dP}{ds} | P'_v \right) = \frac{d^2 P}{ds^2} | P'_v$$

che dimostra il teorema di Clairaut.

Si osservi che si può porre

$$P = Q + r(1 + e^{iv})I,$$

ove Q descrive la semi meridiana, r è la distanza di Q dall'asse, I è un vettore unità del piano della curva Q normale all'asse, e l'operazione i è fatta sui piani dei paralleli.

Sia Q un punto e I un vettore unità funzioni continue... di u e v . La congruenza è descritta dalla retta QI . Se O è un punto fisso, $O + I$ descrive la *rappresentazione sferica della congruenza*, e l'elemento di arco descritto da $O + I$ è

$$ds = \text{mod } dI.$$

Per una direzione dI , cioè per un valore di du/dv , si ha una superficie rigata descritta da QI : il piano centrale per la generatrice QI è

$$QI(dI) = Q|dI$$

e il punto centrale R in QI è la posizione della forma

$$[Q(dI) + (dQ)I][Q|dI] = -[(dI)Q|dI]Q + [(dQ)Q|dI]I = \\ = \frac{1}{6} [(dI|dI)Q - (dQ|dI)I],$$

e quindi

$$R = Q - \frac{dQ|dI}{dI|dI}I = Q - \left(\frac{dQ}{ds} \middle| \frac{dI}{ds} \right) I;$$

e se indichiamo con r la distanza di R da Q si ha

$$(15) \quad r = - \frac{dQ|dI}{dI|dI} = - \frac{dQ}{ds} \middle| \frac{dI}{ds}.$$

Sieno state scelte le variabili u, v in guisa che i coefficienti medi delle due forme $dI|dI, dQ|dI$ sieno nulli, in guisa cioè che si abbia

$$(16) \quad I'_* I'_* = 0, \quad Q'_* I'_* + Q'_* I'_* = 0,$$

le quali relazioni sussistono per qualunque punto $Q + xI$ della retta

QI , come è facile verificare. [Si ha, ad es.,

$$(Q + xD)'I_s = (Q_s + xI_s + x'_s D)I_s = Q_s I_s.$$

Supposte verificate le (16), poniamo

$$(17) \quad r_1 = -\frac{Q'_s I_s}{I'_s I_s}, \quad r_2 = -\frac{Q'_s I_s}{I'_s I_s}$$

e $Q + r_1 I$, $Q + r_2 I$ sono i punti centrali in QI delle due rigate corrispondenti a $v = \text{cost.}$ ed $u = \text{cost.}$

Dalla (15), (16) e (17) si ha

$$r = -Q'_s I_s \left(\frac{du}{ds}\right)^2 - Q'_s I'_s \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = r_1 (I'_s)^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + r_2 (I'_s)^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2;$$

e detto φ l'angolo che dI fa con I_s si ha (n° 3)

$$(18) \quad r = r_1 \cos^2 \varphi + r_2 \sin^2 \varphi,$$

che è la *formula di Hamilton*, dalla quale deducesi che r_1 , r_2 sono i massimi e minimi valori di r . Ma dI/dI è una forma definita e quindi dalla (15) risulta che r acquista effettivamente un valor massimo e un valor minimo: in conseguenza si possono sempre scegliere le u , v (in un sol modo, o infiniti modi secondochè $r_1 \neq r_2$ o $r_1 = r_2$) in guisa che sieno verificate le (16) e r_1 , r_2 sono indipendenti dal sistema di coordinate u , v . Le sup. rigate descritte da QI e corrispondenti ad $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$, che diconsi *principali*, hanno i piani centrali per QI ortogonali e il piano centrale dell'una è asintotico per l'altra.

Se nella (18) poniamo al posto di φ , $\frac{\pi}{2} - \varphi$ o $\varphi + \frac{\pi}{2}$ i valori di r sono eguali e detto r' uno di questi si ha

$$r' = r_1 \sin^2 \varphi + r_2 \cos^2 \varphi$$

che combinata con la (18) dà

$$r + r' = r_1 + r_2,$$

la quale prova che i punti centrali corrispondenti a due direzioni ortogonali, o a due direzioni aventi con i piani centrali principali i bisettori a comune, sono equidistanti dal punto

$$P = Q + \frac{r_1 + r_2}{2} I,$$

che dicesi *centro* della retta QI nella congruenza.

Considerando la congruenza generata dalla retta PI , le formole (16) sussistono ancora ove al posto di Q si legga P : posto (supponendo $r_1 \geq r_2$)

$$2h = r_1 - r_2,$$

le (17) danno

$$\frac{P'_s | I'_s}{I'_s | I'_s} = - \frac{P'_s | I'_s}{I'_s | I'_s} = h,$$

e la formula di Hamilton diviene

$$r = h \cos 2\varphi;$$

dalla quale, come del resto anche dalla (18), deducesi che corrispondentemente alle direzioni dI che bisecano I'_s e I'_s si hanno due rigate che hanno P per punto centrale.

Per $h = 0$ si hanno le *congruenze isotrope di Ribaucour*, per le quali ogni rigata è principale e per ognuna di esse il punto centrale sulla retta PI è il punto P .

Per un punto qualunque S della retta PI si ha

$$S = P + xI,$$

ove x è un numero funzione di u, v . Se x è tale che il vettore

$$dS = dP + x dI + (dx)I$$

è normale, qualunque sia du/dv , ad I , allora la congruenza è normale. Ora $dS|I = 0$ quando

$$dx = -dP|I,$$

perchè essendo I un vettore unità si ha che $I|dI = 0$. La precedente condizione assume la forma

$$(19) \quad dx = -(P'_u|I)du - (P'_v|I)dv,$$

la quale è soddisfatta quando

$$(20) \quad \frac{d}{dv}(P'_u|I) = \frac{d}{du}(P'_v|I),$$

cioè quando

$$P'_u|I'_v = P'_v|I'_u$$

che combinata con la seconda delle (16) dà

$$P'_u|I'_v = P'_v|I'_u = 0.$$

Queste, essendo ortogonali i vettori I'_u, I'_v e perpendicolari ad I , dice che i vettori I, P'_u, I'_u sono complanari e sono pure complanari i vettori I, P'_v, I'_v : ma poichè l'equazione differenziale delle rigate sviluppabili della congruenza è $d(PI).d(PI) = 0$, ovvero $I.dP.dI = 0$, si ha che: *una congruenza è normale solo quando le sue due sup. principali sono sviluppabili.*

Se indichiamo con α e β gli angoli che I fa, rispettivamente, con P'_u e P'_v si ha dalla (19)

$$dx = -(\text{mod } P'_u) \cos \alpha du - (\text{mod } P'_v) \cos \beta dv,$$

dalla quale si deduce subito il *teorema di Beltrami*, che esprime rimanere la sup. S ortogonale ai raggi della congruenza per qualunque flessione della sup. P . Dalla (20) espressa mediante α e β si deduce, con i metodi ordinari, il *teorema di Malus-Dupin* che esprime rimanere normale ogni congruenza normale dopo aver subito un numero qualunque di riflessioni o di rifrazioni.

Torino, gennajo 1898.

C. BURALI-FORTI.