Ueber die Thomas'schen bipolaren Kreissysteme und die Spiralsysteme auf angeschliffenen Crystall- linsen.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen
in Rostock.

Mit zwei Holzschnitten.

Die überaus feinen und regelmässigen Curvensysteme, welche zuerst von Thomas*) auf den Schliffflächen gehärteter Crystalllinsen beobachtet und in der Folge von Czermack**) synthetisch erklärt wurden, sind bisher, soviel mir bekannt, analytisch noch nicht discutirt worden. Die Erscheinungen, welche sich auf einer mit der Linsenaxe parallel liegenden Schlifffläche im Mikroskope dem Auge des Beobachters darbieten und wovon ich an einem von meinem verehrten Collegen Professor Aubert mir vorgelegten Präparate mich durch eigene Anschauung überzeugt habe, bestehen in vier verschiedenen zusammengesetzten geometrischen Gebilden, nämlich aus einem centralen und zwei seitwärts in der Aequatorialebene liegenden concentrischen Kreis-

*) Prager medicin. Vierteljahresschrift (1854) I. Bd., Ausserord. Beil. S. 1.

**) Zeitschr. f. wissensch. Zoologie Bd. VII. S. 185; v. Helmholtz, Physiol. Opt. § 5, 2. Aufl.

systemen, ausserdem einem Systeme von vollkommen parallel mit der Axe laufenden geradlinigen Strahlen. Ganz genau so sind diese Gebilde auch in einer Zeichnung von Czermack wiedergegeben. Um das Problem, die Entstehung dieser Liniensysteme mathematisch zu erklären, angreifbar zu machen, ist man genöthigt, von der Vorstellung einer idealen Linse auszugehen, welche der wirklichen möglichst nahe kommt. Betrachten wir die Verhältnisse des histologischen Baues einer kugelförmigen Crystalllinse, z. B. einer Fischlinse, wie sie auch von Thomas zu seinen Schlifften benutzt ist, so ist dieselbe, besonders nachdem sie gesotten ist, in lauter concentrische Kugelschalen zerlegbar; diese Kugelschalen bestehen aus Fasern, welche meridional von einem Punkte der Axe bis zu dem gegenüberliegenden verlaufen, wobei sie an der vorderen und hinteren Fläche vielfach in sternförmigen Figuren in einander übergehen, um den übrigen Platz zu machen. Die Querschnitte der Fassern sind sechseckig und wabenförmig aneinandergesetzt; die längere Seite dieser Sechsecke liegt äquatorial, während die vier kürzeren Seiten beiderseits Zuschärfungen und in ihrem weiteren Verlaufe von Schicht zu Schicht Nathflächen bilden, welche mit den Spaltflächen oder inneren Scheidewänden einer Apfelsine vergleichbar, sämmtlich durch die Linsenaxe gehen. Die Fasern bestehen auf diese Weise aus platten Lamellen, von denen die flachen Seiten die Hauptspaltungsfläche in Kugelschalen bilden.

Denkt man sich nun einen Aequatorialschnitt durch die Linse geführt, so kommen die vorbezeichneten vier Curvensysteme sämmtlich zum Ausdruck; die Nathlinien C D (s. nebenstehend Fig. 1) bilden das geradlinige Strahlensystem, welches hier durch den Axenpunkt geht, die Spaltlinien A B bilden das centrale, concentrische Kreissystem und die Verbindungslinien P P und P P₂ der Mittelpunkte aller möglichen Diagonalreihen von Faserschnitten bilden zwei in diesem Falle noch unipolare Spiralsysteme. Führt

man nun einen schiefen Ebenenschnitt gegen die Axe, so bilden die Nahtlinien CD immer noch ein gegen den Axenpunkt D convergirendes geradliniges Strahlensystem; wird aber der Ebenenschnitt parallel mit der Linsenaxe, also senkrecht zum Aequator, geführt, so liegt der Axenpunkt D im Unendlichen, und das geradlinige Strahlensystem geht in ein paralleles über. Alle drei Fälle lassen sich sehr schön

Fig. 1.

an den homologen Schnitten einer Apfelsine zur Anschauung bringen. Die drei übrigen Curvensysteme erleiden bei dem Uebergang von einem in beliebigem Abstände vom Linsencentrum geführtem Aequatorialschnitte in einen Meridionalschnitt, mannigfache Metamorphosen, die sich unter verschiedenen einfachen Voraussetzungen über die geometrische Gestalt und Lagerung der Querschnitte der Linsenfasern analytisch herleiten lassen. Von diesen Systemen bilden nur die Spaltlinien AB in jedem Falle ein centrales, concentrisches

Kreissystem, da concentrische Kugelschalen immer in concentrischen Kreisen von einer Ebene geschnitten werden. Die folgenden Untersuchungen haben es also wesentlich mit den beiden Spiralsystemen zu thun.

Da die Dimensionen der Faserschnitte gegen den Rad. vect. einer Linsenschicht verschwindend klein sind, so wird es gestattet sein, das Differenzial einzuführen. Wir vermögen dann die Differenzialgleichung der fraglichen Curven oder Trajectorien aufzustellen, wenn wir voraussetzen, dass innerhalb einer und derselben Faser- oder Linsenschicht die Fasern im Aequator überall dieselbe Breite und Dicke besitzen und auf einer mit der Linse concentrischen Kugelfläche parallel mit dem Meridian bis zur Linsenaxe verlaufen. Ist m das Verhältniss der Breite zur Dicke am Aequator einer beliebigen Schicht vom Radius ϱ , so wird m im Allgemeinen eine Function von ϱ sein. Da die Nathlinie CD gegen den Axenpunkt D convergirt, so ist

$$\delta b = \delta b_0 \frac{\varrho}{r},$$

wo δb_0 die Breite der Faser im Aequator, r den Radius der Linse bezeichnet. Nun zeigen Linsenschnitte, dass die Dicke der Faser nach dem Kerne zu viel rascher abnimmt, als die Breite. Drücken wir die Dicke durch $2 \delta \varrho$ aus, so kann man setzen

$$2 \delta \varrho = 2 \delta \varrho_0 \frac{\varrho}{r} : f(\varrho),$$

und wenn man das Verhältniss $\delta b_0 : 2 \delta \varrho_0 = m_0$ annimmt, so ergibt sich

$$\delta b = 2 m_0 f(\varrho) \delta \varrho,$$

wo $f(\varrho)$ eine durch Messungen noch näher zu bestimmende, jedenfalls aber mit abnehmendem ϱ wachsende Function ist.

Um die Ideen zu fixiren, denken wir uns jetzt irgend einen Ebenenschnitt im Abstände a vom Linsencentrum durch die Kugel geführt. Dieser Ebenenschnitt ist für alle Linsenschichten ein Kreis, in welchem die schiefen Durch-

centrum C einer kugelförmigen Krystalllinse, D sein Durchschnittspunkt mit der Linsenaxe $O O_1$, M B seine horizontale, M N seine verticale Halbaxe, C S die verticale Halbaxe r des auf der Ebene A D O senkrechten Meridians $O S O_1$ und D Q die senkrechte Durchschnittslinie der Schlifffläche mit dem Meridiane. Alsdann liegen die Halbaxen C S und M N in der Ebene des Linsenäquators, $O_2 P$ ist der Meridian des Punktes P, also P D die Durchschnittslinie der Schlifffläche mit diesem Meridiane, v und ϱ die Rad. vect. von P bezüglich der Centra M und C, $P N = M G = y$ und $M N = P G = x$ die rechtwinkligen Coordinaten. Da P der Mittelpunkt des Schnittes H I K L (Fig. 1) einer Faser ist, so wird die Diagonale H P K das Bogenelement δs der gesuchten Trajectorie sein. Zieht man G F $= a_1$ senkrecht zur Linsenaxe $O O_1$ und verbindet P mit F und G, dann ist $P F G = \varepsilon$ der Neigungswinkel des Meridians gegen die Basalebene und somit

$$(2) \quad \delta b = \varrho \delta \varepsilon = \varrho \delta \arctan \frac{x}{a_1}.$$

Demgemäss ist die Differenzialgleichung der Trajectorie

$$(3) \quad \pm 2 m_0 \frac{f(\varrho)}{\varrho} \delta \varrho = \delta \varepsilon = \delta \arctan \frac{x}{a_1}.$$

Aus der Betrachtung des Dreiecks F G D ergibt sich leicht die Relation

$$a_1 = y \sin z + a \cos z,$$

wo z den Axenwinkel $O D A$ bedeutet. Die Gleichung (3) geht dadurch über in die Form des Integrals

$$(4) \quad \int \frac{f(\varrho)}{\varrho} \delta \varrho = \pm \frac{1}{2 m_0} \arctan \frac{x}{y \sin z + a \cos z} + C.$$

Wenn nun $f(\varrho)$ eine algebraische Function ist, z. B.

$$(5) \quad f(\varrho) = \alpha + \beta \frac{r}{\varrho} + \gamma \frac{r^2}{\varrho^2} + \dots$$

so ist das Integral immer bestimmbar. Die Gleichung (4) stellt dann im Allgemeinen zwei Schaaren von Spiralen dar,

welche je eine Schaar von geschlossenen Curven umkreisen. So lange nämlich je nach der Wahl des Constanten C der Werth von a , nicht gleich Null, also die Tangente nicht $\pm \infty$ werden kann und folgeweise die Curve P in dem Bereiche A D Q bleibt, müssen die Curven geschlossene oder in sich zurücklaufende sein. Hieraus folgt:

- a) dass, wenn der Punkt D ausserhalb der Schlifffläche liegt, diese also von der Linsenaxe nicht durchbohrt wird, nur geschlossene Curvenschaaren auftreten;
- b) dass, wenn D in der Schlifffläche, aber in einem endlichen Abstände von M liegt, geschlossene Curven und Spiralen auftreten, und
- c) dass, wenn D mit M coincidirt, nur Spiralen auftreten.

Zu dem Falle a) gehören die Thomas'schen Curvensysteme, bei denen die Schlifffläche parallel mit dem Meridian, also senkrecht zum Aequator geführt ist; im Falle c ist die Schlifffläche senkrecht zur Linsenaxe oder parallel mit dem Aequator geführt.

Um nun zu einer klaren Einsicht in die Verhältnisse, die Art und Lage der Curvenschaaren, zu gelangen, wollen wir mehrere Specialfälle betrachten, und zunächst die Integrationsconstante C bestimmen. Aus Fig. 2 ersieht man, dass $q^2 = a^2 + x^2 + y^2$ ist. Bezeichnet dann x_0 einen Werth der Abscisse, bei welchem y verschwindet, so ist

$$(6) \int_{x_0}^x \frac{f(q)}{q} \delta q = \pm \frac{1}{m_0} \left\{ \arctan \frac{x}{y \sin z + a \cos z} - \arctan \frac{x_0}{a \cos z} \right\}.$$

Bezeichnet x_1 einen zweiten Werth von x derselben Curve, bei welchem y verschwindet, so erhält man

$$(7) \int_{x_0}^{x_1} \frac{f(q)}{q} \delta q = \pm \frac{1}{m_0} \left\{ \arctan \frac{x_1}{a \cos z} - \arctan \frac{x_0}{a \cos z} \right\}.$$

Aus dem Umstande, dass für die zweite Trajectorie, welche durch einen Punkt P geht, m_0 negativ ist, geht hervor, dass auf der oberen und unteren Hälfte der Schliifffläche zwei gesonderte, symmetrisch gelegene Curvenschaaren existiren, welche getrennte Pole haben, weshalb wir uns auf das obere Vorzeichen beschränken können. In dem einen Pole wird offenbar $x_1 = x_0 = R$, wo R den Abstand des Poles vom Kreiscentrum M bedeutet. Um seinen Ort zu bestimmen, differenziren wir (7) und substituiren $x_1 = x_0 = R$. Setzen wir der Kürze wegen

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{f(\varrho)}{\varrho} d\varrho = F(x_1) - F(x_0),$$

so wird

$$F^1(R) \delta x_1 - F^1(R) \delta x_0 = \frac{1}{m_0} \left\{ \frac{a \cos z \delta x_1}{a^2 \cos^2 z + R^2} - \frac{a \cos z \delta x_0}{a^2 \cos^2 z + R^2} \right\},$$

und da im Allgemeinen δx_0 von δx_1 verschieden ist,

$$F^1(R) - \frac{1}{m_0} \frac{a \cos z}{a^2 \cos^2 z + R^2} = 0,$$

$$\text{oder} \quad (8) \quad m_0 = \frac{a \cos z}{(a^2 \cos^2 z + R^2) F^1(R)}.$$

Wir sind so zu dem interessanten Ergebnisse gelangt, dass man m_0 d. h. das Verhältniss der Breite der Linsenfasern zu ihrer Dicke im Aequator berechnen kann, wenn z , a und R gemessen, und umgekehrt R berechnen kann, wenn m , z und a gegeben sind. Wenn man weiter von der allgemeinen Gleichung (5) ausgeht und der Gleichung (8) entsprechend den Ausdruck

$$m_0 = \Phi(a, z, R, \alpha, \beta, \gamma \dots)$$

bestimmt, so ist es offenbar möglich, an mehreren Schnitten die unbestimmten Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ zu finden, kurz den histologischen Bau der Linse, besonders in der Umgebung des Kerncentrums genau mathematisch zu definiren.

Nachdem wir im Vorhergehenden die allgemeine Lösung des Problems gegeben haben, ist es nicht schwierig, von speciellen Fällen, namentlich den Thomas'schen Curvensystemen, eine mathematische Darstellung zu geben. Da es leicht ist, in Berücksichtigung der natürlichen Verhältnisse die allgemeine Funktion $f(\varrho)$ einzuführen, so beschränken wir uns im Wesentlichen auf die Voraussetzung

$$f(\varrho) = 1, \text{ d. h. } \alpha = 1, \beta = \gamma = \dots = 0.$$

Die Gleichungen (6) und (7) gehen dann über in

$$(9) \log \text{nat} \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a^2 + x_0^2} = \frac{1}{m_0} \left(\arctan \frac{x}{y \sin z + a \cos z} - \arctan \frac{x_0}{a \cos z} \right),$$

$$(10) \log \text{nat} \frac{a^2 + x_1^2}{a^2 + x_0^2} = \frac{1}{m_0} \left(\arctan \frac{x_1}{a \cos z} - \arctan \frac{x_0}{a \cos z} \right).$$

Indem wir uns weiter darauf beschränken, nur die Systeme der geschlossenen Curven in der Umgebung der Pole zu discutiren, betrachten wir folgende vier Fälle:

- I. $z = 0^\circ$ (die Thomas'schen Kreissysteme);
- II. z wenig von 0° verschieden;
- III. z wenig von 90° verschieden, und
- IV. $z = 90^\circ$.

I. Es sei $z = 0^\circ$, also die Schlifffläche parallel mit der Linsenaxe. Die Gleichungen sind in diesem Falle

$$(11) \log \text{nat} \frac{a^2 + x^2 + y^2}{a^2 + x_0^2} = \frac{1}{m_0} \left(\arctan \frac{x}{a} - \arctan \frac{x_0}{a} \right),$$

$$(12) \log \text{nat} \frac{a^2 + x_1^2}{a^2 + x_0^2} = \frac{1}{m_0} \left(\arctan \frac{x_1}{a} - \arctan \frac{x_0}{a} \right).$$

Die Differenzirung von (12) oder die Gleichung (8) ergibt die elegante Relation

$$(13) m_0 = \frac{a}{2R} = \frac{a}{d},$$

wo d die Poldistanz der beiden Curvenschaaren auf der oberen und unteren Hälfte der Schlißfläche bezeichnet. Setzt man für die unmittelbare Umgebung des einen Poles $x_1 = R + \mathcal{A}$, $x_0 = R - \mathcal{A}$, so verschwindet die Gleichung (12) identisch, wenn man bis zu Grössen der Kleinheit der III. Ordnung excl. entwickelt. Demnach gehen die Curven in der Umgebung der Pole durch Punkte, welche von jenen gleichen Abstand haben. Die Coordinaten der Curve, welche durch diese beiden Punkte geht, seien y und $\xi = x - R$; alsdann geht die Gleichung (11) über in

$$\begin{aligned} \log \text{nat} \left[1 + \frac{2R\xi + \xi^2 + y^2}{a^2 + R^2} \right] - \log \text{nat} \left[1 - \frac{2R\mathcal{A} - \mathcal{A}^2}{a^2 + R^2} \right] \\ = \frac{2R}{a} \left[\text{arc tan} \frac{R + \xi}{a} - \text{arc tan} \frac{R - \mathcal{A}}{a} \right]. \end{aligned}$$

Wenn man die Glieder bis zur Kleinheit der III. Ordnung excl. entwickelt, so resultirt

$$(14) \quad \xi^2 + y^2 = \mathcal{A}^2,$$

welches die Gleichung eines Kreises ist. Ist $a = 0$, so geht die Gleichung (11) über in

$$(15) \quad x^2 + y^2 = x_0^2,$$

d. h. in einem Meridionalschnitte gehen sämtliche Curven über in ein System von concentrischen Kreisen um das Kerncentrum C ; die Fasern werden ihrer Länge nach durchschnitten oder gespalten.

Wenn man allgemeiner annimmt, es sei

$$f(q) = \alpha + \beta \frac{r}{q},$$

oder was den natürlichen Verhältnissen besser entsprechen möchte,

$$f(q) = \frac{r}{q + b},$$

so ist die Differenzialgleichung ebenfalls integrabel und die Schaaren der Diagonalcurven behalten immer noch zwei Pole; jedoch wird ihre Distanz $2R = d$ eine andere und

die Curven in der Umgebung derselben werden elliptisch. Gehen wir aus von der ersteren Form der Function, so ist die Differenzialgleichung

$$2 m_0 \left(\alpha + \beta \frac{r}{\varrho} \right) \frac{\partial \varrho}{\partial} = \frac{a \partial x}{a^2 + x^2}$$

und die Bestimmungsgleichung (8) wird

$$(16) \quad m_0 = \frac{a}{2 R} : \left(\alpha + \beta \frac{r}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right).$$

Führt man diesen Werth in die Coordinatengleichung ein, ebenso die Coordinaten ξ und y , entwickelt darauf sämmtliche Glieder bis zu Grössen der Kleinheit III. Ordnung excl., so findet man

$$(17) \quad \frac{\xi^2}{A^2} + \frac{y^2}{A_1^2} = 1,$$

$$A_1^2 = A^2 \left\{ \alpha + \beta \frac{r a^3}{(a^2 + R^2)^2} \right\} : \left(\alpha + \beta \frac{r a}{a^2 + R^2} \right).$$

Ist $\alpha = 0$, so ist $A_1^2 = A^2 a^2 : (a^2 + R^2)$, und die kleinste Axe der Ellipsen liegt parallel zur Linsenaxe. Doch wird das Verhältniss $R : a$ immer verhältnissmässig klein sein, so dass die Ellipsen sich von Kreisen wenig unterscheiden. Wenn es aber möglich sein sollte, das Axenverhältniss $A : A_1$ zu messen, so sind Mittel an die Hand gegeben, die Function $f(\varrho)$ oder die unbekannten Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma \dots$ genauer zu bestimmen und zwar an ebensoviel Schliffflächen in verschiedenen Abständen a vom Linsencentrum.

II. Es sei der Winkel z wenig von Null verschieden und zunächst $f(\varrho) = 1$. Dann folgt aus (8) die Bestimmungsgleichung

$$(18) \quad m_0 = \frac{a \cos z (a^2 + R^2)}{2 R (a^2 \cos z^2 + R^2)}.$$

Wird nun $\xi = A$ für $y = 0$, so geht die Gleichung (9) über in

$$\begin{aligned} \log \operatorname{nat} \left[1 + \frac{2 R \xi + \xi^2 + y^2}{a^2 + R^2} \right] - \log \operatorname{nat} \left[1 - \frac{2 R \mathcal{A} - \mathcal{A}^2}{a^2 + R^2} \right] \\ = \frac{2 R (a^2 \cos z^2 + R^2)}{a \cos z (a^2 + R^2)} \left\{ \operatorname{arc} \tan \frac{R + \xi}{a \cos z \left(1 + \frac{y \sin z}{a \cos z} \right)} \right. \\ \left. - \operatorname{arc} \tan \frac{R - \mathcal{A}}{a \cos z} \right\}. \end{aligned}$$

Entwickelt man die Glieder in Reihen bis zu Grössen der Kleinheit III. Ordnung excl., so erhält man die folgende für den ganzen Bereich von $z = 0^\circ$ bis 90° gültige Gleichung der geschlossenen Curven in der Umgebung der Pole (R):

$$\begin{aligned} (19) \quad & (\xi^2 + y^2 - \mathcal{A}^2) + \frac{2 (\xi^2 - \mathcal{A}^2) a^2 R^2 \sin z^2}{(a^2 + R^2) (a^2 \cos z^2 + R^2)} \\ & + \frac{2 R^3 \sin z (y^2 R \sin z - 2 y \xi a \cos z)}{a^2 \cos z^2 (a^2 \cos z^2 + R^2)} + \frac{2 R^2 y \sin z}{a \cos z} = 0. \end{aligned}$$

Da die Tangente nicht $\pm \infty$ werden darf, also der Grenzwert $\frac{y \sin z}{a \cos z} = -1$ ist, so sind die Curven für kleine ξ und y geschlossen und zwar concentrische Ellipsen, deren Mittelpunkt nicht mehr im Pole (R) liegt; er möge der wahre Pol heissen. Da in dem vorliegenden Falle z sehr klein ist, so kann man $\cos z = 1$ setzen. Es ist demnach

$$m_0 = \frac{a}{2 R}$$

und weil y von derselben Ordnung der Kleinheit bleibt, wie ξ , die Gleichung der Curve

$$\xi^2 + y^2 - \mathcal{A}^2 + 2 y \frac{R^2}{a} \sin z = 0.$$

Substituirt man $y + \frac{R^2}{a} \sin z = \eta$, so wird

$$(20) \quad \xi^2 + \eta^2 = \mathcal{A}^2 + \frac{R^4}{a^2} \sin z^2.$$

Dies sind concentrische Kreise und es ist der wahre Pol aus der Axe M N des Kreisschnittes um die Strecke $\frac{R^2}{a} \sin z$ nach der D-Axe hin verschoben.

Wir wollen jetzt noch voraussetzen, es sei $f(\varrho) = \frac{r}{\varrho}$; dann lautet die Bestimmungsgleichung (8)

$$(21) \quad m_0 = \frac{a \cos z (a^2 + R^2)^{3/2}}{2 R \cdot r (a^2 \cos z^2 + R^2)}.$$

Die Gleichung der geschlossenen Curven in der Umgebung des Poles (R) wird nun

$$(22) \quad (\xi^2 + y^2 - \mathcal{A}^2) + \frac{(\xi^2 - \mathcal{A}^2) R^2 [3 a^2 \sin z^2 - (a^2 + R^2)]}{(a^2 + R^2) (a^2 \cos z^2 + R^2)} \\ + \frac{2 R^3 \sin z (y^2 R \sin z - 2 y \xi a \cos z)}{a^2 \cos z^2 (a^2 \cos z^2 + R^2)} + \frac{2 R^2 y \sin z}{a \cos z} = 0.$$

Für sehr kleine Werthe von z wird nach (21)

$$m_0 = \frac{a (a^2 + R^2)^{1/2}}{2 R r}$$

und die Gleichung der Curve

$$(\xi^2 - \mathcal{A}^2) \frac{a^2}{a^2 + R^2} + y^2 + 2 y \frac{R^2}{a} \sin z = 0.$$

Durch die Koordinatenverschiebung $y + \frac{R^2}{a} \sin z = \eta$ erhält man

$$(23) \quad \frac{a^2}{a^2 + R^2} \xi^2 + \eta^2 = \mathcal{A}^2 \frac{a^2}{a^2 + R^2} + \frac{R^4}{a^2} \sin z^2,$$

d. h. concentrische Ellipsen, deren kleinste Axen parallel zur Linsenaxe liegen. Es folgt sowohl aus (20) als aus (23), dass für verschwindend kleine ξ und η $\mathcal{A}$ imaginäre Werthe annimmt, dass also die M-Axe von diesen Curven nicht mehr durchschnitten wird. Die Discussion der Gleichungen (19) und (22) ergibt weiter, dass die Curven in der Umgebung des Poles Ellipsen sind mit einer zunehmenden Inclination der grösseren Axe nach D hin. Bei wachsenden Werthen von z nähert sich ihr gemeinsamer Mittelpunkt oder der wahre Pol immer mehr und mehr der D-Axe und der Axe M D. Da zugleich in dem Grenzwerte $\frac{y \sin z}{a \cos z} = -1$, y immer kleiner wird, so schrumpft auch

das Gebiet der geschlossenen Curven immer mehr zusammen, bis es für einen gewissen Werth von z gänzlich verschwindet, der von m_0 abhängig ist. Diesen Grenzfall wollen wir etwas genauer beleuchten.

III. Es sei z wenig von 90° verschieden. Alsdann folgt aus (18) für die nächste Annahme $f(\varrho) = 1$, indem R gegen a verschwindet,

$$(24) \quad m_0 = \frac{a^3 \cos z}{2 R (a^2 \cos z^2 + R^2)}$$

und aus (21) für die Annahme $f(\varrho) = \frac{r}{\varrho}$:

$$(25) \quad m_0 = \frac{a^4 \cos z}{2 R r (a^2 \cos z^2 + R^2)}.$$

Die Gleichungen (19) und (22) gehen aber ineinander über; dabei wird unter der vorläufigen Voraussetzung, dass dieselben bis zu $z = 90^\circ$ Gültigkeit haben, $\sin z = 1$ zu setzen sein. Man findet

$$(26) \quad (\xi + y^2 - \mathcal{A}^2) + \frac{2 (\xi^2 - \mathcal{A}^2) R^2}{a^2 \cos z^2 + R^2} + \frac{2 R^4 y^2}{a^2 \cos z^2 (a^2 \cos z^2 + R^2)} \\ - \frac{2 R^3 y \xi}{a \cos z (a^2 \cos z^2 + R^2)} + \frac{2 R^2 y}{a \cos z} = 0.$$

Substituiren wir nun

$$\xi = \xi_1 + u, \quad y = \eta_1 + w$$

und bringen die Gleichung (26) auf die Form

$$A \xi_1^2 - B \xi_1 \eta_1 + C \eta_1^2 = D,$$

so werden u und w die Verschiebungen des wahren Poles sein, welche wir berechnen wollen. Wir setzen die unbestimmten Coëfficienten von ξ_1 und η_1 gleich Null und erhalten die Bestimmungsgleichungen

$$2 R^3 w - (a^2 \cos z^2 + 3 R^2) a \cos z u = 0, \\ [2 R^4 + a^2 \cos z^2 (a^2 \cos z^2 + R^2)] w - 2 R^3 a \cos z u \\ + R^2 (a^2 \cos z^2 + R^2) a \cos z = 0.$$

Setzt man den Werth von w aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so wird

$$(27) \quad u = -\frac{2 R^5}{(2 R^2 + a^2 \cos z^2) (R^2 + a^2 \cos z^2)}$$

und somit

$$(28) \quad w = -\frac{(3 R^2 + a^2 \cos z^2) a \cos z}{(2 R^2 + a^2 \cos z^2) (R^2 + a^2 \cos z^2)}.$$

Nun ist der Grenzwert von w gleich $-a \cos z$, woraus folgt, dass der Quotient gleich 1 sein muss, mithin

$$(29) \quad R^4 - 2 R^2 a^2 \cos z^2 - a^4 \cos z^4 = 0.$$

Der positive Wurzelwerth dieser Gleichung ist

$$R^2 = (1 + \sqrt{2}) a^2 \cos z^2 = 2,41 a^2 \cos z^2,$$

und bei diesem Werthe von R^2 verschwindet der wahre Pol in der D-Axe. Der Winkel z , bei welchem dies geschieht, lässt sich berechnen aus (24) resp. (25); je nach den Annahmen für $f(\varrho)$ wird nämlich

$$\cos z^2 = \frac{1}{10,6 m_0} \quad \text{oder} \quad \cos z^2 = \frac{a}{10,6 m_0 r}.$$

Da $r > a$ ist, so tritt bei der Annahme $f(\varrho) = \frac{r}{\varrho}$ das Verschwinden der Curven später ein. Ist $f(\varrho) = 1$ und $m_0 = 5$, so ist der Grenzwinkel $z = 82^\circ 6'$ und $\sin z = 0,990$; ist dagegen $f(\varrho) = \frac{r}{\varrho}$, $a = 2 \text{ mm}$, $r = 5 \text{ mm}$, $m_0 = 5$, so ist $z = 85^\circ$ und $\sin z = 0,996$. Im ersteren Falle ist z von a ganz unabhängig und im übrigen sind die Oerter der beiden Pole $R = 0,27 \text{ mm}$, $u = 0,158 \text{ mm}$, $w = 0,174 \text{ mm}$. Wir wollen noch die Inclination der grossen Axe der Ellipsen für den Grenzfall bestimmen. Ihre Gleichung ist für $f(\varrho) = 1$:

$$(a^2 \cos z^2 + 3 R^2) a^2 \cos z^2 \xi_1^2 - 4 R^3 a \cos z \xi_1 \eta_1 + [2 R^4 + a^2 \cos z^2 (a^2 \cos z^2 + R^2)] = D$$

und wenn wir $R^2 = 2,41 a^2 \cos z^2$ substituieren,

$$8,23 \xi_1^2 - 14,96 \xi_1 \eta_1 + 15,02 \eta_1^2 = D.$$

Setzen wir behufs Drehung der Coordinaten um den Inclinationswinkel α

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \eta_2 \sin \alpha + \xi_2 \cos \alpha, \\ \eta_1 &= \eta_2 \cos \alpha - \xi_2 \sin \alpha,\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\tan 2\alpha = \frac{-2R^3 a \cos z}{R^2(R^2 - a^2 \cos^2 z)}, \quad \alpha = 57^\circ 13'.$$

Ist nun die Mittelpunkts Gleichung

$$\frac{\xi_2^2}{A_2^2} + \frac{\eta_2^2}{B_2^2} = 1,$$

so findet man das Axenverhältniss $A_2 : B_2 = 1 : 2,14$ und die Veränderungen des Poles $u = -0,909 a \cos z$, $w = -a \cos z$, wo $z = 82^\circ 6'$ zu setzen ist.

IV. Es sei $z = 90^\circ$. Wir gehen aus von der Gleichung (3). Bezeichnen wir den Polarwinkel PMG (Fig. 2)

oder $\arctan \frac{x}{y}$ mit $\mathcal{P}$, so ist

$$2m_0 \frac{f(\varrho)}{\varrho} d\varrho = d\varepsilon = d\mathcal{P},$$

und wenn wir zunächst $f(\varrho) = 1$ annehmen

$$2 \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{m_0} d\mathcal{P}.$$

Das Integral ist

$$\varrho^2 = \varrho_0^2 e^{\frac{1}{m_0} \mathcal{P}},$$

und die Polargleichung der Trajectorien auf der Schließfläche

$$(30) \quad v^2 + a^2 = (v_0^2 + a^2) e^{\frac{1}{m_0} \mathcal{P}},$$

welches die Gleichung einer Spirale ist. Ist $a = 0$, also die Aequatorialebene die Schließfläche, so wird

$$(31) \quad v = v_0 e^{\frac{1}{2m_0} \mathcal{P}}.$$

Dies ist die Gleichung der logarithmischen Spirale von

Bernoulli. Sind v_0 und v_1 zwei Rad. vect. auf dem Durchmesser, welche um 180° von einander abstehen, so ist

$$v_1 = v_0 \cdot e^{\frac{\pi}{2m_0}},$$

also

$$(32) \quad m_0 = \frac{\pi}{2 (\log \text{nat } v_1 - \log \text{nat } v_0)}.$$

Ist beispielsweise $r = 5$ mm, $m_0 = 5$, $v_0 = 2$ mm, so ist $v_1 = 2,74$ mm, d. h. die Spirale weicht im Gegenpunkte v_1 um 0,74 mm von dem Kreise ab, welcher zum Radius v_0 gehört.

Nehmen wir an, es sei $f(\varrho) = \frac{r}{\varrho}$, welches den natürlichen Verhältnissen besser entspricht, so wird

$$(33) \quad r \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) = \frac{1}{2m_0} (\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}).$$

Ist $a = 0$, so geht sie über in

$$(34) \quad r \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{1}{2m_0} (\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}).$$

Dies ist die Gleichung der hyperbolischen Spirale. Sind v_0 und v_1 zwei Rad. vect. auf dem Durchmesser, welche um 180° von einander abstehen, so ist

$$r \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{1}{2m_0} (\mathcal{J}_0 - \pi),$$

folglich

$$(35) \quad m_0 = \frac{(\mathcal{J}_0 - \pi) v_0 v_1}{r (v_0 - v_1)}.$$

Unsere Untersuchungen haben nunmehr ergeben, dass es immer zwei Systeme von Diagonalcuren giebt, welche in jedem zur Aequatorialebene parallelen Schnitte unipolar sind. Denkt man sich einen solchen Schnitt im Abstände a vom Kerncentrum um die Aequatorialaxe gedreht, so werden die Spiralsysteme bipolar und gehen nach einer Drehung von

90° in die Thomas'schen Curvensysteme über, welche also nur einen Specialfall dieser interessanten Figuren bilden. Das Resultat können wir auch so formuliren, dass in jedem beliebigen Ebenenschnitte einer kugelförmigen Crystalllinse im Allgemeinen zwei Schaaren bipolarer Spiralen auftreten, welche je eine Schaar geschlossener Curven umgeben. Die Sätze, welche im Vorhergehenden abgeleitet sind, bleiben einstweilen, je nach der Art der Voraussetzungen, wesentlich specieller Natur. Wenn aber bei fortschreitender Erkenntniss des histologischen Baues der Crystalllinse es gelingen wird, die Function $f(\varrho)$ genauer festzustellen, wird es auch möglich sein, die Sätze und Formeln in erforderlicher Weise zu präcisiren.