5. *Druck und Temperatur im elektrischen Funken; von Eduard Haschek.*

(Aus den Sitzungsber. der kais. Akad. d. Wissensch. in Wien,
Math.-naturw. Klasse 109. (IIa.) Juli 1900.)

Wenn wir die einzelnen Fälle der elektrischen Entladungen betrachten, können wir zwei grosse Gruppen unterscheiden. Mit Hilfe des Spectroskops erkennen wir nämlich, dass in dem einen Falle in der Entladungsbahn nur oder fast nur das Gas leuchtet, das die Elektroden umgiebt, während im anderen Falle das Spectrum des Gases fast ganz zurücktritt und nur Elektrodenmaterial sich in der Funkenbahn befindet. Wenn auch diese Scheidung eine rein äusserliche ist und wir im speciellen Falle vielleicht zweifeln können, ob wir ein Phänomen der ersten oder zweiten Art vor uns haben, so giebt uns doch diese Einteilung einen Fingerzeig, auf welchem Wege sich eine Vorstellung von der Mechanik der Entladung finden lässt. Es ist selbstverständlich, dass wir kein vollständig genaues Bild der Erscheinung bekommen werden. Wir müssen uns vielmehr, wie so oft in der Physik, einen möglichst einfachen Fall construiren, um daran die Erscheinung zu studiren.

Der Versuch, der uns Einblick in die Mechanik der Entladung gestattet, rührt von Schuster¹⁾ her. Schuster hat auf einem rasch bewegten Film das Spectrum des elektrischen Funkens photographirt und gefunden, dass die Spectrallinien gegen die Richtung des Spectrums, also die Normale zum Spalt, geneigt sind. Diese Neigung ist in den verschiedenen Entfernungen von der Mitte verschieden und rührt davon her, dass die leuchtenden Teilchen zuerst nahe an den Elektroden auftreten und dann erst successive weiter gegen die Mitte der Entladungsbahn gelangen. Ein ganz ähnliches Bild geben auch die bekannten Aufnahmen von Feddersen. Wir sehen auch hier, dass das Leuchten früher in der Nähe der Elektroden auftritt, als in der Mitte der Funkenbahn. Die einfachste Erklärung, die wir uns für diese Erscheinung geben können,

1) A. Schuster, Nature 57. p. 17. 1897; 59. p. 350. 1899.

ist, dass die Teilchen, welche als Lichterreger fungiren, mit gewissen Geschwindigkeiten von den Elektroden abfliegen. Schuster hat auf seinen Aufnahmen diese Geschwindigkeiten für Zink bestimmt. Sie betragen in einer Entfernung von 1 mm von den Elektroden 2000 m/sec, in 4 mm Abstand nur 400 m/sec. Es erfahren also die Teilchen während der Bewegung eine starke Verzögerung. Die Folge davon ist eine Annäherung der Teilchen aneinander, ein Wachsen der Dichte und des Druckes. Der Verlust an kinetischer Energie, der ja nach dem Obigen ein sehr beträchtlicher ist, wird nun auf Erhöhung der Temperatur verwendet. Das Leuchten hat offenbar mit der Temperatur nichts wesentliches zu thun. Wir könnten ja sonst nicht schon an den Elektroden ein Leuchten bemerken, sondern erst in einiger Entfernung. Auch müsste der Funke irgendwo zwischen den Elektroden am hellsten sein und gegen dieselben hin an Leuchtkraft abnehmen. Alles dies widerspricht aber der Erfahrung.

Die Grundanschauung, von der wir ausgehen, ist also kurz folgende: Von der Elektrode fliegen Teilchen, Gas oder Elektrodenmaterial, mit gewissen Geschwindigkeiten ab. Am Wege erfahren sie eine Verzögerung, aufeinander folgende Teilchen rücken also, je weiter von der Elektrode, um so näher zusammen. Daraus folgt zunächst eine Steigerung des Druckes. Der Verlust an kinetischer Energie setzt sich in Wärme um, die hohe Temperatur des Funkens ist also eine secundäre Erscheinung.

Damit ist uns in groben Umrissen der Vorgang in der Bahn der Entladung gegeben. Wir haben jetzt die Verhältnisse an den Elektroden zu studiren. Es ist klar, dass ein gewisser Arbeitsaufwand dazu gehört, ein Teilchen von der Elektrode abzureissen. Dieser Arbeitsaufwand ist jedenfalls für Teilchen des Elektrodenmaterials grösser, als für Teilchen des adhärirenden Gases. Es sind ja im ersten Falle die Attractionskräfte, die das Teilchen an der Elektrode fixiren, weit grössere als im zweiten. Wir werden also zunächst nur Gastheilchen in die Bahn der Entladung bekommen, bei Aufwand eines grösseren Arbeitsquantums aber Elektrodentheilchen. Die abgerissenen Teilchen besorgen den Elektrizitätstransport. Der Ausgleich der Ladungen wird auf zweierlei Art erfolgen. Ein gewisser Bruchteil der Partikel wird schon in der Ent-

ladungsbahn zusammenstossen und die Ladung abgeben, ein anderer aber wird bis zur Gegenelektrode kommen. Dabei wird natürlich die ganze kinetische Energie vernichtet und die ganze erzeugte Wärme zur Erhöhung der Temperatur der Elektrode verwendet.

Wir haben bisher stillschweigend immer zwei einander gegenüberstehende Elektroden angenommen. Es ändert sich qualitativ offenbar nichts, wenn wir bloss eine annehmen. Es werden sich an den Stellen grösster elektrischer Dichte Teilchen ablösen, die anfangs in geschlossenem Schwarm abfliegen, später aber in die Umgebung diffundiren und ihre Ladung theils an Moleküle des umgebenden Gases, theils an die benachbarten Körper, Wände etc. abgeben.

Wir wollen uns nun der Berechnung der einzelnen Grössen zuwenden. Zu diesem Behufe müssen wir uns einen Idealfall construiren. Wir denken uns eine vollkommen ebene Fläche mit constanter Oberflächendichte geladen und nehmen an, dass alle Teile vollkommen gleich beschaffen sind. Um ein Teilchen von der Oberfläche dauernd zu entfernen, brauche man eine gewisse Arbeit, die wir C nennen. Die aufgewendete elektrische Energie messen wir in mechanischem Maasse. Wir betrachten einen bestimmten Teil der Oberfläche, etwa die Einheit, so entfällt auf diese in der Zeiteinheit an Aufwand elektrischer Energie der Betrag $\mathfrak{E}$. Die Zahl der abgelösten Teilchen sei pro Flächeneinheit und Zeiteinheit N , also NC die nötige Arbeitsmenge. Da alle Teilchen gleichberechtigt sind, werden alle oder keines abgerissen. Ist $\mathfrak{E} - NC < 0$, so tritt letzteres ein, ist dagegen $\mathfrak{E} - NC > 0$, so werden die Teilchen abfliegen, und ihre lebendige Kraft wird gleich der verfügbaren Energie, also

$$\mathfrak{E} - NC = N \frac{m}{2} u_0^2.$$

Stellen wir uns die Teilchen als Kugeln vom Radius ρ vor, so transportirt eines die Elektrizitätsmenge $V\rho$, wenn V das Potential der Elektrode bedeutet. Während der Zeit dt wird der Betrag dE transportirt. Nennen wir das Potential der Gegenelektrode V' , so ist

$$dE = N dt \cdot \rho \cdot (V - V') = N dt \cdot \rho \cdot \varphi, \quad N = \frac{dE}{dt} \cdot \frac{1}{\rho \varphi}.$$

Setzen wir diesen Wert für N ein und berücksichtigen, dass

$$\mathfrak{E} = k \frac{dE}{dt} \cdot (V - V') = k \frac{dE}{dt} \cdot \varphi,$$

so ist

$$k \frac{dE}{dt} \cdot \varphi - \frac{dE}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi \varrho} \cdot C = \frac{dE}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi \varrho} \cdot \frac{m}{2} u_0^2$$

oder

$$\frac{2k\varrho}{m} \varphi^2 - \frac{2C}{m} = u_0^2.$$

Für ein bestimmtes Material ist

$$\frac{2k\varrho}{m} = K_1 \quad \text{und} \quad \frac{2C}{m} = K_2$$

constant, also

$$u_0^2 = K_1 \varphi^2 - K_2.$$

Für die Gegenelektrode gilt dieselbe Betrachtung. Die Geschwindigkeit kann nur dann einen anderen Wert annehmen, wenn die Massen der abgerissenen Teilchen an beiden Elektroden verschieden sind. Im Verlaufe der weiteren Bewegung erfahren nun die Teilchen einen Widerstand. Ueber die Grösse desselben ist uns nichts bekannt. Jedenfalls wird er aber um so grösser sein, je rascher sich die Teilchen bewegen. Da sich nun von der Elektrode eine Wolke erhebt, die dieselbe Oberfläche hat, wie die Elektrode selbst, so können wir annehmen, dass ein ähnliches Gesetz gelten wird, wie für die Bewegung von Körpern in Luft, etwa von Projectilen. Wegen der hohen Geschwindigkeit nehmen wir als Widerstand $R = -Au^2$ an, worin A eine Constante bedeutet. Da alle Teilchen zusammen diesen Widerstand erfahren, können wir auch für ein einzelnes eine gleiche Annahme machen und als Bewegungsgleichung schreiben

$$m \frac{du}{dt} = -Au^2.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} = \frac{A}{m} t$$

oder

$$u = \frac{1}{\frac{A}{m} t + \frac{1}{u_0}}.$$

Denken wir uns, analog wie früher, die Verbindungslinie der Elektroden als x -Axe, so können wir $u = (dx/dt)$ setzen und haben als Gleichung für den Ort, an dem sich zu einer bestimmten Zeit das Teilchen befindet,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{A}{m}t + \frac{1}{u_0}}$$

oder

$$x = \frac{m}{A} \log \left(\frac{A}{m}t + \frac{1}{u_0} \right) - x_0.$$

Den Koordinatenursprung verlegen wir in den Anfangspunkt der Bewegung, also an die Elektrode. Es ist also

$$x_0 = \frac{m}{A} \log \frac{1}{u_0}$$

und

$$x = \frac{m}{A} \log \frac{\frac{A}{m}t + \frac{1}{u_0}}{\frac{1}{u_0}}.$$

Das können wir auch in der Form schreiben

$$x = \frac{m}{A} \log \left(\frac{u_0}{u} \right).$$

Nun können wir daran gehen, den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten der Teilchen und Druck und Temperatur in der Funkenbahn zu suchen. Würden sich die Teilchen mit der Geschwindigkeit u_0 ungestört bewegen können, so würden die vordersten nach der Zeit τ den Weg $u_0 \tau$ zurücklegen; es wären also alle Teilchen, die von einer Fläche q abflogen, in einem Cylinder vom Volumen $q \cdot u_0 \tau$ eingeschlossen, der darin herrschende Druck p_0 wäre offenbar gleich dem Aussendruck. Infolge der Verzögerung haben aber die Teilchen einen kleineren Weg x zurückgelegt, sind also alle im Cylinder mit dem Volumen $q \cdot x$ unter dem Drucke p zusammengedrängt. Dieser Druck p ist offenbar abhängig von x . Wir bekommen einen Mittelwert $\bar{p}$, wenn wir für einen Moment $x = \bar{u} \cdot \tau$ setzen, also allen Teilchen gleiche Geschwindigkeiten $\bar{u}$ zuschreiben. Um $\bar{u}$ zu berechnen, gehen wir so vor: Es ist

$$x = \frac{m}{A} \log \left(\frac{u_0}{\bar{u}} \right); \quad \tau = \frac{u_0 - \bar{u}}{u_0 \bar{u}} \cdot \frac{m}{A},$$

woraus für $\bar{u}$ der Wert folgt

$$\bar{u} = \frac{u_0 u}{u_0 - u} \cdot \log \left(\frac{u_0}{u} \right).$$

Wegen der äussert kurzen Dauer des Funkens haben wir einen adiabatischen Process vor uns. Es gelten also die bekannten Formeln

$$\frac{\bar{p}}{p_0} = \left(\frac{v_0}{\bar{v}} \right)^\kappa, \quad \frac{\bar{T}}{T_0} = \left(\frac{v_0}{\bar{v}} \right)^{\kappa-1},$$

worin $\bar{p}$, $\bar{T}$ Druck- und Temperaturmittel für die verzögerten Teilchen, p_0 , T_0 aber für die unverzögerten bedeuten. κ ist das Verhältniss der specifischen Wärmen. Diese Ausdrücke gelten offenbar nur bis zu dem Momente, in dem die beiden von den Elektroden abfliegenden Complexe von Teilchen aneinander prallen. Wir bekommen, wenn wir für v_0 und $\bar{v}$ die entsprechenden Ausdrücke einsetzen, auf diese Weise eine Reihe von Zahlen, die uns die Temperaturmittel in den einzelnen Momenten darstellen. Wir können aber auch die maximalen herrschenden Temperaturen angeben. Nach der Definition ist ja $\bar{T}$ nichts anderes als

$$\bar{T} = \frac{\int_0^x T dx}{\int_0^x dx},$$

wenn wir mit T die thatsächliche Temperatur bezeichnen und x die jeweils betrachtete Entfernung der Teilchen von der Elektrode ist. Nennen wir sie für einen Moment a , so ist die an der Stelle a thatsächlich vorhandene Temperatur

$$T_a = \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot \bar{T})_{x=a}.$$

Es ist nun nach dem früheren

$$v_0 = q u_0 \tau, \quad \bar{v} = q \bar{u} \tau,$$

also

$$\bar{T} = T_0 \left(\frac{u_0}{\bar{u}} \right)^{\kappa-1}.$$

Setzen wir für u den Wert ein, so haben wir

$$T = \bar{T}_0 \left(\frac{e^{\frac{A}{m} x} - 1}{\frac{A}{m} x} \right)^{\kappa-1},$$

und mit Hilfe einiger einfacher Transformationen nach obiger Formel

$$T_a = \bar{T} \left\{ 1 + (\kappa - 1) \left[\left(\frac{u_0}{u_0 - u} \log \frac{u_0}{u} \right) - 1 \right] \right\}.$$

Diese Formel giebt uns, wenn wir für a verschiedene Werte einsetzen, die Temperatur der jeweilig vordersten Teilchen bis zum Momente des Zusammenstosses. In diesem Augenblicke hat jedes der eben aneinander prallenden Teilchen die Energiemenge $m(u_0^2 - u^2)/2$ verloren und die Temperatur T_a erlangt. Es ist also

$$\mathfrak{A} n \frac{m}{2} (u_0^2 - u^2) = \gamma n \cdot m (T_a - T_0).$$

Beim Zusammenprall wird die gesamte noch vorhandene Energie in Wärme verwandelt, und es ist analog

$$\mathfrak{A} n \frac{m}{2} u^2 = \gamma n m (T_{\max} - T_a),$$

wenn wir mit $T_{\max}$ die maximale erreichbare Temperatur bezeichnen. Angenommen ist, was wohl annähernd gilt, dass γ innerhalb der in Frage kommenden Temperaturgrenzen nicht so variirt, dass sein Mittelwert zwischen T_a und T_0 , bez. $T_{\max}$ und T_a sehr verschieden ausfällt. Gilt diese Annahme, so ist

$$T_{\max} - T_a : T_a - T_0 = u^2 : u_0^2 - u^2$$

oder

$$T_{\max} = (T_a - T_0) \frac{u^2}{u_0^2 - u^2} + T_a.$$

Eine ganz analoge Rechnung lässt sich auch für den Druck anstellen. Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass wir einfach überall in den Formeln p_0 für T_0 und κ für $\kappa - 1$ zu setzen haben. Dann haben wir in analoger Bezeichnung wie für die Temperatur

$$p_a = \bar{p} \left\{ 1 + \kappa \left[\left(\frac{u_0}{u_0 - u} \log \frac{u_0}{u} \right) - 1 \right] \right\}.$$

Beim Zusammenprallen der Teilchen erhöht sich der Druck einfach infolge der Temperaturerhöhung im Verhältnisse

$$p_{\max} : p_a = [1 + \alpha (T_{\max} - T_a)] : 1,$$

sodass

$$p_{\max} = p_a \left[1 + \alpha (T_a - T_0) \frac{u^2}{u_0^2 - u^2} \right]$$

uns den maximalen im Funken erreichten Druck darstellt.

Wir wollen nun daran gehen, unsere Ergebnisse auf die Versuche von Schuster¹⁾ anzuwenden. Schuster maass für Funken zwischen Zinkpolen in 1 mm von den Elektroden die Geschwindigkeit der Teilchen zu 2000 m/sec, in 4 mm Entfernung zu 400 m/sec. Als Elektrizitätsquelle dienten fünf grosse Leydener Flaschen, die mit einer Vossmaschine geladen wurden. Aus den Angaben berechnet sich die Anfangsgeschwindigkeit von 3420 m/sec. Schuster scheint bei seinen Versuchen eine Funkenstrecke von 8 mm Länge verwendet zu haben, wir haben also in die einschlägigen Formeln $u_0 = 3420$ m/sec, $u = 400$ m/sec zu setzen. Um Druck und Temperatur zu berechnen, müssen wir noch eine Annahme bezüglich des α machen. Besteht der Dampf, was für Zink, mit dem Schuster arbeitete, ja wahrscheinlich ist, aus einzelnen Atomen, so ist $\alpha = 1,67$ zu setzen; wäre aber der Dampf nicht vollständig dissociirt, so können wir $\alpha = 1,41$ annehmen. Wir bekommen in diesen beiden Fällen folgende Tabelle:

	T_a	$T_{\max}$	p_a	$p_{\max}$
$\alpha = 1,67$	1311°	1325°	27,6	28,7
$\alpha = 1,41$	751°	758°	17,5	18,0

Die Temperaturen sind nach der absoluten Scala, die Drucke in Atmosphären gegeben.

Vergleicht man diese Angaben für den Druck mit den directen Beobachtungen von E. Haschek und H. Mache²⁾,

1) A. Schuster, Nature 57. p. 17. 1897.

2) E. Haschek u. H. Mache, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 107. Abt. IIa. 1898; Wied. Ann. 68. p. 740ff. 1899.

die 44 Atm. ergaben, so muss die Uebereinstimmung als eine gute bezeichnet werden. Es sind ja die Versuchsbedingungen wesentlich andere gewesen als bei Schuster. In den citirten Versuchen diente als Stromquelle ein Hochspannungstransformator, der mit 8,2 Amp. primär gespeist wurde. Im secundären Kreise war eine Capacität von 750 m eingeschaltet. Eine Variation des Druckes im Funken um 16 Atm. bei variirenden Versuchsbedingungen ist aber nichts überraschendes, wenn man bedenkt, dass für Messing unter den obigen Versuchsbedingungen ein Druck von 64 Atm. gemessen wurde, gegen 11,3 Atm. mit dem Ruhmkorff'schen Inductorium.

Wir können nach unserer Formel die Temperaturverteilung im elektrischen Funken berechnen, wenn wir für u die entsprechenden Werte einsetzen. Da die Anfangsgeschwindigkeit u_0 nur vom Material und der Potentialdifferenz, nicht aber von der Funkenlänge abhängt, können wir auch die maximalen Temperaturen für verschiedene Funkenstrecken berechnen. Wir haben dies unter der Annahme $\kappa = 1,67$ durchgeführt und folgende Zahlen erhalten:

Abstand von der Elektrode }	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
T_a	354	418	502	606	743	894	1039	1311
$T_{\max}$	437	485	555	649	775	919	1057	1325

Um den Verlauf der Temperatur noch genauer zu illustriren, wollen wir die gegebenen Werte in Form einer Curve zusammenstellen (vgl. Figur). Die Druckverteilung wird durch eine ganz analoge Curve dargestellt, da ja die Formel für p_a sich nur im Factor κ für $\kappa - 1$ von der für T_a unterscheidet.

In einer neueren Arbeit machen Schuster und Hemsalech¹⁾ noch Mitteilung von weiteren Versuchen. Aus den Zahlenangaben für die beiden Zinkelektroden in einem Versuche können wir wieder, wie oben, die Temperatur berechnen. Die verwendete Funkenstrecke betrug 1 cm, die Geschwindigkeiten der Teilchen wurden in 0,98 mm von der Elektrode zu 631 m/sec, in 2,24 mm zu 300 m/sec, bez. für die andere Elektrode in 0,77 mm zu 472 m/sec, in 2,13 mm zu 241 m/sec

1) A. Schuster u. G. Hemsalech, Phil. Trans. 193 A. p. 189 ff. 1899.

gemessen. Daraus berechnen sich beziehungsweise die Werte für u_0 1230,3 m/sec und 743,2 m/sec und für die Geschwindig-

keiten in 5 mm von der Elektrode, also der Mitte der Funkenbahn zu 43,2 m/sec und 62,8 m/sec. Aus diesen Angaben lässt sich natürlich, ebenso wie früher, der Verlauf von Druck

und Temperatur im Funken berechnen. Wir haben die Rechnung unter der Annahme $\kappa = 1,67$ für T_a in 5 mm von der Elektrode durchgeführt und finden in den beiden oben angeführten Fällen $T_a = 3136$, bez. 1989 Grade der absoluten Temperaturscala. Dass diese Werte ziemlich stark voneinander und dem früheren abweichen, ist bei der grossen Unsicherheit der Geschwindigkeitsmessungen nicht verwunderlich.

Schliesslich wollen wir noch einen Umstand erwähnen. Die Temperatur des Funkens ist nach der Formel in hohem Grade von der Temperatur der Elektrode abhängig, da ja T_0 die Anfangstemperatur der abgehenden Teilchen bedeutet, solange sie mit der Elektrode in Verbindung stehen. Steigt diese, so nimmt auch die Funkentemperatur zu, also bei einer Erhitzung der Elektroden auf Rotglut auf das drei- bis vierfache. Ausserdem ist noch zu bedenken, dass die Geschwindigkeit der Teilchen selbst in hohem Maasse von der Beschaffenheit der Elektroden abhängt und wächst, wenn die Kraft, welche die Teilchen zurückzuhalten sucht, abnimmt. Dies ist aber der Fall, wenn wir die Elektroden erwärmen. Es steigt die Funkentemperatur also noch rascher als die Elektrodentemperatur.

Ein ganz analoges Verhalten zeigt auch der Druck, falls die zwischen zwei Funken liegende Zeit zu kurz ist, als dass sich der Druck auf den normalen Atmosphärendruck ausgleichen könnte, wie dies wahrscheinlich bei Versuchen mit dem Transformator und Wechselstrom oder auch bei einem Inductorium mit Wehneltunterbrecher eintritt.

(Eingegangen 19. October 1900.)