Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobi'sche Form oder Hermite'sche Form identisch verschwindet. *)

Von

JOSEPH HAHN in Bensheim.

I. Einleitung.

1. Es seien in symbolischer Darstellung die drei quadratischen Formen

$$f_1 = a_x^2 = a_x'^2, \quad f_2 = b_x^2 = b_x'^2, \quad f_3 = c_x^2 = c_x'^2$$

gegeben, die als von einander verschieden angenommen werden.**) Die Jacobi'sche Form derselben ist die Determinante ihrer ersten Ableitungen

$$\begin{vmatrix} a_x a_1 & a_x a_2 & a_x a_3 \\ b_x b_1 & b_x b_2 & b_x b_3 \\ c_x c_1 & c_x c_2 & c_x c_3 \end{vmatrix} = (abc) a_x b_x c_x.$$

Diese cubische ternäre Form soll symbolisch bezeichnet werden durch $D_x^3 = D_x'^3$. Die Hermite'sche Form von f_1, f_2, f_3 lässt sich in den Symbolen der letzteren darstellen durch den Ausdruck $-(bcu)(cau)(abu)$, wofür die Symbole $u_{\mathcal{A}}^3 = u_{\mathcal{A}}^3$, eingeführt werden sollen. Ersetzt man die u_i durch die Determinanten $(xy)_i$, so dass $u_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$ u. s. w., so ist (Rosanes l. c. pag. 274):

$$u_{\mathcal{A}}^3 = -(bcu)(cau)(abu) = \begin{vmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_y^2 \\ b_x^2 & b_x b_y & b_y^2 \\ c_x^2 & c_x c_y & c_y^2 \end{vmatrix}.$$

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Beantwortung der Frage, von welcher Art Kegelschnittnetze sind, deren Jacobi'sche Form oder

*) Auszug aus der im Juni 1878 zu Giessen erschienenen Inaugural-Disser-
tation des Verfassers.

**) In Bezug auf Symbolik und Bezeichnungsweise herrscht völlige Ueberein-
stimmung mit der Arbeit des Herrn Rosanes (Ueber Systeme von Kegelschnitten.
Math. Annalen, Bd. VI, S. 264), auf dessen Resultate sich die folgenden Unter-
suchungen überdies vielfach stützen werden.

Hermite'sche Form identisch verschwindet. *) Ich wurde zu diesen Untersuchungen durch Herrn Prof. Pasch in Giessen veranlasst und während derselben durch seinen freundlichen Rath auch mehrfach unterstützt.

2. Wenn in der Folge die Glieder einer Summe dadurch aus einem entstehen, dass die Buchstaben a, b, c cyklisch vertauscht werden, so werden wir, um diese Summe anzudeuten, einem der drei Glieder das Zeichen Σ vorsetzen; im Fall, dass die Buchstaben a', b', c' vertauscht werden, kommt das Zeichen Σ' zur Anwendung. Es ist somit

$$\Sigma(bcu)a_x = (abc)u_x, \quad \Sigma(bcu)(adu) = 0.$$

Folgende Identitäten werden später zur Anwendung kommen:

$$(I) \quad 3D_x^2 D_y = (abc) \Sigma a_y b_x c_x,$$

$$(II) \quad 6D_x D_y D_z = (abc) \Sigma (a_x b_y c_z + a_x b_z c_y),$$

$$(III) \quad D_x^3 u_x = \Sigma a_x^2 (bcu) b_x c_x,$$

$$(IV) \quad 3D_x^2 D_y u_y - 3D_x D_y^2 u_x = \Sigma a_y^2 (bcu) b_x c_x - \Sigma a_x^2 (bcu) b_y c_y.$$

II. Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobi'sche Form identisch verschwindet.

3. Es wird nun zuerst gezeigt werden, dass zwischen den drei Formen f_1, f_2, f_3 eine quadratische Relation besteht, sobald die Jacobi'sche Form derselben identisch verschwindet. Wir gelangen zu dieser Relation, indem wir von der Form $(DD'u)^2 D_x D'_x$ ausgehen und ihren Werth, ausgedrückt durch die Symbole der Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2 , aufsuchen.

Aus den Identitäten (I) und (II) leitet man die folgenden ab:

$$3(DD'u)^2 D_x D'_x = (abc) D'_x \Sigma a_x (bD'u)(cD'u),$$

$$6(bD'u)(cD'u) D'_x = (a'b'c') \Sigma' \{a'_x (b'bu)(c'cu) + a'_x (b'cu)(c'bu)\}.$$

Multipliziert man die zweite mit $(abc)a_x$ und summirt dann über abc , so ergibt sich:

$$18(DD'u)^2 D_x D'_x = (abc)(a'b'c') \Sigma \Sigma' a_x a'_x [(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)],$$

und wenn man diese Gleichung mit u_x^2 multiplicirt und eine bekannte Identität berücksichtigt:

$$\begin{aligned} & 18(DD'u)^2 D_x D'_x u_x^2 \\ &= \Sigma \Sigma' a_x a'_x (bcu)(b'c'u) \cdot \Sigma \Sigma' a_x a'_x [(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)]. \end{aligned}$$

*) Was das Verschwinden der Jacobi'schen Form betrifft, so wird in den Vorlesungen über Geometrie von Clebsch, herausgegeben von Lindemann, Bd. 1, S. 304 irrtümlich behauptet, dass es die Ausartung des Netzes in ein Büschel nach sich zieht. Dass der daselbst gegebene Beweis nicht ausreicht, findet sich in den „Zusätzen und Verbesserungen“ S. 1047 erwähnt.

Wegen $(bcu)(b'cu) = (b'bu)(c'cu) - (b'cu)(c'bu)$ ist ferner

$$18(DD'u)^2 D_x D_x u_x^2 =$$

$$\Sigma \Sigma' a_x a'_x [(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)] \cdot \Sigma \Sigma' a_x a'_x [(b'bu)(c'cu) - (b'cu)(c'bu)].$$

Löst man die ersten Summen auf, so erhält man $18(DD'u)^2 D_x D_x u_x^2$ gleich dem Producte der beiden Factoren

$$\begin{aligned} a_x \Sigma' a'_x [(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)] + b_x \Sigma' a'_x [(b'cu)(c'au) + (b'au)(c'cu)] \\ + c_x \Sigma' a'_x [(b'au)(c'bu) + (b'bu)(c'au)], \\ a_x \Sigma' a'_x [(b'bu)(c'cu) - (b'cu)(c'bu)] + b_x \Sigma' a'_x [(b'cu)(c'au) - (b'au)(c'cu)] \\ + c_x \Sigma' a'_x [(b'au)(c'bu) - (b'bu)(c'au)], \end{aligned}$$

welches dargestellt werden kann in der Form

$$A_{11} a_x^2 + A_{22} b_x^2 + A_{33} c_x^2 + 2A_{23} b_x c_x + 2A_{31} c_x a_x + 2A_{12} a_x b_x,$$

wo zunächst

$$A_{11} = \Sigma' a'_x [(b'bu)(c'cu) + (b'cu)(c'bu)] \cdot \Sigma' a'_x [(b'bu)(c'cu) - (b'cu)(c'bu)]$$

ist und wieder die Form

$$B_{11} a_x^2 + B_{22} b_x^2 + B_{33} c_x^2 + 2B_{23} b_x c_x + 2B_{31} c_x a_x + 2B_{12} a_x b_x$$

hat. Es ergibt sich:

$$B_{11} = (b'bu)^2 (c'cu)^2 - (b'cu)^2 (c'bu)^2,$$

$$B_{22} = (c'bu)^2 (a'cu)^2 - (c'cu)^2 (a'bu)^2,$$

$$B_{33} = (a'bu)^2 (b'cu)^2 - (a'cu)^2 (b'bu)^2,$$

$$2B_{23} = -2(b'cu)(bcu)(a'bu)(a'cu) = -2(b'cu)u_{\mathcal{A}}^2,$$

$$2B_{31} = -2(c'au)(bcu)(b'bu)(b'cu) = 0,$$

$$2B_{12} = -2(a'b'u)(bcu)(c'bu)(c'cu) = 0.$$

Daraus folgt der vereinfachte Ausdruck von A_{11} und analog fallen A_{22} und A_{33} aus, nämlich:

$$A_{11} = \Sigma' a_x^2 [(b'bu)^2 (c'cu)^2 - (b'cu)^2 (c'bu)^2] - 2u_{\mathcal{A}}^3 (b'cu) b'_x c'_x,$$

$$A_{22} = \Sigma' a_x^2 [(b'cu)^2 (c'au)^2 - (b'au)^2 (c'cu)^2] - 2u_{\mathcal{A}}^3 (c'au) c'_x a'_x,$$

$$A_{33} = \Sigma' a_x^2 [(b'au)^2 (c'bu)^2 - (b'bu)^2 (c'au)^2] - 2u_{\mathcal{A}}^3 (a'bu) a'_x b'_x.$$

Wir gehen jetzt zu den Formen A_{23} , A_{31} , A_{12} über. Es ist

$$\begin{aligned} 2A_{23} &= \Sigma' a'_x [(b'cu)(c'au) + (b'au)(c'cu)] \cdot \Sigma' a'_x [(b'au)(c'bu) - (b'bu)(c'au)] \\ &+ \Sigma' a'_x [(b'cu)(c'au) - (b'au)(c'cu)] \cdot \Sigma' a'_x [(b'au)(c'bu) + (b'bu)(c'au)] \\ &= C_{11} a_x^2 + C_{22} b_x^2 + C_{33} c_x^2 + 2C_{23} b_x c_x + 2C_{31} c_x a_x + 2C_{12} a_x b_x. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}
C_{11} &= -2(bcu)(b'c'u)(b'au)(c'au) = -2(bcu)u_A^3, \\
C_{22} &= -2(bcu)(c'a'u)(c'au)(a'au) = 0, \\
C_{33} &= -2(bcu)(a'b'u)(a'au)(b'au) = 0, \\
2C_{23} &= 2(a'au)^2(bcu)(b'c'u), \\
2C_{31} &= 2(b'au)^2(bcu)(c'a'u), \\
2C_{12} &= 2(c'au)^2(bcu)(a'b'u).
\end{aligned}$$

Da A_{31} und A_{12} analog behandelt werden können, so erhält man:

$$\begin{aligned}
2A_{23} &= -2u_A^3(bcu)a_x'^2 + 2(bcu)\Sigma'(a'au)^2(b'c'u)b'_xc'_x, \\
2A_{31} &= -2u_A^3(cau)b_x'^2 + 2(cau)\Sigma'(a'bu)^2(b'c'u)b'_xc'_x, \\
2A_{12} &= -2u_A^3(abu)c_x'^2 + 2(abu)\Sigma'(a'cu)^2(b'c'u)b'_xc'_x
\end{aligned}$$

und daraus endlich:

$$\begin{aligned}
(V) \quad & 18(DDu)^2 D_x D_x u_x^2 \\
&= \Sigma \Sigma' a_x^2 a_x'^2 [(b'bu)^2 (c'cu)^2 - (b'cu)^2 (c'bu)^2] \\
&+ 2 \Sigma \Sigma' (a'au)^2 (bcu) b_x c_x (b'c'u) b'_x c'_x \\
&- 2u_A^3 [a_x'^2 (b'c'u) b'_x c'_x + b_x^2 (c'a'u) c'_x a'_x + c_x^2 (a'b'u) a'_x b'_x] \\
&- 2u_A^3 [a_x'^2 (bcu) b_x c_x + b_x^2 (cau) c_x a_x + c_x^2 (abu) a_x b_x].
\end{aligned}$$

4. Die Grösse $\Sigma \Sigma' a_x^2 a_x'^2 [(b'bu)^2 (c'cu)^2 - (b'cu)^2 (c'bu)^2]$ heisse F . Sie stellt eine quadratische Form der gegebenen Formen a_x^2 , b_x^2 , c_x^2 dar und nimmt, wenn $(a'au)^2$ durch F_{11} , $(bcu)^2$ durch F_{23} u. s. w. bezeichnet werden, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
f_1^2(F_{22}F_{33} - F_{23}^2) + f_2^2(F_{33}F_{11} - F_{31}^2) + f_3^2(F_{11}F_{22} - F_{12}^2) \\
+ 2f_2f_3(F_{31}F_{12} - F_{11}F_{23}) + 2f_3f_1(F_{12}F_{23} - F_{22}F_{31}) \\
+ 2f_1f_2(F_{23}F_{31} - F_{33}F_{12})
\end{aligned}$$

oder in Determinantenform

$$F = - \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & f_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & f_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Summe der beiden in (V) auftretenden Trinome ist $-4u_A^3 u_x D_x^3$ nach Identität (III). Das auf F folgende Glied in (V) lässt sich einfach berechnen, wenn man zunächst die Identität (IV) benutzt; substituiert man darin für y_i die Determinante $(a'u)_i$, so erhält man:

$$-3(a'Du)^2 D_x u_x = \Sigma(a'au)^2 (bcu) b_x c_x - \Sigma a_x^2 (bcu) (ba'u)(ca'u)$$

und wenn man noch mit $(b'c'u) b'_x c'_x$ multiplicirt und über $a' b' c'$ summiert:

$$\begin{aligned}
& -3\Sigma'(a'Du)^2(b'c'u)b'_xc'_xD_xu_x \\
& = \Sigma\Sigma'(a'au)^2(bcu)b_xc_x(b'c'u)b'_xc'_x - \Sigma\Sigma'a_x^2(bcu)(ba'u)(ca'u)(b'c'u)b'_xc'_x \\
& = \Sigma\Sigma'(a'au)^2(bcu)b_xc_x(b'c'u)b'_xc'_x - u_A^3u_xD_x^3.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der linken Seite dieser Relation benutzen wir eine Identität, welche Herr Rosanes in der bereits citirten Abhandlung aufgestellt und mit Nummer 12 bezeichnet hat:

$$\Sigma'a_y^2(b'c'u)b'_xc'_x = 2u_yD_x^2D'_y - u_xD_y^2D'_x + (xy\Delta)^2u_A.$$

Setzt man darin $y_i = (Du)_i$, so ergibt sich:

$$\Sigma'(a'Du)^2(b'c'u)b'_xc'_x = -u_xD_x(D'Du)^2 + (D_xu_A - u_xD_A)^2u_A,$$

folglich

$$\begin{aligned}
& \Sigma\Sigma'(a'au)^2(bcu)b_xc_x(b'c'u)b'_xc'_x \\
& = 3(D'Du)^2D_xD'_xu_x^2 - 3(D_xu_A - u_xD_A)^2u_Au_xD_x + u_A^3u_xD_x^3,
\end{aligned}$$

und die Formel (V) geht also schliesslich über in:

$$\begin{aligned}
& 18(DD'u)^2D_xD'_xu_x^2 \\
& = F - 4u_A^3u_xD_x^3 + 6(DD'u)^2D_xD'_xu_x^2 \\
& \quad - 6(D_xu_A - u_xD_A)^2u_Au_xD_x + 2u_A^3u_xD_x^3 \\
& = F - 2u_A^3u_xD_x^3 + 6(DD'u)^2D_xD'_xu_x^2 \\
& \quad - 6u_A^3u_xD_x^3 + 12D_x^2u_x^2u_A^2D_A - 6u_x^3D_xD_A^2u_A.
\end{aligned}$$

Wir sind demnach zur Darstellung der Determinante F durch die Symbole der Jacobi'schen und Hermite'schen Form gelangt, welche lautet:

$$\begin{aligned}
\text{(VI)} \quad F & = 12(DD'u)^2D_xD'_xu_x^2 + 8u_A^3u_xD_x^3 \\
& \quad - 12u_A^2D_AD_x^2u_x^2 + 6u_AD_A^2D_xu_x^3.
\end{aligned}$$

5. In dieser Relation liegt nun die Beantwortung der ersten der gestellten Fragen; denn sie sagt aus, dass, sobald die Jacobi'sche Form von drei ternären quadratischen Formen identisch verschwindet, zwischen diesen drei Formen eine Relation zweiten Grades besteht, nämlich $F=0$ oder ausführlicher

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} & f_1 \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} & f_2 \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sind die drei Formen f_1, f_2, f_3 binär, so existirt, ohne dass eine Bedingung hinzutreten braucht, zwischen denselben immer eine quadratische Gleichung, welche aus der soeben aufgestellten dadurch entsteht, dass statt der Contravarianten F_{ik} die entsprechenden Inva-

varianten der binären Formen eintreten. (Vergl. Clebsch, Theorie der binären algebr. Formen, pag. 205, wo die betreffenden Invarianten mit D_{11} u. s. w. bezeichnet sind.) Fasst man in der That solche drei binäre Formen f_1, f_2, f_3 als ternäre auf, in denen die eine Variable fehlt, so kommt ihnen eine identisch verschwindende Jacobi'sche Form zu und die citirte Gleichung erscheint der unsrigen gegenüber als ein besonderer Fall.

6. Wenn D_x^3 und mithin F verschwindet, so sind die drei Formen f_1, f_2, f_3 von sehr specieller Beschaffenheit. Wir haben dann eine Gleichung von der Gestalt $\Sigma A_{ik} f_i f_k = 0$, wo die A_{ik} von $x_1 x_2 x_3$ nicht abhängen, und untersuchen zuerst den Fall, wo die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$ nicht verschwindet. Die Gleichung lässt sich in diesem Falle so transformiren, dass nur noch zwei Glieder vorkommen, d. h. in dem Netz der Kegelschnitte $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ giebt es drei Curven $g_1 = 0, g_2 = 0, g_3 = 0$, welche dasselbe in gleicher Weise bestimmen, wie $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ und durch deren Einführung die einfachere Gleichung

$$g_1 g_2 = g_3^2$$

entsteht. Dieser kann auf zweifache Weise genügt werden. Entweder sind die drei Formen nur durch constante Factoren von einander verschieden, was aber das Verschwinden der Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$ nach sich ziehen würde, oder sie sind reducibel und es ist $g_1 = y_1^2, g_2 = y_2^2, g_3 = y_1 y_2$, wobei die y lineare Functionen der x sind. Nun hängen f_1, f_2, f_3 in linearer Weise von g_1, g_2, g_3 ab und lassen sich daher als quadratische Formen der zwei Variablen $y_1 y_2$ darstellen. Demnach zerfallen sämtliche Kegelschnitte des Netzes in zwei durch denselben Punkt ($y_1 = 0, y_2 = 0$) gehende Gerade.

7. Die Gleichung $F = 0$ enthält in den Coefficienten die Variablen u_1, u_2, u_3 und es muss daher geprüft werden, ob durch Veränderung dieser Grössen verschiedene Gleichungen entstehen können. Nun haben wir gesehen, dass vermöge einer solchen Gleichung die Formen f_1, f_2, f_3 sich in binäre transformiren lassen. Es werde, in $y_1 y_2$ ausgedrückt, $f_1 = \alpha_y^2, f_2 = \beta_y^2, f_3 = \gamma_y^2$; dann ist

$$F_{11} = (\alpha\alpha')^2 u_3^2, \quad F_{23} = (\beta\gamma)^2 u_3^2 \text{ u. s. w.}$$

Aus der Determinante F sondert sich demnach der Factor u_3^4 aus, nach dessen Beseitigung die Gleichung $F = 0$ die $u_1 u_2 u_3$ gar nicht mehr enthält.

8. Die Determinante F ist die adjungirte Form der in irgendwelchen Variablen $v_1 v_2 v_3$ quadratischen Form $V = \Sigma F_{ik} v_i v_k$. Die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$ ist daher das Quadrat der Determinante von V , welche mit D bezeichnet werde, so dass

$$\Sigma \pm F_{11} F_{22} F_{33} = D, \quad \Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33} = D^2.$$

Wenn demnach $F=0$ eine reducible Gleichung zwischen f_1, f_2, f_3 darstellt, so ist dies nur dadurch möglich, dass sie das Quadrat einer linearen Gleichung wird.

Der Werth von D ergiebt sich folgendermassen. Es ist für $u_i = (xy)_i$:

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_x a'_y - a_y a'_x)^2 & (a_x b'_y - a_y b'_x)^2 & (a_x c'_y - a_y c'_x)^2 \\ (b_x a'_y - b_y a'_x)^2 & (b_x b'_y - b_y b'_x)^2 & (b_x c'_y - b_y c'_x)^2 \\ (c_x a'_y - c_y a'_x)^2 & (c_x b'_y - c_y b'_x)^2 & (c_x c'_y - c_y c'_x)^2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_y^2 & a'^2_x & -2a'_y a'_x & a'^2_x \\ b_x^2 & b_x b_y & b_y^2 & b'^2_y & -2b'_y b'_x & b'^2_y \\ c_x^2 & c_x c_y & c_y^2 & c'^2_y & -2c'_y c'_x & c'^2_x \end{vmatrix} = 2u^3_A u^3_A,$$

d. i. gleich dem doppelten Quadrat der Hermite'schen Form. Mithin ist $\Sigma \pm A_{11} A_{22} A_{33}$ gleich dem vierfachen Biquadrat derselben Form. Die Gleichung $F=0$ reducirt sich demnach auf das Quadrat einer linearen dann und nur dann, wenn die Hermite'sche Form verschwindet. Damit erledigt sich die Frage, unter welchen Bedingungen zwischen den Formen f_1, f_2, f_3 eine lineare Relation besteht. *Es kann nämlich eine lineare Relation nur dann stattfinden, wenn ausser der Jacobi'schen Form auch die Hermite'sche Form identisch verschwindet*; nur für diesen Fall gehören die drei Kegelschnitte einem Büschel an. Wenn dagegen die Jacobi'sche Form verschwindet, ohne dass zugleich die Hermite'sche Form verschwindet, so existirt, wie in den Art. 5 und 6 gezeigt wurde, zwischen den drei Formen f_1, f_2, f_3 eine Relation zweiten Grades und die entsprechenden Kegelschnitte sind reducibel mit demselben Doppelpunkt.

In der bereits citirten Abhandlung hat Herr Rosanes folgende oben benutzte Identität nachgewiesen:

$$a_x^2 b_y c_y (bcu) + b_x^2 c_y a_y (cau) + c_x^2 a_y b_y (abu) \\ = 2u_x D_y^2 D_x - u_y D_x^2 D_y + (xy\Delta)^2 u_A,$$

aus der man schliessen kann, dass die Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2 durch eine lineare homogene Gleichung verbunden sind, sobald ihre Jacobi'sche und ihre Hermite'sche Form verschwindet.

9. Insbesondere können die drei Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2 Ableitungen einer cubischen Form sein. Die Jacobi'sche Form der drei ersteren ist dann die Hesse'sche Form der letzteren. Verschwindet dieselbe identisch, so zerfällt die cubische Form in drei lineare Factoren, zwischen welchen lineare Abhängigkeit stattfindet, wie Herr Pasch in Crelle's Journal, Band 80 pag. 169 nachgewiesen hat. Es existirt dann auch zwischen ihren ersten Ableitungen eine lineare Relation

und hieraus folgt, dass zugleich die Hermite'sche Form identisch verschwindet.

Die Hermite'sche Form von drei quadratischen Formen nimmt überhaupt, wenn sie sich nicht auf Null reducirt, in dem Fall, dass die Jacobi'sche Form identisch verschwindet, eine besondere Gestalt an; sie wird nämlich gleich dem Cubus einer linearen Form, welche gleich Null gesetzt die Gleichung des allen Kegelschnitten gemeinsamen Doppelpunktes darstellt. Um dies zu beweisen, machen wir von der Thatsache Gebrauch, dass die drei Formen f_1, f_2, f_3 als binäre betrachtet werden können (vergl. Art. 7.): $f_1 = \alpha y^2, f_2 = \beta y^2, f_3 = \gamma y^2$. Für die Hermite'sche Form finden wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha x^2 & \alpha x \alpha y & \alpha y^2 \\ \beta x^2 & \beta x \beta y & \beta y^2 \\ \gamma x^2 & \gamma x \gamma y & \gamma y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ x_1y_1 & x_1y_2 + x_2y_1 & x_2y_2 \\ y_1^2 & 2y_1y_2 & y_2^2 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma) u_3^3.$$

Es ist aber $u_3 = 0$ die Gleichung des allen Kegelschnitten gemeinschaftlichen Doppelpunktes ($y_1 = 0, y_2 = 0$).

III. Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Hermite'sche Form identisch verschwindet.

10. Suchen wir nun die Beschaffenheit von ternären quadratischen Formen zu ermitteln, deren Hermite'sche Form identisch verschwindet. Diese im Verhältniss zur vorhergehenden viel einfachere Untersuchung geht aus von einer Relation, in welcher Herr Rosanes (pag. 279 der citirten Abhandlung, Relation 14) den allgemeinen Kegelschnitt des durch die Formen f_1, f_2, f_3 erzeugten Netzes in den Symbolen der Jacobi'schen und Hermite'schen Form ausdrückt unter der Voraussetzung, dass das Netz sich nicht auf ein Büschel reducirt:

$$\begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix} = 4(xy z) D_x D_y D_z - 2(yz \Delta)(zx \Delta)(xy \Delta).$$

Verschwindet nämlich die Hermite'sche Form, die Jacobi'sche dagegen nicht, so bleibt rechts nur das Product $4(xy z) D_x D_y D_z$ stehen, d. h. alle Kegelschnitte des Netzes sind dann reducibel. Berücksichtigen wir jetzt, dass im Fall $u_3^2 = 0$ die Bedingung für die Existenz einer doppelten Geraden im Netz

$2(\Delta \Delta' \Delta'')^2 D_A D_A' D_A'' + (\Delta \Delta' \Delta'')(\Delta \Delta' \Delta''')(\Delta \Delta'' \Delta''')(\Delta' \Delta'' \Delta''') = 0$ erfüllt ist. Ist $l_x = 0$ die Gleichung dieser Geraden und sind $m_x = 0, n_x = 0$ zwei andere Gerade, die jene in verschiedenen Punkten schneiden, so können wir durch Variiren von y und z bewirken, dass die

Gleichung $(xyz) = 0$ einmal $m_x = 0$, das andere Mal $n_x = 0$ darstellt, und demnach zu constituirenden Kegelschnitten des Netzes wählen

$$l_x^2 = 0, \quad m_x(L_1 l_x + M_1 m_x + N_1 n_x) = 0, \quad n_x(L_2 l_x + M_2 m_x + N_2 n_x) = 0,$$

wo weder L_1, M_1, N_1 noch L_2, M_2, N_2 zugleich verschwinden. Wird $l_x = z_1, m_x = z_2, n_x = z_3$ gesetzt, so muss der allgemeine Kegelschnitt des Netzes

$\lambda z_1^2 + \mu z_2(L_1 z_1 + M_1 z_2 + N_1 z_3) + \nu z_3(L_2 z_1 + M_2 z_2 + N_2 z_3) = 0$ reducibel sein, d. h. seine Determinante muss für alle λ, μ, ν verschwinden. In der cubischen Form der Grössen λ, μ, ν

$$\begin{array}{ccc} 2\lambda & \mu L_1 & \nu L_2 \\ \mu L_1 & 2\mu M_1 & \mu N_1 + \nu M_2 \\ \nu L_2 & \mu N_1 + \nu M_2 & 2\nu N_2 \end{array}$$

sind also die sämtlichen Coefficienten gleich Null zu setzen. Dadurch erhält man:

$$\begin{aligned} M_1^2 = 0, \quad N_1^2 = 0, \quad 2M_1 N_2 - M_2 N_1 = 0, \quad L_2(L_1 M_2 - L_2 M_1) = 0, \\ L_1(L_2 N_1 - L_1 N_2) = 0, \end{aligned}$$

woraus man schliesst:

$$M_1 = 0, \quad N_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad N_2 = 0,$$

d. h. die constituirenden Kegelschnitte des Netzes nehmen die Formen an:

$$z_1^2 = 0, \quad z_1 z_2 = 0, \quad z_1 z_3 = 0;$$

demnach haben sie die Gerade $z_1 = 0$ gemein. Sobald die *Hermite'sche Form eines Kegelschnittnetzes verschwindet und nicht gleichzeitig die Jacobi'sche, sind alle Curven des Netzes reducibel und haben eine Gerade gemein.* Das Verschwinden der Hermite'schen Form hat also zur Folge, dass das Netz sich entweder auf ein Büschel reducirt oder aus reduciblen Kegelschnitten mit einer gemeinschaftlichen Geraden besteht. Es kann auch beides zugleich eintreten.

Die Jacobi'sche Form eines Netzes nimmt, sobald die Hermite'sche Form identisch verschwindet, eine besondere Gestalt an; sie wird gleich dem Cubus einer linearen Form, welche die allen Kegelschnitten gemeinschaftliche Gerade darstellt. Die Jacobi'sche Form von $z_1^2, z_1 z_2, z_1 z_3$ ist nämlich $2z_1^3$.

IV. Bemerkungen über den Zusammenhang der Kegelschnittnetze mit den Linien 3. O.

11. Die Polarkegelschnitte einer Linie 3. O. bestimmen im Allgemeinen ein Netz und man kann daher auch umgekehrt nach einer Linie 3. O. fragen, deren Polarkegelschnittnetz mit einem gegebenen

Netze congruent ist. Diese Frage lässt sich auf ein System von 18 homogenen linearen Gleichungen mit 19 Unbekannten zurückführen, welches immer auf eine oder unendlich viele Arten lösbar ist. Daraus darf man aber nicht schliessen, dass es immer eine Linie 3. O. giebt, deren Polarkegelschnittnetz sich mit dem gegebenen deckt; denn jenes System drückt nur aus, dass alle Polarkegelschnitte der unbekannten Linie 3. O. dem gegebenen Netz angehören, nicht aber das Umgekehrte, und es bleibt daher jedesmal zu untersuchen, ob diese Polarkegelschnitte das ganze Netz umfassen. Die Entscheidung hierüber hängt nun von einer Combinante ab, die Herr Gundelfinger (Ueber das simultane System von drei ternären quadratischen Formen, Crelle's Journal Bd. 80 pag. 73) mit s bezeichnet hat und die sich durch die Symbole der Jacobi'schen und Hermite'schen Form folgendermassen ausdrücken lässt:

$$s = 18(\Delta\Delta'\Delta'')^2 D_A D_A' D_A'' + 9(\Delta\Delta'\Delta'')(\Delta\Delta'\Delta''')(\Delta\Delta''\Delta''')(\Delta'\Delta''\Delta''').$$

Wenn s von Null verschieden ist, so ergibt sich eine bestimmte Linie 3. O., deren Herstellung Herr Gundelfinger daselbst angegeben und von der er gezeigt hat, dass unter ihren Polaren alle Kegelschnitte des gegebenen Netzes vorkommen. Bei den vorstehend behandelten Netzen ist aber $s = 0$ und es mag daher ihr Zusammenhang mit den Linien 3. O. hier noch erörtert werden.

12. Verschwindet die Jacobi'sche Form eines Netzes, die Hermite'sche dagegen nicht, so sind alle seine Kegelschnitte reducibel und haben denselben Doppelpunkt. Die Polarkegelschnitte einer Linie 3. O. können ein solches Netz nicht bestimmen, weil ihre Hesse'sche Form verschwinden müsste und die Polarkegelschnitte einer Linie 3. O., deren Hesse'sche Form verschwindet, einem Büschel angehören. *Dagegen existirt eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Linien 3. O., deren Polarkegelschnitte einem Netz der beschriebenen Art angehören.* Denn eine solche Linie 3. O. zerfällt jedenfalls in drei durch den gemeinsamen Doppelpunkt der Kegelschnitte ($y_1 = 0$, $y_2 = 0$) gehende Gerade und ihre Gleichung lässt sich daher schreiben:

$$a_0 y_1^3 + 3a_1 y_1^2 y_2 + 3a_2 y_1 y_2^2 + a_3 y_2^3 = 0.$$

Umgekehrt liefert jede Curve 3. O., die jenen Punkt zum dreifachen Punkt hat, als Polarkegelschnitte ein Büschel und alle diese Büschel zusammen bilden das gegebene Netz.

13. Auch wenn die Hermite'sche Form eines Netzes verschwindet, ohne dass die Jacobi'sche sich auf Null reducirt, kann eine Linie 3. O. nicht existiren, deren Polarkegelschnitte jenes Netz bestimmen. *Es giebt jedoch eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Linien 3. O., deren Polarkegelschnitte dem gegebenen Netz angehören.* Ist $z_1 = 0$

die allen Kegelschnitten des gegebenen Netzes gemeinsame Gerade, so muss die Linie 3. O. eine Gleichung haben von der Form

$$z_1^2(A_1z_1 + A_2z_2 + A_3z_3) = 0,$$

wo die drei Geraden $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$ nicht durch einen Punkt gehen dürfen. Umgekehrt stellt jede Gleichung dieser Art eine Linie 3. O. mit der verlangten Eigenschaft dar.

14. Reducirt sich sowohl die Jacobi'sche als auch die Hermite'sche Form auf Null, so artet das Kegelschnittnetz in ein Büschel aus. Es hat aber jede Linie 3. O., deren Polarkegelschnitte ein Büschel bilden, einen dreifachen Punkt und jeder Polarkegelschnitt hat diesen Punkt zum Doppelpunkt. Demnach kann nur ein Büschel von Kegelschnitten in Betracht kommen, dessen sämtliche Elemente reducibel sind mit demselben Doppelpunkt.

Es seien also zwei binäre quadratische Formen f_1 und f_2 gegeben; es soll eine binäre cubische Form gefunden werden, deren beide Ableitungen aus den gegebenen zwei Formen sich linear zusammensetzen lassen. Sind die Doppелеlemente der Serie $f_1 + \lambda f_2$ von einander verschieden, so können wir zwei Formen y_1^2 und y_2^2 zu Grunde legen und schreiben $a_0y_1^3 + 3a_1y_1^2y_2 + 3a_2y_1y_2^2 + a_3y_2^3$ für die gesuchte cubische Form. Hier müssen nun a_1 und a_2 verschwinden, während a_0 und a_3 unbestimmt bleiben. Fallen hingegen die Doppелеlemente zusammen, so verschwindet die Resultante der Formen f_1 und f_2 ; wir dürfen setzen $f_1 = y_1y_3$, $f_2 = y_2y_3$, wo y_1 , y_2 , y_3 in linearem Zusammenhang stehen. Die cubische Form muss den Factor y_3 im Quadrat enthalten, also die Gestalt y_3^2u haben, wo u eine beliebige lineare Form von y_1 und y_2 ist. *Es ergiebt sich in beiden Fällen eine cubische Form, in welcher zwei Coefficienten unbestimmt bleiben, welcher also ein Büschel von Linien 3. O. entspricht.*